Número 16
Junho, 2021

Ludus

Ludus

Temas da Matemática Elementar

ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO DA ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO BASEADAS NA NATUREZA DECIMAL DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO: EXPLORAÇÕES NO 2.º ANO DE ESCOLARIDADE

Cláudia Carreiro, Eduarda Correia e João Patrício,
Carlos Pereira dos Santos, Ricardo Cunha Teixeira

EBI de Ribeira Grande, CEAFEL & CST, NICA-UAc & FCT-UAc

cmfsantos@fc.ul.pt, ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *Os autores analisam estratégias de cálculo da adição e subtração baseadas na natureza decimal do sistema de numeração, incluindo os requisitos prévios necessários. Estas dinâmicas foram implementadas nas escolas públicas dos Açores, entre setembro de 2015 e julho de 2021, no contexto do Projeto Prof DA do Programa "ProSucesso – Açores pela Educação", do Governo dos Açores, e da Oficina "Matemática Passo a Passo", da Universidade dos Açores.*

Palavras-chave: Oficina "Matemática Passo a Passo", estratégias de cálculo, adição, subtração, 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Introdução

O Projeto Prof DA foi implementado em todas as escolas públicas da Região Autónoma dos Açores com 1.º Ciclo do Ensino Básico, entre setembro de 2015 e julho de 2021. A ação do Prof **DA** (professor qualificado na superação de **D**ificuldades de **A**prendizagem a Matemática) foi determinada pela oficina de formação "Matemática Passo a Passo", da responsabilidade da Universidade dos Açores, e teve por base estudos provenientes das neurociências cognitivas, que fornecem pistas sobre a forma como o cérebro de uma criança aprende Matemática (ver, por exemplo, [20]), e alguns casos de sucesso do ensino da Matemática no Mundo, como é o exemplo de Singapura, que nos apresenta um leque vasto de pormenores de ordem cientifica e didática amplamente testados em vários países (ver, por exemplo, [21]).

A abordagem concreto-pictórico-abstrato (abordagem CPA), que remonta aos trabalhos de Jerome Bruner [2, 9] é uma das teorias edificadoras do currículo de Matemática de Singapura. Os temas devem ser introduzidos partindo do concreto. O aluno deve perceber que a Matemática pode ser usada para interagir com o meio que o rodeia e para resolver problemas da vida real. É importante recorrer a um leque diversificado de materiais, dos materiais estruturados aos não estruturados. Os registos pictóricos constituem representações de conceitos e procedimentos que ajudam os alunos a esquematizarem o seu raciocínio. Já no âmbito do abstrato, o trabalho formal com os símbolos permite mostrar aos alunos que existe uma maneira mais rápida e eficaz de representar um determinado conceito ou de aplicar um certo procedimento.

Destaca-se também o trabalho de Zoltán Dienes [6] relativo aos princípios de variabilidade matemática e percetiva que revelam que a aprendizagem de um conceito é facilitada quando se exploram múltiplas perspetivas e representações. Por sua vez, Richard Skemp [19] alerta para a importância de uma aprendizagem conceptual, em detrimento de uma aprendizagem meramente procedimental, destacando a importância de os alunos estabelecerem conexões matemáticas para uma aprendizagem com compreensão e mais duradoura.

Mais informações sobre as teorias edificadoras do currículo de Singapura estão disponíveis em [7, 21]. Nos últimos anos, têm surgido também várias publicações que decorreram da implementação das dinâmicas da oficina "Matemática Passo a Passo" na Região Autónoma dos Açores [1, 3, 4, 5, 8, 10, 14, 15, 18].

Neste artigo, os autores analisam a implementação de estratégias de cálculo da adição e subtração, no contexto da caminhada dos números naturais até 1000 em turmas do 2.º ano de escolaridade, dando enfoque às estratégias de cálculo mental baseadas na natureza decimal do sistema de numeração. Esta abordagem tem por base os princípios orientadores acima referidos.

1 Requisitos prévios no contexto do 1.º ano

A aprendizagem da adição e subtração e o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental envolvendo estas duas operações requerem uma edificação de alicerces para fomentar a compreensão e consolidação por parte dos alunos.

É de salientar que uma imagem de marca do *Singapore Math*, o método de Singapura implementado em muitas partes do Mundo, em particular na Região Autónoma dos Açores, é o extremo cuidado com a ordem pela qual os temas de Matemática Elementar são explorados.

Nos anos iniciais do Ensino Básico, nomeadamente no 1.º Ciclo, a ordem de exploração dos conteúdos em Matemática é um aspeto fundamental para garantir que os conceitos e procedimentos matemáticos possam ser trabalhados com rigor didático e compreensão, potenciando o sucesso das aprendizagens futuras. Esta particularidade é um dos aspetos determinantes do método de Singapura, constituindo a ordem de lecionação dos conteúdos um fator determinante para o percurso escolar dos estudantes.

Começamos por abordar os requisitos fundamentais ao desenvolvimento, no 2.º ano de escolaridade, de estratégias de cálculo mental da adição e subtração baseadas na natureza do nosso sistema de numeração. As explorações iniciadas no 1.º ano devem constituir a trave-mestra de todo o trabalho que pretendemos desenvolver na caminhada dos números naturais até 1000 no 2.º ano.

De seguida, apresentamos as aprendizagens do 1.º ano que constituem, a nosso ver, os alicerces do trabalho a desenvolver no 2.º ano.

1.1 Caminhada dos números até 100

A caminhada dos números naturais até 100 deve ser desenvolvida, passo a passo, ao longo do 1.º ano de escolaridade, de modo a estimular a compreensão. O trabalho com a primeira dezena deve constituir o primeiro passo, sendo importante dar enfoque às decomposições dos números até 10 (ver [16, 17]).

Antes de dar continuidade à caminhada progressiva dos números naturais até 100, concretamente do 11 ao 100, é importante explorar o papel da dezena como grupo uno de dez unidades, dando enfoque à natureza decimal do nosso sistema de numeração, como se exemplifica na Figura 1.

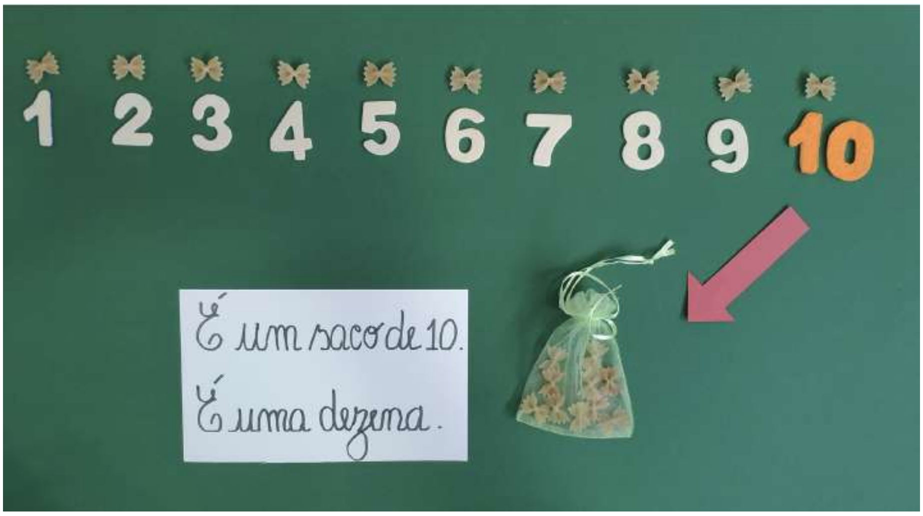

Figura 1: Este exemplo ilustra uma possibilidade de representar a dezena como grupo uno de dez unidades. O ato de compor dez unidades numa dezena introduz uma nova ordem, pelo que passamos a representar o 10 e os números que se seguem por dois algarismos, um para a ordem das dezenas e o outro para a ordem das unidades. Os alunos deverão, portanto, ser capazes de estabelecer a relação entre uma dezena e dez unidades, reconhecendo que um conjunto formado por quaisquer dez elementos compõe sempre uma dezena.

A caminhada dos números naturais prossegue, de forma faseada, até ao 100. Chegando ao 100, é importante explorar a centena como grupo uno de dez dezenas, ou seja, de cem unidades, recorrendo à manipulação de materiais que possam contribuir para a compreensão do conceito de agrupamento de dez em dez. Nas Figuras 2 e 3, ilustram-se duas explorações.

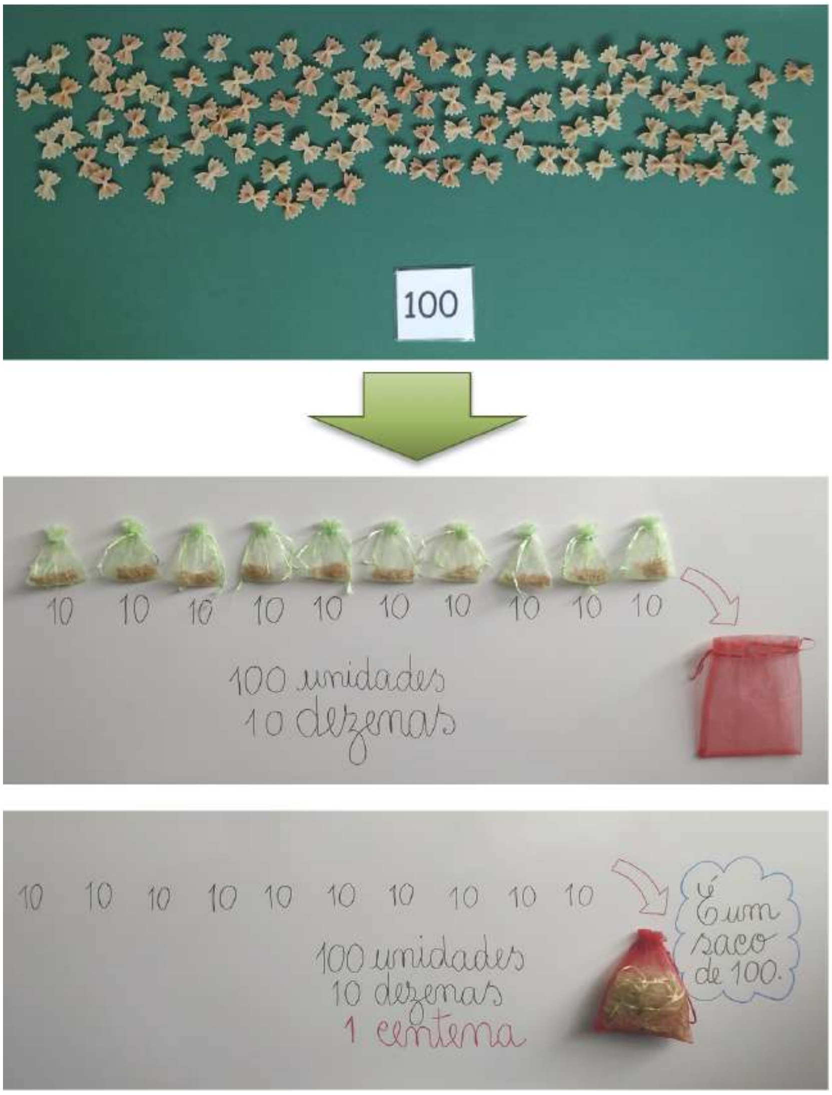

Figura 2: Este exemplo ilustra uma possibilidade de representar a centena como grupo uno de dez dezenas e, portanto, de cem unidades. A tarefa tem início com a exploração das cem unidades que são reorganizadas em dezenas, um procedimento que já foi trabalhado anteriormente. Em seguida, efetua-se a composição das dez dezenas numa nova ordem: a centena. Os alunos deverão, portanto, ser capazes de estabelecer a relação entre uma centena, dez dezenas e cem unidades.

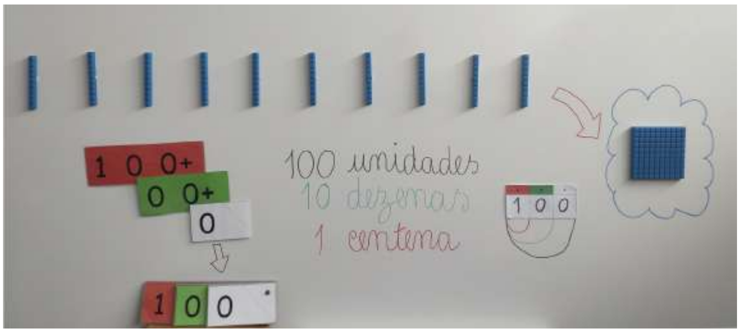

Figura 3: Neste exemplo, recorre-se ao MAB para a base 10, progredindo, de forma faseada, de uma exploração com as massas da figura anterior para um material estrutuado. A representação do número 100 com as tiras de valor posicional permite destacar o valor posicional de cada algarismo que compõe o número 100. Na verdade, o trabalho com as tiras de valor posicional não deve ser descurado, uma vez que ajuda o aluno a identificar o valor dos algarismos correspondentes a cada uma das ordens já exploradas.

1.2 Composição e decomposição de números até 100 de acordo com as ordens numéricas

A agilidade nas composições e decomposições decimais envolvendo números naturais é estruturante para o desenvolvimento do sentido de número. Para se alcançar essa agilidade, recomenda-se uma aposta na concretização com recurso a materiais diversos de forma que o aluno visualize e perceba a dinâmica inerente aos atos de compor e decompor de acordo com as ordens numéricas. O discente, ao manusear e visualizar as composições e decomposições decimais, é estimulado a associar a dinâmica visual a uma imagem mental e à conceptualização abstrata, tendo como suporte a natureza decimal do nosso sistema de numeração.

Ilustramos alguns exemplos nas Figuras 4 a 7.

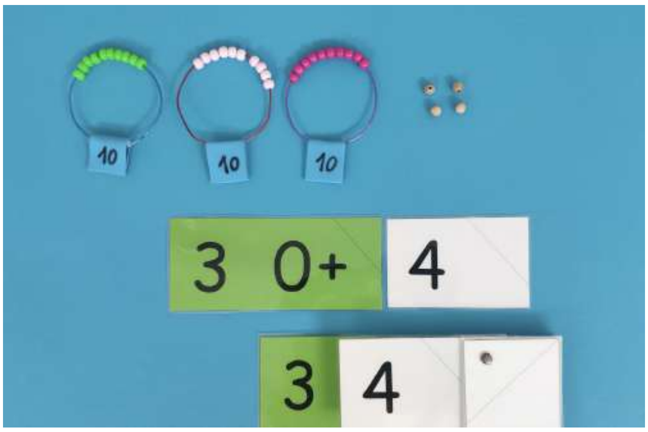

Figura 4: Existem três pulseiras, representativas das dezenas, e quatro contas isoladas, representativas das unidades. Ao compor, obtemos o número 34.

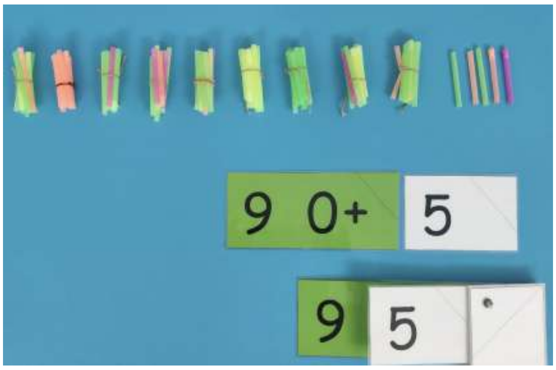

Figura 5: Existem nove grupos de dez palhinhas, representativos das dezenas, e cinco palhinhas isoladas, representativas das unidades. Ao compor, obtemos o número 95.

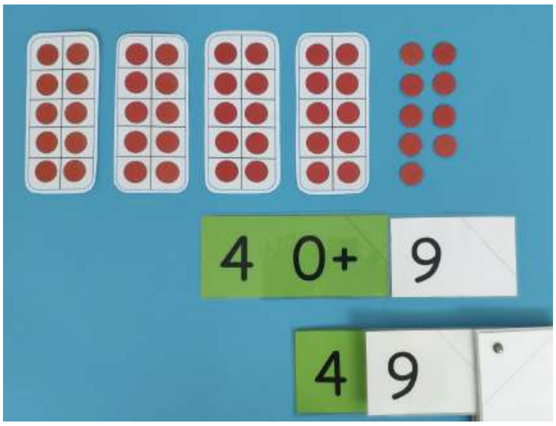

Figura 6: Existem quatro molduras representativas das dezenas, com dez círculos vermelhos cada, e nove círculos vermelhos isolados, representativos das unidades. Ao compor, obtemos o número 49.

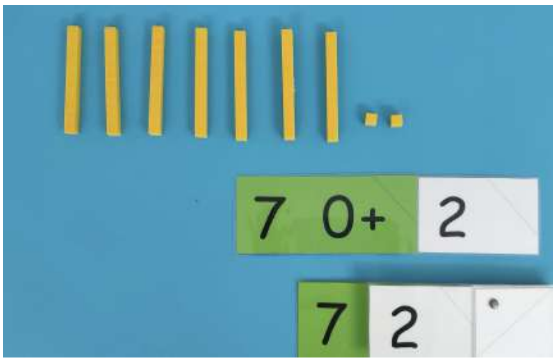

Figura 7: Existem sete barras do MAB para a base 10, representativas das dezenas, e dois cubinhos isolados, representativos das unidades. Ao compor, obtemos o número 72.

Na Figura 8, exploram-se diferentes formas de representação do número 57, que fomentam a composição/decomposição decimal, seguindo uma abordagem CPA. Nas primeiras duas linhas, recorre-se a material não estruturado, nomeadamente a cinco pulseiras com dez contas/cinco molhos de dez palhinhas, representativos das dezenas, e a sete contas/sete palhinhas isoladas, representativas das unidades. Nas duas linhas seguintes, recorre-se a material estruturado, especificamente usam-se cinco molduras do dez totalmente preenchidas/cinco barras do MAB, representativas das dezenas, e sete círculos vermelhos/sete cubinhos isolados, representativos das unidades. Esta exploração progressiva culmina com a identificação do total de unidades correspondente a cada ordem, respetivamente o 50 e o 7, que ao serem compostos, resultam no número estudado, o 57.

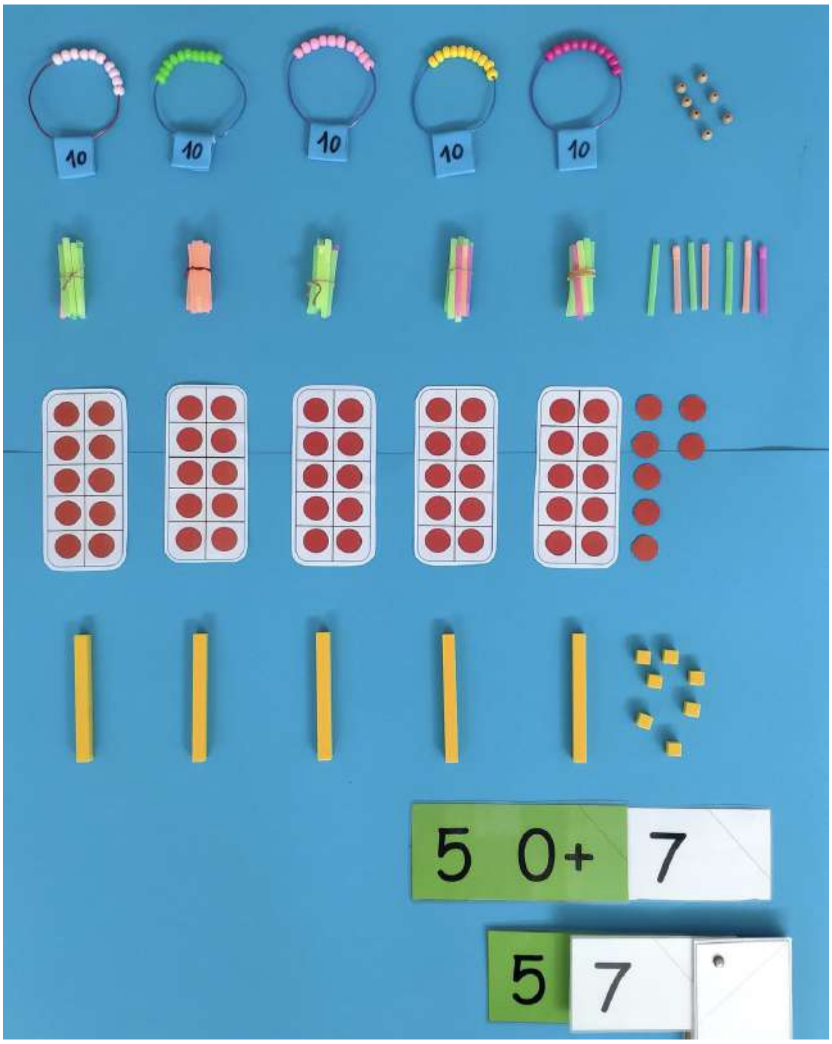

Figura 8: Diferentes formas de representação do número 57, que fomentam a composição/decomposição decimal.

No final de cada exploração e de modo a estimular a abstração, recomenda-se a escrita dos numerais no quadro de valor posicional (QVP), que permite a organização dos algarismos de acordo com as suas ordens, tal como se ilustra na Figura 9.

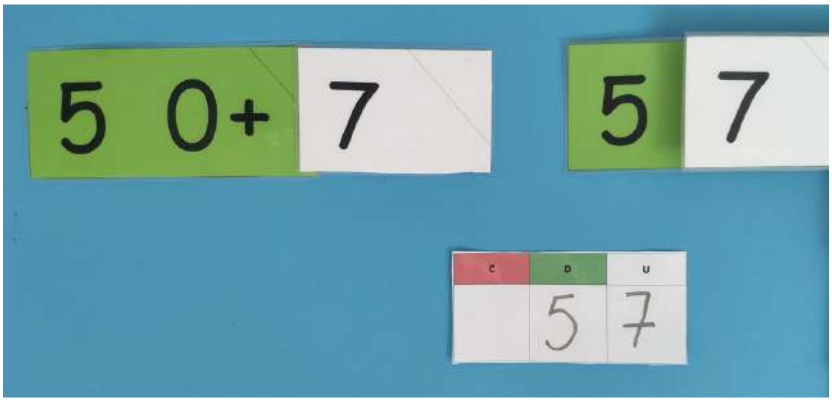

Figura 9: Registo do número 57 no quadro de valor posicional (QVP).

Pode-se desenvolver este tipo de exploração em sentido contrário. Parte-se no número 57. Decompõe-se o número, de acordo com as suas ordens, em 50 e 7. Em seguida, representam-se as cinco dezenas e as sete unidades, recorrendo a material diversificado (estruturado e não estruturado).

Também é importante explorar as diferentes possibilidades de reorganizar a decomposição decimal de um número, com enfoque numa determinada ordem. Vejamos um exemplo. Perante a representação do número 32 (Figura 10), com o auxílio de três molduras do 10, representativas das dezenas, e de dois círculos vermelhos isolados, representativos das unidades, convida-se o aluno a explorar todas as possíveis decomposições deste número que envolvem a reorganização das dezenas. Ilustra-se esta exploração na Figura 11.

Figura 10: Representação do número 32.

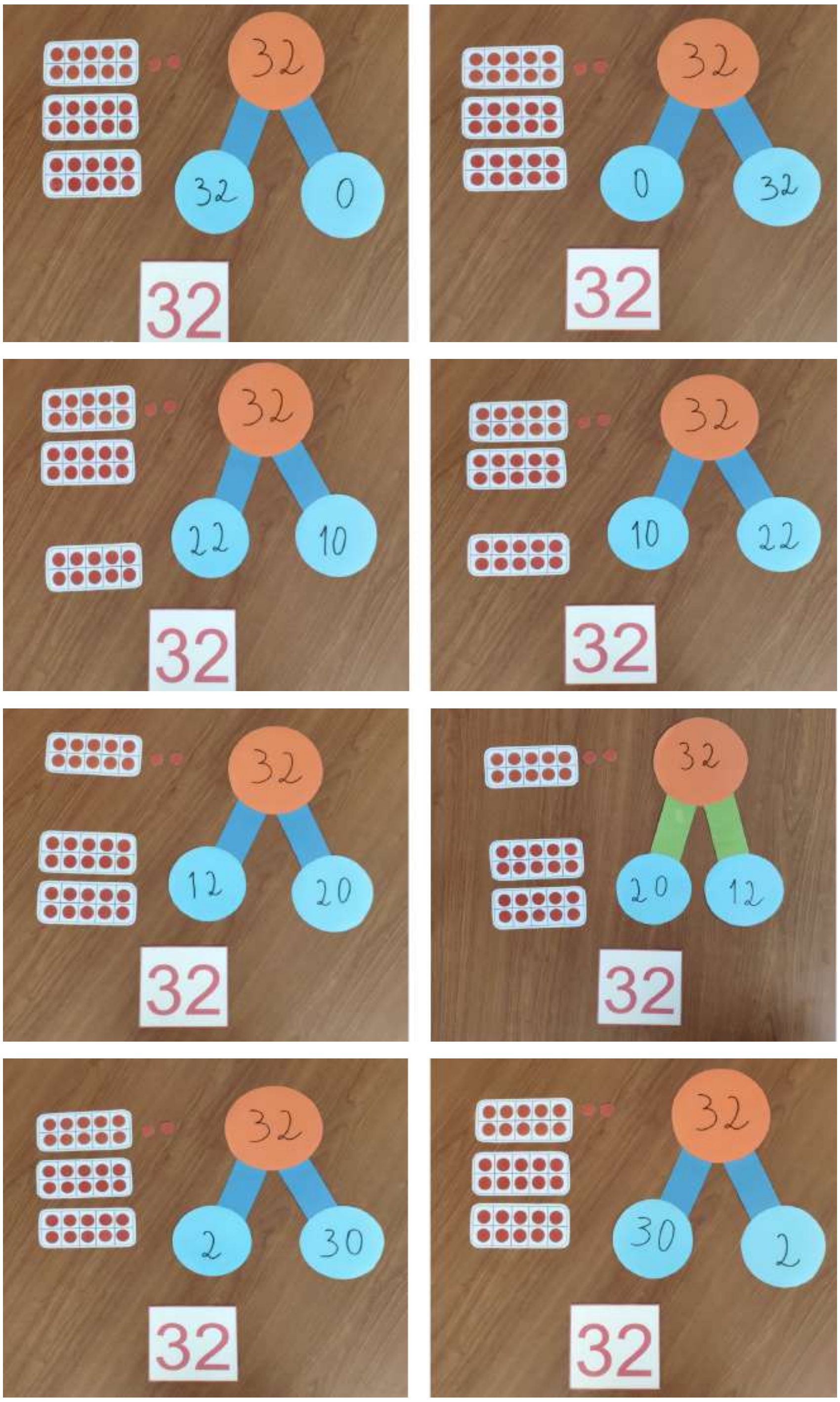

Figura 11: Exploração das diferentes decomposições do número 32 que envolvem a reorganização das dezenas, com recurso a esquemas todo-partes (ver, por exemplo, [17]) e com apelo à propriedade comutativa da adição.

As decomposições exemplificadas na Figura 11 permitem uma maior agilidade em termos de cálculo mental, desempenhando, por isso, um papel importante em algumas estratégias de cálculo, como ilustraremos mais à frente.

1.3 As primeiras estratégias de cálculo

O cálculo mental é extremamente importante para situações práticas da vida que exigem uma resposta rápida. Então, há que estimular o aluno a desenvolver as competências de cálculo de modo a promover uma compreensão profunda dos números e operações, que lhe permita resolver de forma correta e expedita as situações que surjam no quotidiano. Neste contexto, os discentes devem explorar, desde o 1.º ano de escolaridade, diferentes estratégias para desenvolver alguma destreza no cálculo mental.

Como o nosso sistema de numeração é um sistema decimal, o dez deve assumir um papel importante. Isto porque organizamos quantidades em grupos de dez, sendo que dez elementos de uma determinada ordem compõem um elemento da ordem seguinte (dez unidades compõem uma dezena, dez dezenas compõem uma centena, dez centenas compõem uma unidade de milhar e assim sucessivamente). Portanto, é importante explorar, desde cedo, as composições e decomposições envolvendo o 10 e as ordens numéricas, mobilizando o ato de compor/decompor na aplicação de estratégias de cálculo.

As primeiras estratégias de cálculo da adição e subtração devem envolver todas as decomposições dos números até 10 e a sua relação com a adição e a subtração (por exemplo, se 10 se decompõe em 4 e 6 então $4+6=10$, $6+4=10$, $10-6=4$ e $10-4=6$; ver [17]).

Logo em seguida, surgem naturalmente as estratégias com dois números naturais, sendo que um deles deve ter um só algarismo. Estas estratégias podem ser exploradas no 1.º ano de escolaridade, no contexto da caminhada dos números naturais até 100, com consolidação no início do 2.º ano de escolaridade.

As cinco estratégias em causa baseiam-se na natureza decimal do nosso sistema de numeração e desempenham uma papel estruturante nas estratégias de cálculo a explorar no 2.º ano de escolaridade, como iremos exemplificar mais à frente. Para já, analisamos as cinco estratégias: "Adicionar separando as dezenas", "Decompor e subtrair às unidades", "Adicionar compondo uma nova dezena", "Decompor e subtrair às dezenas" e "Retirar as unidades e subtrair o restante às dezenas".

Adicionar separando as dezenas

Tal como o nome indica, esta estratégia consiste em separar as dezenas das unidades, operando as unidades, que não são suficientes para compor uma nova dezena. A estratégia aplica-se quando uma das parcelas é superior a 10 e a outra é inferior a 10: separam-se as dezenas da parcela maior e adicionam-se as unidades dessa parcela que não estão compostas nas dezenas à parcela menor. Por fim, efetua-se a composição das dezenas com a soma obtida das unidades, como se ilustra nos exemplos das Figuras 12 e 13.

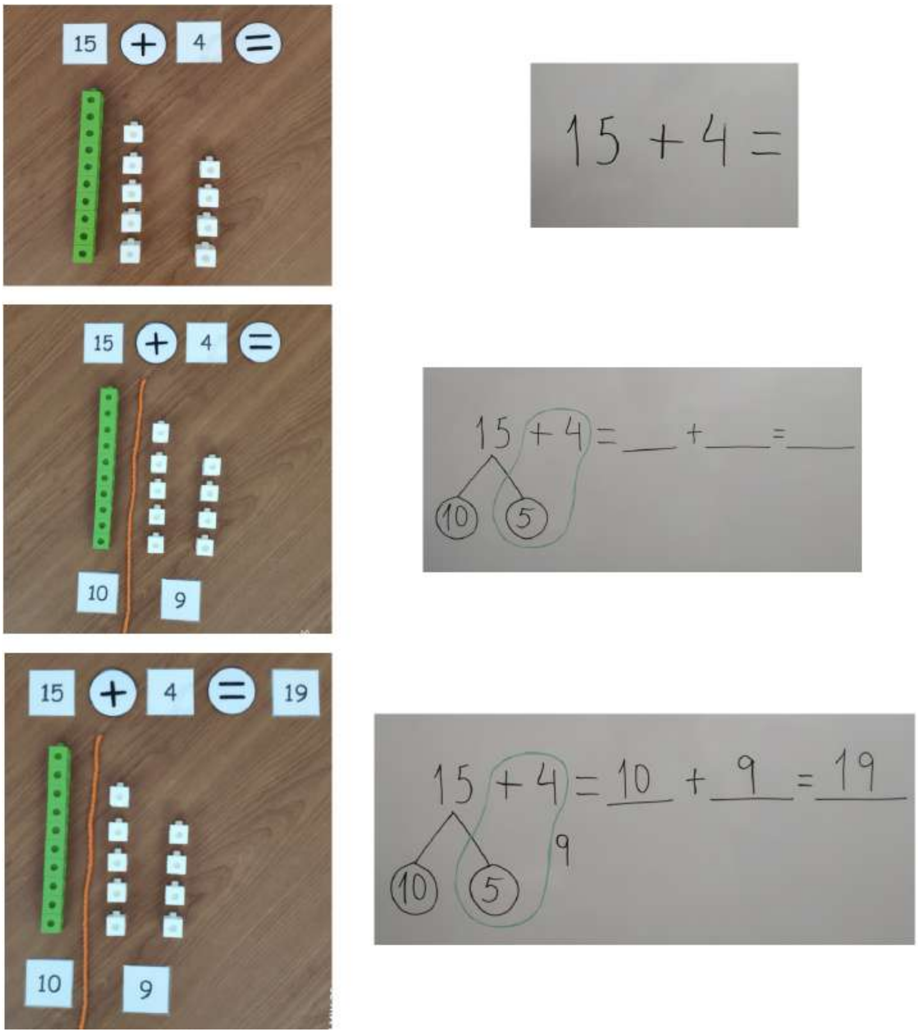

Figura 12: Exemplo de aplicação da estratégia de cálculo "Adicionar separando as dezenas". Decompõe-se 15 em 10 e 5. Adiciona-se 5 e 4, obtendo-se 9. Por fim, compõe-se 10 e 9, obtendo-se 19. Então, $15 + 4 = 19$.

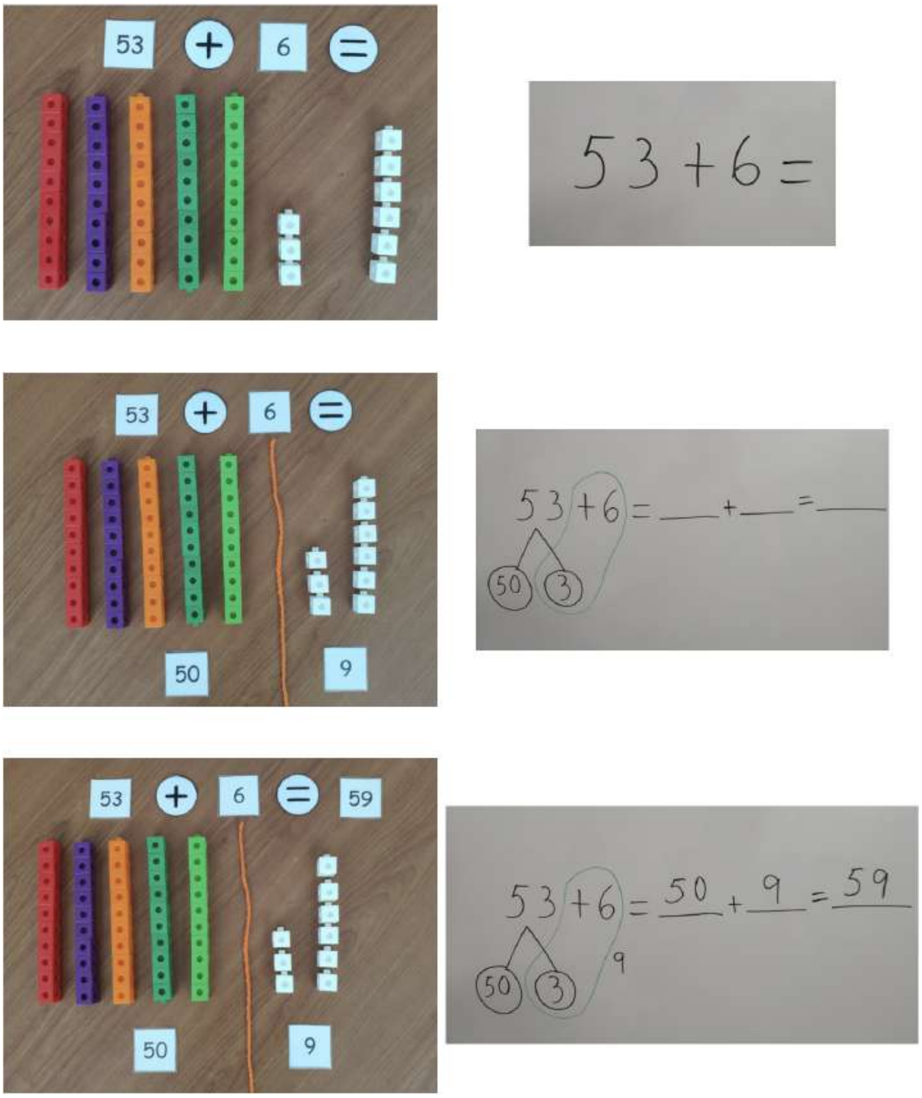

Figura 13: Exemplo de aplicação da estratégia de cálculo “Adicionar separando as dezenas”. Decompõe-se 53 em 50 e 3. Adiciona-se 3 e 6, obtendo-se 9. Por fim, compõe-se 50 e 9, obtendo-se 59. Então, $53 + 6 = 59$.

Decompor e subtrair às unidades

Esta estratégia aplica-se quando o aditivo é superior a 10 e o subtrativo é inferior a 10, sendo também inferior ou igual às unidades não compostas do aditivo. O objetivo é decompor o aditivo em dezenas e unidades, retirando o subtrativo às unidades decompostas do aditivo. Depois, efetua-se a composição das dezenas com a diferença das unidades obtida. Na Figura 14, apresenta-se um exemplo de aplicação desta estratégia.

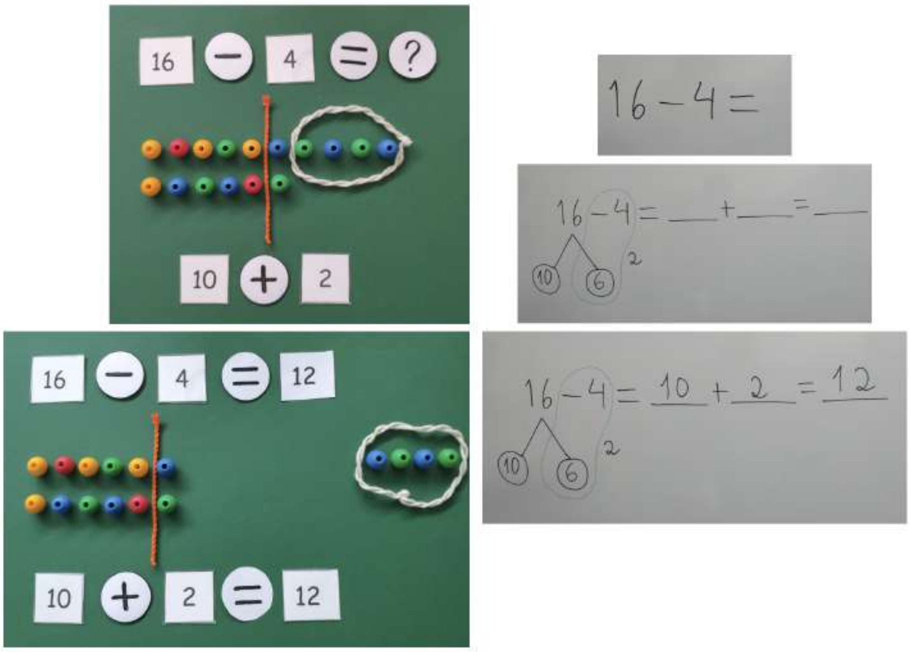

Figura 14: Exemplo de aplicação da estratégia de cálculo "Decompor e subtrair às unidades". Decompõe-se 16 em 10 e 6. Subtrai-se 4 e 6, obtendo-se 2. Por fim, compõe-se 10 e 2, obtendo-se 12. Então, $16 - 4 = 12$.

As estratégias "Adicionar separando as dezenas" e "Decompor e subtrair às unidades" apresentam a mesma dinâmica, sendo uma delas aplicada à adição e a outra à subtração. Além disso, podem ser exploradas em cadeia para recuperar um determinado número. Por exemplo, partimos do 17 e subtraímos 5 unidades, aplicando a estratégia "Decompor e subtrair às unidades", de acordo com os passos ilustrados na Figura 14. Obtemos 12. Em seguida, podemos aplicar a estratégia "Adicionar separando as dezenas", ilustrada na Figura 12, para adicionarmos 5 unidades a 12, obtendo 17 e recuperando, assim, o valor inicial. Em ambos os casos, as dezenas são separadas das unidades e opera-se apenas com as unidades que não estão compostas em dezenas (adicionando ou subtraindo essas unidades), não sendo necessário compor ou decompor dezenas.

Para a aplicação das duas estratégias é fundamental que os alunos mobilizem, de forma célere, as decomposições dos números até 10. Nos exemplos apresentados, mobilizam-se as decomposições do 9 em 5 e 4 (Figura 12) e em 3 e 6 (Figura 13) e do 6 em 4 e 2 (Figura 14).

Adicionar compondo uma nova dezena

Esta estratégia da adição aplica-se quando pelo menos uma das parcelas é inferior a 10 e o total de unidades não compostas em dezenas das duas parcelas é igual ou superior a 10, de modo a ser possível compor uma nova dezena. Primeiro identifica-se a parcela maior e verifica-se quantas unidades faltam para compor uma nova dezena, indo buscar as unidades em falta à parcela menor, por decomposição desta. Por fim, efetua-se a adição das dezenas com as restantes unidades da parcela que foi decomposta. Observe-se o exemplo apresentado na Figura 15.

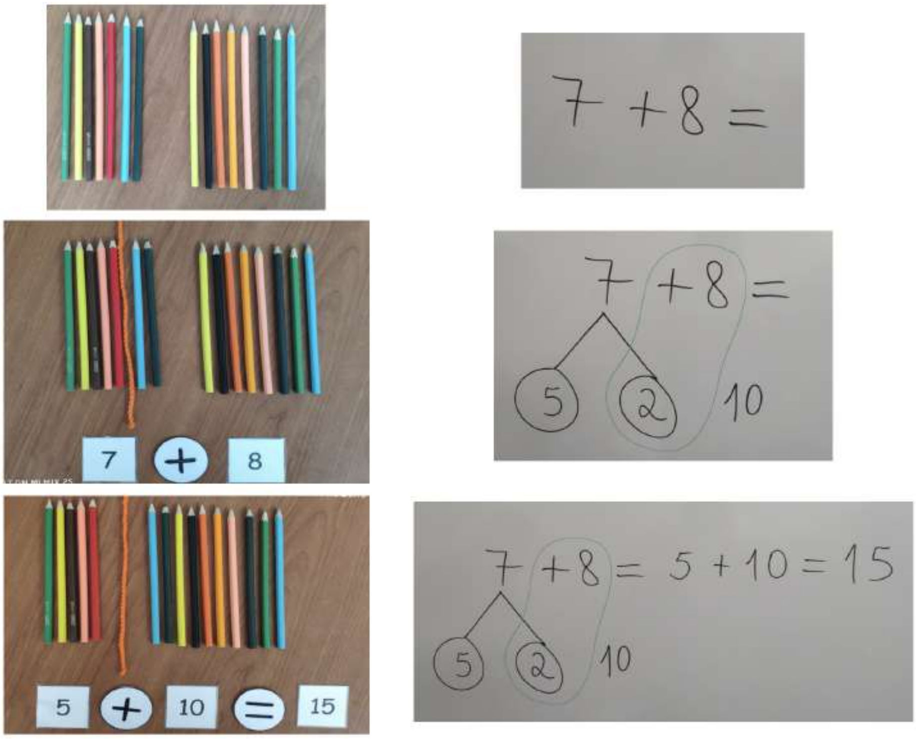

Figura 15: Exemplo de aplicação da estratégia de cálculo "Adicionar compondo uma nova dezena". Verifica-se que a parcela maior é o 8 e que faltam 2 unidades para fazer 10, ou seja, para compor uma dezena. Decompõe-se a parcela menor, o 7, em 5 e 2. De seguida, adiciona-se 8 e 2 para fazer 10. Por fim, adiciona-se a dezena obtida com as restantes unidades da parcela que foi decomposta, $5 + 10$, obtendo-se 15. Então, $7 + 8 = 15$.

Decompor e subtrair às dezenas

Esta estratégia aplica-se quando o aditivo é maior do que 10 e o subtrativo é menor do que 10, sendo superior às unidades do aditivo que não estão compostas nas dezenas. O objetivo desta estratégia é decompor o aditivo em dezenas e unidades. Depois, retira-se o subtrativo às dezenas pois não pode ser retirado às unidades. Por fim, efetua-se a composição da diferença obtida com as unidades decompostas do aditivo. A Figura 16 retrata um exemplo desta estratégia.

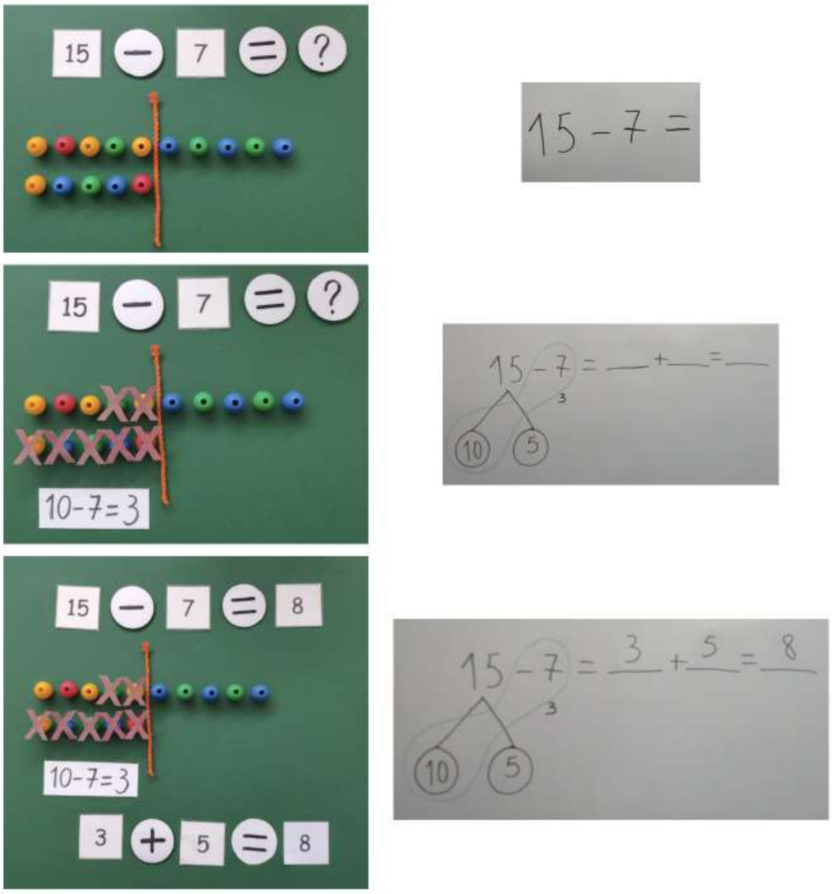

Figura 16: Exemplo de aplicação da estratégia de cálculo "Decompor e subtrair às dezenas". Decompõe-se 15 em 10 e 5. Não se pode retirar 7 unidades de 5 unidades. Então subtrai-se 7 a 10, obtendo-se 3. Por fim, compõe-se 3 e 5, obtendo-se 8. Então, $15 - 7 = 8$.

As estratégias "Adicionar compondo uma nova dezena" e "Decompor e subtrair às dezenas" apresentam a mesma dinâmica, sendo uma delas aplicada à adição e a outra à subtração. Também podem ser exploradas em cadeia para recuperar um determinado número. Por exemplo, partimos do 13 e subtraímos 8 unidades, aplicando a estratégia "Decompor e subtrair às dezenas", de acordo com os passos ilustrados na Figura 16. Obtemos 5. Em seguida, podemos aplicar a estratégia "Adicionar compondo uma nova dezena", ilustrada na Figura 15, para adicionarmos 8 unidades a 5, obtendo 13 e recuperando, portanto, o valor inicial. Em ambos os casos, as dezenas são separadas das unidades, sendo necessário compor ou decompor uma dezena.

Para a aplicação das duas estratégias continua a ser fundamental que os alunos mobilizem, de forma célere, as decomposições dos números até 10. Nos exemplos apresentados, mobilizam-se as decomposições do 10 em 8 e 2 e do 7 em 5 e 2 (Figura 15) e do 10 em 7 e 3 e do 8 em 3 e 5 (Figura 16).

Em seguida, analisamos uma estratégia alternativa à estratégia "Decompor e subtrair às dezenas", que se aplica nas mesmas situações.

Retirar as unidades e subtrair o restante às dezenas

Esta estratégia pode ser aplicada nas mesmas situações da anterior, ou seja, quando o aditivo é maior do que 10 e o subtrativo é menor do que 10, sendo superior às unidades do aditivo que não estão compostas nas dezenas. O objetivo desta estratégia consiste em retirar as unidades do aditivo que não estão compostas nas dezenas e subtrair o restante (a parte do subtrativo que ainda não foi retirada ao aditivo) às dezenas. A Figura 17 ilustra um exemplo de aplicação desta estratégia.

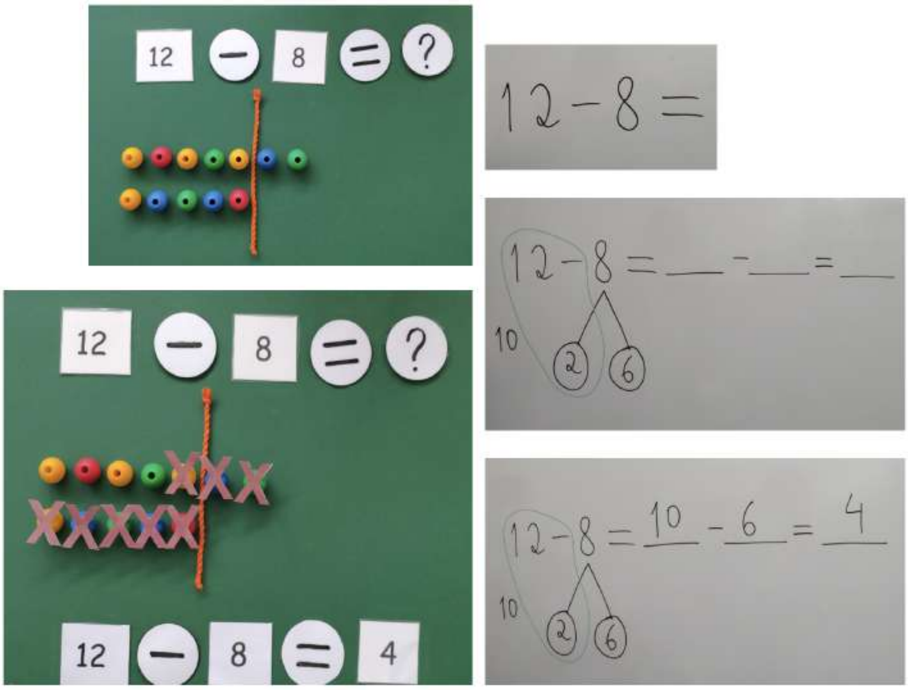

Figura 17: Exemplo de aplicação da estratégia de cálculo "Retirar as unidades e subtrair o restante às dezenas". Observa-se que o aditivo, 12, tem duas unidades que não estão compostas na dezena. Então decompõe-se o subtrativo, 8, em 2 e 6. Retiram-se as 2 unidades ao aditivo, ficando com 10. Falta subtrair 6 unidades a 10, obtendo-se 4. Então, $12 - 8 = 4$. Nesta estratégia, o subtrativo é decomposto em duas partes, sendo cada uma delas retirada, à vez, ao aditivo.

A aplicação desta estratégia requer novamente que os alunos mobilizem, de forma célere, as decomposições dos números até 10. Por exemplo, na situação apresentada na Figura 17 é necessário mobilizar as decomposições do 8 em 2 e 6 e do 10 em 6 e 4.

Em relação às três estratégias apresentadas para a subtração é de notar que as estratégias "Decompor e subtrair às unidades" e "Decompor e subtrair às dezenas" baseiam-se na decomposição do aditivo em dezenas e unidades, sendo o subtrativo subtraído, de uma só vez, a um dos valores decompostos, dependendo se o subtrativo é maior ou menor do que as unidades do aditivo que não estão compostas nas dezenas. Já em relação à estratégia "Retirar as unidades e subtrair o restante às dezenas", a decomposição principal é feita ao subtrativo, de modo a retirar as unidades do aditivo que não estão compostas em dezenas, subtraindo a parte do subtrativo que ainda falta retirar às dezenas do aditivo.

1.4 Factos básicos da adição e da subtração com números até 100

Através da exploração dos factos básicos, pretende-se que os alunos relacionem a adição e a subtração, enquanto operações inversas, envolvendo números naturais até 100.

Nas Figuras 18 a 21, ilustra-se um exemplo em que se relacionam três números (o todo e as partes) através da adição e da subtração. Estas explorações devem ter por base o trabalho prévio com os esquemas todo-partes e as decomposições de números até 10, como já foi referido anteriormente (ver [17]).

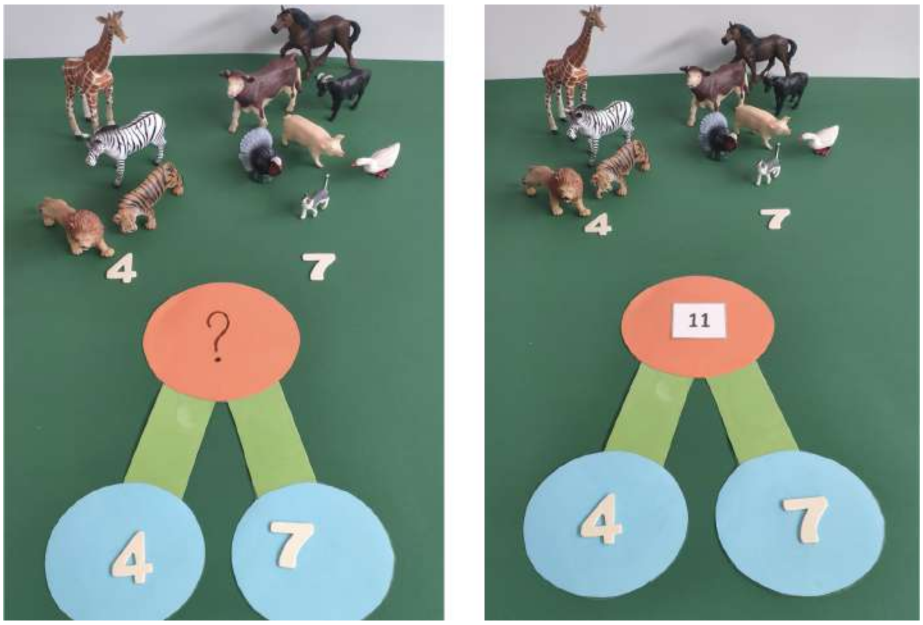

Figura 18: Há 4 animais selvagens e 7 animais domésticos. Quantos animais existem ao todo? Existem 11 animais ao todo. Logo, $4 + 7 = 11$. Também podemos dizer que há 7 animais domésticos e 4 animais selvagens e, portanto, 11 animais ao todo. Assim, também podemos escrever $7 + 4 = 11$. É de notar que as adições podem ser efetuadas aplicando a estratégia de cálculo "Adicionar compondo uma nova dezena". Verifica-se que a parcela maior é o 7 e que faltam 3 unidades para fazer 10, ou seja, para compor uma dezena. Decompõe-se a parcela menor, o 4, em 3 e 1. De seguida, adiciona-se 7 e 3 para fazer 10. Por fim, adiciona-se a dezena obtida com as restantes unidades da parcela que foi decomposta, neste caso, uma só unidade, $1 + 10$, obtendo-se 11.

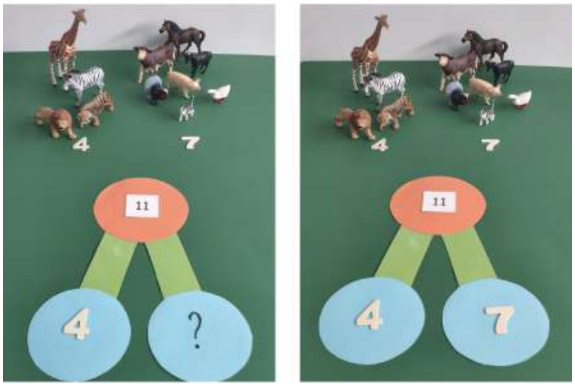

Figura 19: Há 11 animais, uns são selvagens e outros domésticos. Os animais selvagens são 4. Quantos são os animais domésticos? Os animais domésticos são 7. Logo, $11 - 4 = 7$. Esta subtração pode ser efetuada aplicando a estratégia de cálculo "Decompor e subtrair às dezenas". Decompõe-se 11 em 10 e 1. Não se pode retirar 4 unidades de 1 unidade. Então subtrai-se 4 a 10, obtendo-se 6. Por fim, compõe-se 6 e 1, obtendo-se 7. A subtração em causa também pode ser efetuada recorrendo à estratégia de cálculo "Retirar as unidades e subtrair o restante às dezenas". Observa-se que o aditivo, 11, tem uma unidade que não está composta na dezena. Então decompõe-se o subtrativo, 4, em 1 e 3. Retira-se a unidade ao aditivo, ficando com 10. Falta subtrair 3 unidades a 10, obtendo-se 7.

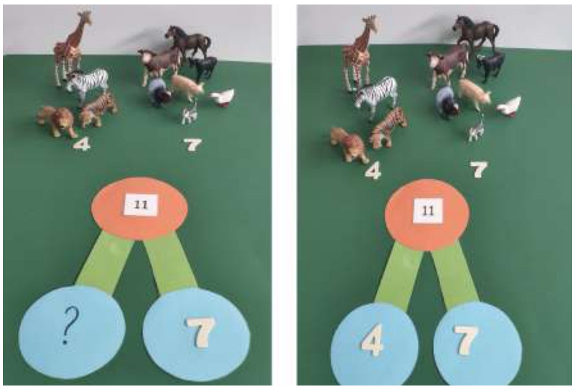

Figura 20: Há 11 animais, uns são selvagens e outros domésticos. Os animais domésticos são 7. Quantos são os animais selvagens? Os animais selvagens são 4. Logo, $11 - 7 = 4$. Esta subtração pode ser efetuada aplicando a estratégia de cálculo "Decompor e subtrair às dezenas". Decompõe-se 11 em 10 e 1. Não se pode retirar 7 unidades de 1 unidade. Então subtrai-se 7 a 10, obtendo-se 3. Por fim, compõe-se 3 e 1, obtendo-se 4. A subtração em causa também pode ser efetuada recorrendo à estratégia de cálculo "Retirar as unidades e subtrair o restante às dezenas". Observa-se que o aditivo, 11, tem uma unidade que não está composta na dezena. Então decompõe-se o subtrativo, 7, em 1 e 6. Retira-se a unidade ao aditivo, ficando com 10. Falta subtrair 6 unidades a 10, obtendo-se 4.

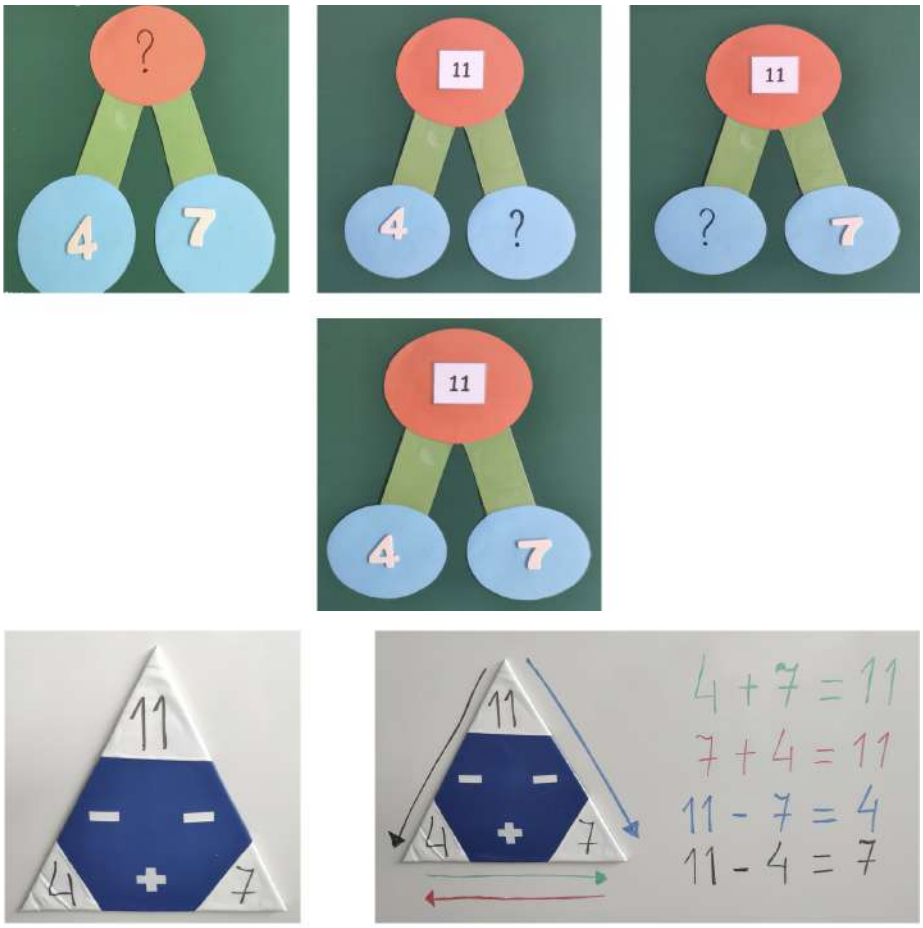

Figura 21: Registam-se os quatro factos básicos explorados, dois para a adição e dois para a subtração, com recurso ao esquema todo-partes e ao triângulo da adição e da subtração.

A dinâmica subjacente ao triângulo da adição e da subtração é a mesma do esquema todo-partes, pois ambos relacionam o todo e as duas partes através de quatro factos básicos recorrendo à adição e à subtração. Contudo, no triângulo representam-se os sinais das operações adição e subtração, o que facilita as leituras que conduzem aos quatro factos básicos, como se ilustra na Figura 21, com a indicação das setas coloridas.

As leituras do triângulo facilitam, portanto, a compreensão dos quatro factos básicos que relacionam um todo e duas partes através da adição e subtração. Importa também que os alunos se apercebam, em explorações futuras, que se calcularem um dos factos básicos, envolvendo um todo e duas partes, os restantes factos básicos deduzem-se de forma automática. Por exemplo, calculamos $8+7$ e obtemos 15 (podemos aplicar a estratégia "Adicionar compondo uma nova dezena"). Logo, se $8 + 7 = 15$ então também $15 - 7 = 8$. Em alternativa, podemos também calcular $15 - 8$, recorrendo a uma das estratégias "Decompor e subtrair às dezenas" ou "Retirar as unidades e subtrair o restante às dezenas", e obtemos 7. Logo, se $15-8=7$ então também $15-7=8$. Por conseguinte, é de grande relevância relacionar um todo e duas partes, articulando os quatro factos básicos (se adicionarmos as duas partes, independentemente da ordem, obtemos o todo; e se subtrairmos uma das partes ao todo obtemos a outra parte).

2 Requisitos prévios no contexto do 2.º ano

Como requisitos para o 2.º ano elegemos o reconhecimento do valor posicional dos algarismos e a exploração das composições/decomposições decimais e das leituras de números naturais até 1000. Os alunos devem ganhar destreza na construção dos números naturais, envolvendo três ordens, e no reconhecimento do valor posicional que cada ordem confere aos algarismos de 0 a 9. Seguem-se os exemplos das Figuras 22 a 25, com recurso a materiais diversificados.

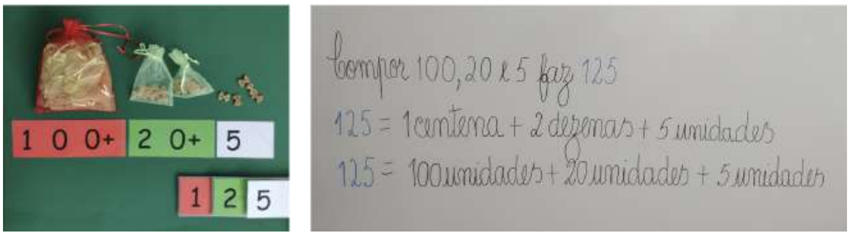

Figura 22: Utilizam-se massinhas e sacos transparentes e coloridos para ilustrar o valor posicional de cada algarismo. Os sacos verdes representam as dezenas, tendo dez massinhas/unidades cada um. Já o saco vermelho representa uma centena, por ser constituído por dez sacos verdes.

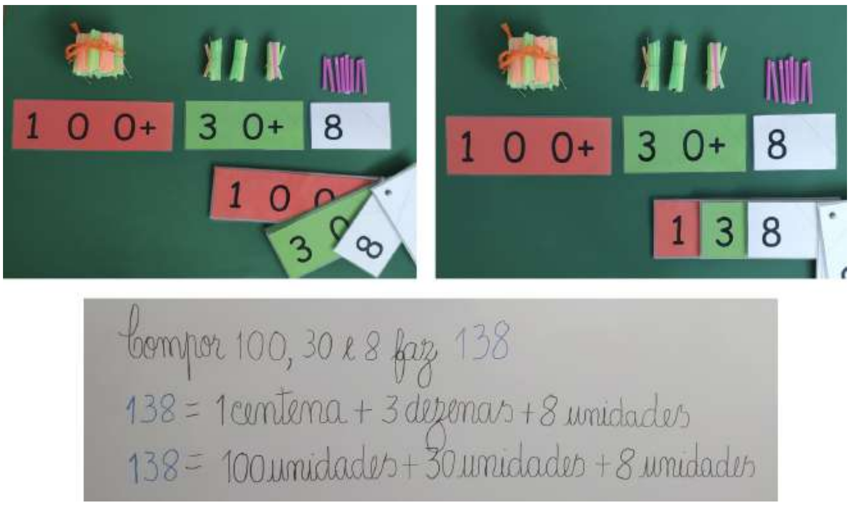

Figura 23: Neste segundo exemplo, utilizam-se palhinhas e cordões. Os molhos de 10 palhinhas/unidades representam as dezenas. Por sua vez, a centena é representada por um molho com dez molhos de 10 palhinhas.

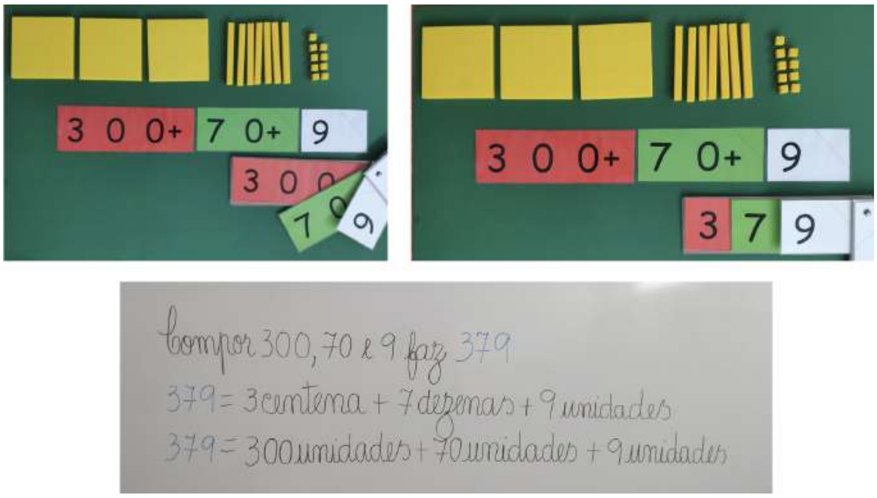

Figura 24: Neste terceiro exemplo, recorre-se a material estruturado, mais especificamente ao MAB. Os cubinhos representam as unidades, as barras (com 10 cubinhos cada) representam as dezenas e as placas (com 10 barras cada, ou seja, com 100 cubinhos cada) representam as centenas.

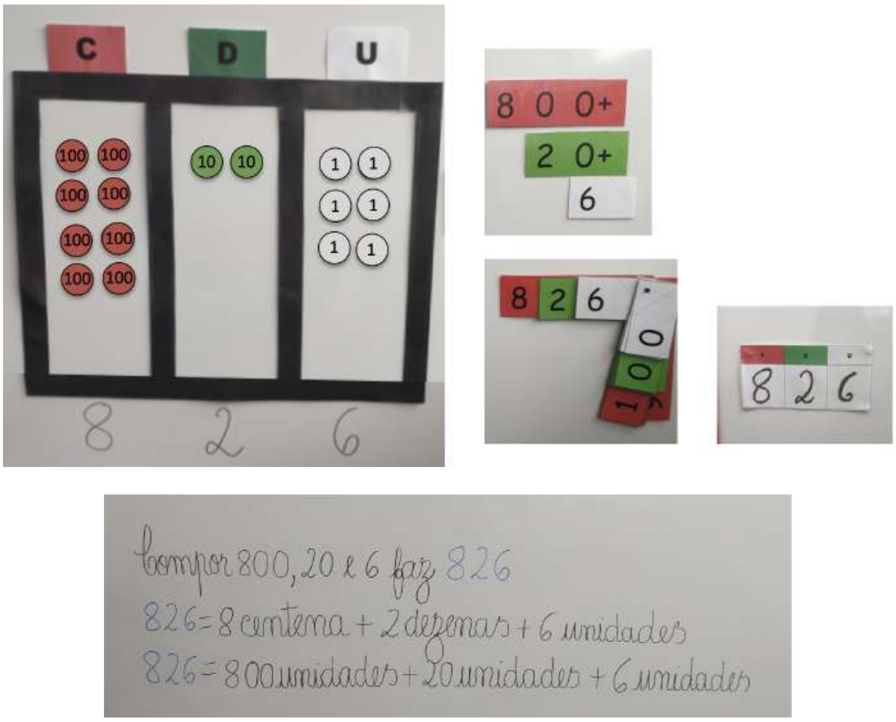

Figura 25: Neste quarto exemplo, recorre-se a outro material estruturado: os círculos de valor posicional dispostos no quadro de valor posicional. Todos os círculos têm o mesmo diâmetro. Os círculos das unidades são identificados com “1”, os das dezenas com “10” e os das centenas com “100”.

Os quatro exemplos apresentam um faseamento na caminhada rumo à abstração. Nos exemplos das Figuras 22 e 23 recorremos a material não estruturado, que os alunos reconhecem do quotidiano (massinhas e palhinhas), para representar as unidades, dezenas e centenas. Já no exemplo da Figura 24 recorremos a um material estruturado, o MAB. Nos três exemplos, é perfeitamente visível a identificação de cada dezena como grupo uno de dez unidades e de cada centena como grupo uno de dez dezenas, ou seja, de cem unidades. Já no exemplo da Figura 25, todos os círculos de valor posicional têm o mesmo diâmetro, pelo que deixa de ser possível identificar visualmente cada dezena como grupo uno de dez unidades e cada centena como grupo uno de cem unidades. Contudo, há uma característica dos círculos de valor posicional que justifica a pertinência da exploração deste material antes dos tradicionais ábacos verticais. De facto, os círculos de valor posicional distinguem-se não só pela cor (como acontece com as peças dos ábacos), mas também pelo rótulo que identifica as unidades que compõem as diferentes ordens numéricas ("1" para cada unidade; "10" para cada dezena e "100" para cada centena). Entendemos que este aspeto é importante por estimular um faseamento na caminhada rumo à abstração. Nesta ordem de ideias, recomenda-se o uso dos ábacos verticais depois da exploração com os círculos de valor posicional, uma vez que os ábacos já não apresentam os rótulos referidos. Na Figura 26 ilustra-se uma exploração com o ábaco vertical.

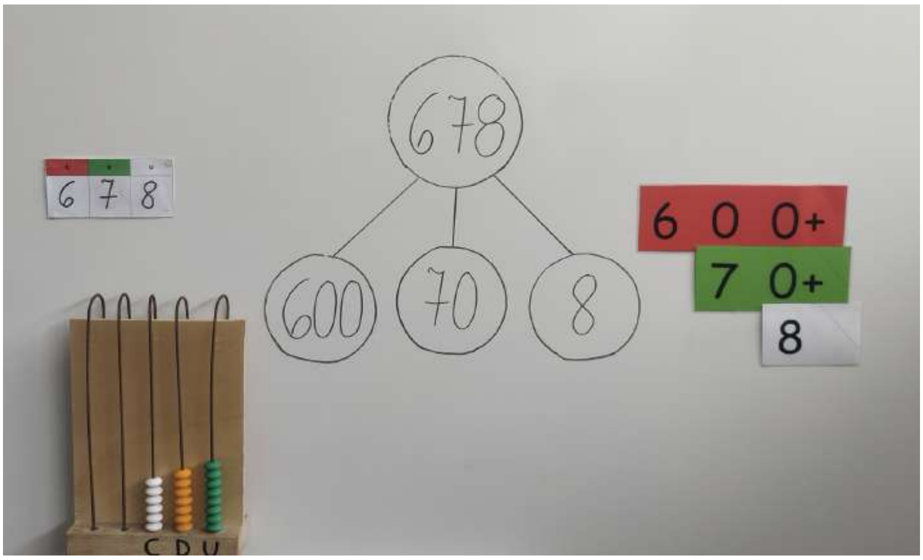

Figura 26: Neste quinto exemplo, recorre-se ao ábaco vertical, ao esquema todo-partes e às tiras de valor posicional.

Os círculos de valor posicional articulam-se muito bem com as tiras de valor posicional. Em todos os exemplos recorremos às tiras, que ajudam a identificar o valor posicional de cada algarismo, "mostrando os zeros" associados a cada ordem numérica. Existem outros dispositivos de algarismos móveis com a mesma dinâmica, como sejam os dispositivos em madeira (ver [8]). Na Figura 27, ilustra-se a composição/decomposição do número 826 com um dispositivo em madeira. Ainda relativamente ao número 826, apresentam-se diferentes leituras desse número nas Figuras 28 a 30, com o apoio das tiras de valor posicional.

Figura 27: Composição/decomposição do número 826 com recurso a um dispositivo de algarismos móveis em madeira (ver [8]).

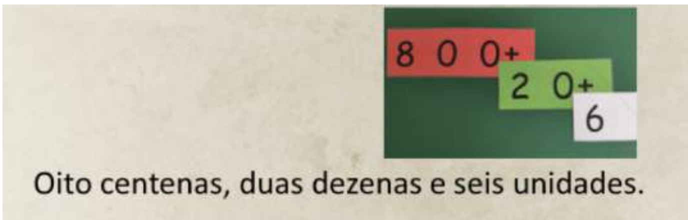

Figura 28: Leitura por ordens do número 826.

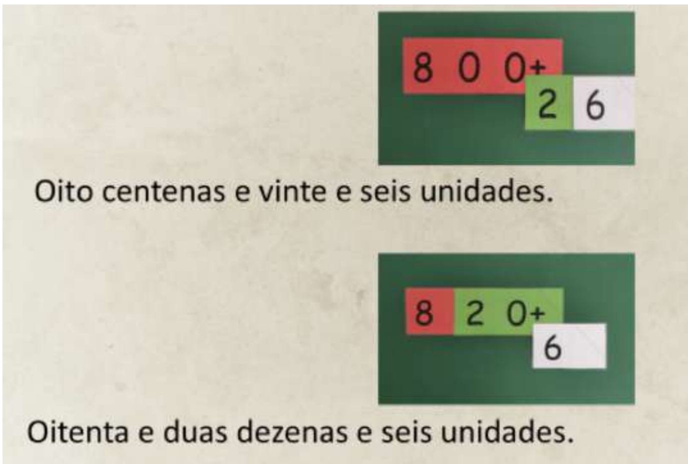

Figura 29: Leituras mistas do número 826, envolvendo duas ordens (a ordem das unidades e uma outra ordem).

Figura 30: Leitura por extenso do número 826.

A exploração da noção de valor posicional deve contemplar, de forma consistente, o trabalho com as diferentes leituras dos números. Em particular, as leituras por ordens e as leituras mistas constituem o reforço necessário para que o aluno pense na organização dos algarismos que compõem um número, atendendo ao valor que representam. As leituras mistas, tradicionalmente menos exploradas nas salas de aula, são leituras que envolvem duas ordens (a ordem das unidades e uma outra ordem). Estas leituras são importantes para que os alunos ganhem uma maior destreza em aprendizagens futuras, envolvendo nomeadamente estratégias de cálculo mental, os algoritmos e os arredondamentos. Vejam-se os exemplos das Figuras 31 a 33.

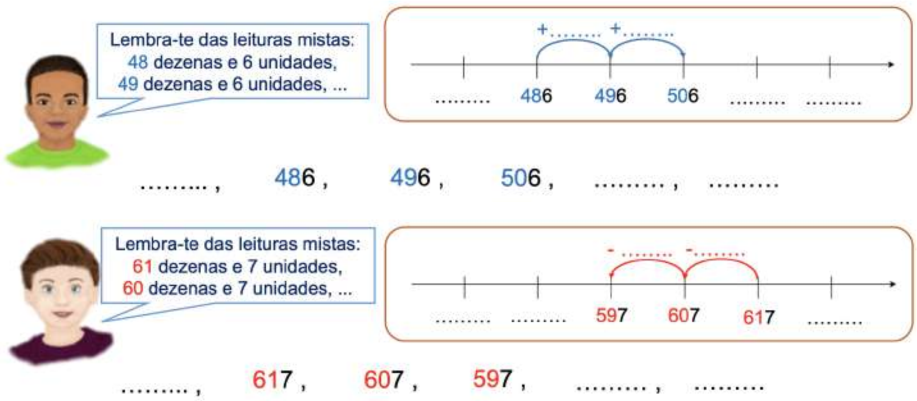

Figura 31: Determinação da lei de formação de duas sequências, partindo de uma leitura mista dos seus termos (exemplos adaptados de [12]).

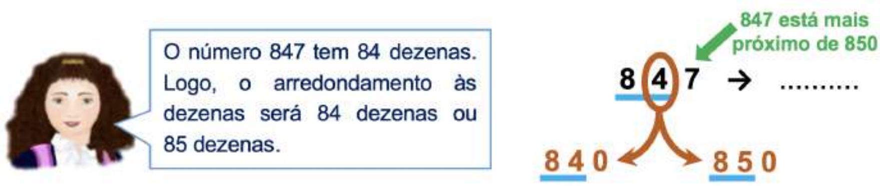

Figura 32: “Esquema do laço” para arredondar às dezenas o número 847, partindo do facto de o número ter 84 dezenas (exemplo retirado de [12]).

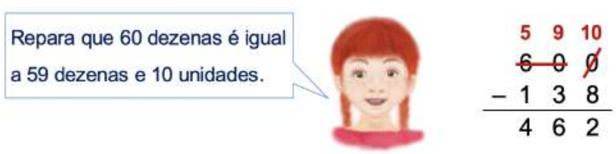

Figura 33: Aplicação do algoritmo da subtração por decomposição, partindo do facto de o subtrativo ter 60 dezenas (exemplo adaptado de [13]).

3 Teias de cálculo para a adição e subtração

Para efetuar um cálculo envolvendo a adição ou a subtração podemos recorrer a várias estratégias. Nesta secção, pretendemos sublinhar a importância das teias de cálculo no contexto das estratégias de cálculo da adição e subtração baseadas na natureza decimal do nosso sistema de numeração.

As teias de cálculo, tal como o nome sugere, baseiam-se num esquema que liga os números resultantes das decomposições decimais das parcelas, no caso de uma adição, ou do aditivo e do subtrativo, no caso de uma subtração. Os cálculos são efetuados à vez, ordem a ordem (começa-se pela ordem das unidades), compondo-se no final os resultados parciais. As teias permitem “pôr no papel” o raciocínio que normalmente fazemos quando operamos mentalmente. Vejam-se os exemplos da Figura 34.

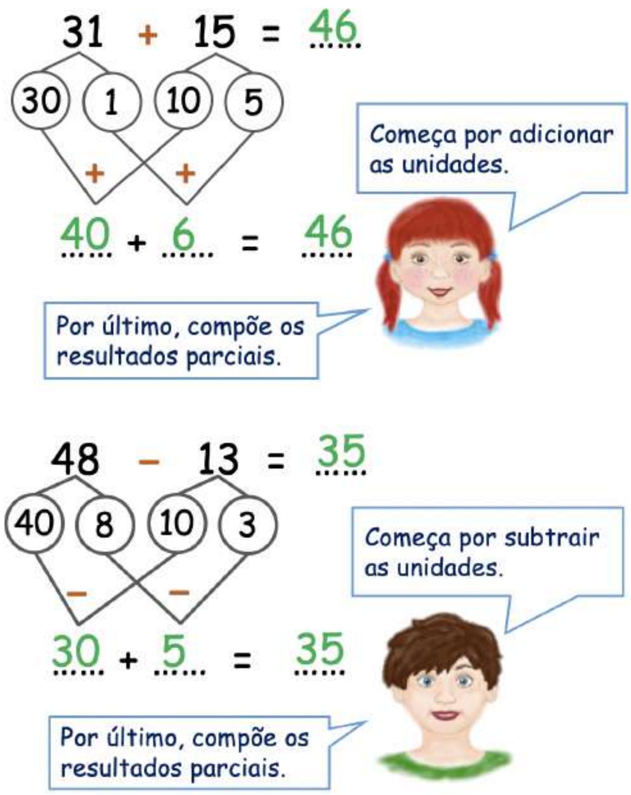

Figura 34: Exemplos de teias de cálculo adaptados de [11].

O registo das teias permite que o cálculo mental seja visualizado através de um esquema, o que estimula a compreensão dos procedimentos inerentes aos atos de adicionar e subtrair, facilitando a introdução posterior dos algoritmos destas duas operações. Neste contexto, é conveniente que, desde cedo, se crie o hábito de começar a operar pelas unidades, preparando os alunos para a fase dos algoritmos.

Na secção 1.3, analisámos estratégias de cálculo para a adição e subtração, envolvendo dois números naturais, em que pelo menos um deles tinha um só algarismo. As teias de cálculo constituem uma continuidade dessas estratégias, baseadas na natureza decimal do sistema de numeração, sendo particularmente úteis quando aplicadas a adições com as duas parcelas superiores a 10 e a subtrações com aditivo e subtrativo superiores a 10. As primeiras explorações podem incidir em números de dois algarismos, aumentando-se progressivamente o intervalo numérico.

As teias de cálculo requerem um registo esquemático que, com o passar do tempo, se espera deixe de ser necessário efetuar no papel e passe apenas a ser visualizado mentalmente. O trabalho em grupo com as teias de cálculo representa uma oportunidade para partilhar raciocínios e explicar procedimentos, o que potencia o desenvolvimento da comunicação matemática, bem como do raciocínio matemático dos alunos. De seguida, analisamos as diferentes situações que podem surgir na exploração das teias de cálculo, no contexto do 2.º ano de escolaridade.

3.1 Teias de cálculo para a adição sem composição

Começamos por explorar a aplicação de teias de cálculo envolvendo a adição sem composição. Apresentamos um primeiro exemplo de uma adição com parcelas de dois algarismos na Figura 35.

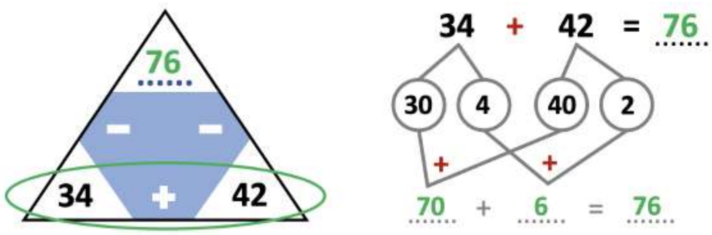

Figura 35: Decompõe-se 34 em 30 e 4 e 42 em 40 e 2. Adiciona-se 4 e 2, obtendo-se 6. Adiciona-se 30 e 40, obtendo-se 70 (por outras palavras, adiciona-se 3 dezenas e 4 dezenas, obtendo-se 7 dezenas). Por fim, há que compor os resultados parciais, 70 e 6, obtendo-se 76. Portanto, $34 + 42 = 76$. Faz-se o registo no triângulo da adição e da subtração.

No exemplo da Figura 36, a única alteração que se pode identificar em relação à teia anterior é o facto de a primeira parcela ter mais um algarismo. No entanto, o procedimento não se altera por esta razão. Assim, o aluno deverá decompor as parcelas, atendendo ao valor posicional de cada algarismo. Em seguida, pretende-se que seja esquematizado o raciocínio a aplicar, sendo que os valores posicionais dos algarismos de uma parcela devem ser ligados aos respetivos valores dos algarismos da outra parcela. Uma vez esquematizado o cálculo, os valores são adicionados, ordem a ordem, a começar pela ordem das unidades. Tal como no exemplo anterior, as adições parciais são adições sem composição, pelo que o procedimento fica facilitado. Por fim, os resultados parciais são compostos de modo a obter o resultado final da adição principal. Quando uma parcela tem mais algarismos do que a outra, os valores posicionais das ordens adicionais dessa parcela entram diretamente na composição final com os resultados parciais, de modo a se obter o resultado pretendido, como acontece no exemplo da Figura 36. Pode-se efetuar o registo no triângulo da adição e da subtração, identificando a operação usada (adição) e registando os valores envolvidos (parcelas e soma).

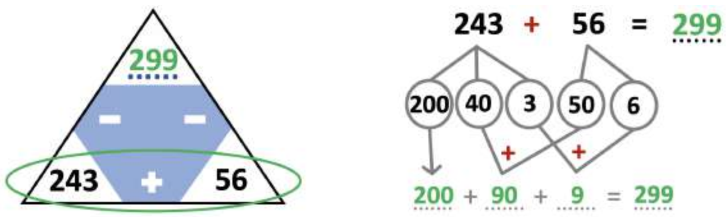

Figura 36: Decompõe-se 243 em 200, 40 e 3 e 56 em 50 e 6. Adiciona-se 3 e 6, obtendo-se 9. Adiciona-se 40 e 50, obtendo-se 90 (por outras palavras, adiciona-se 4 dezenas e 5 dezenas, obtendo-se 9 dezenas). Por fim, há que compor o 200 com os resultados parciais, 90 e 9, obtendo-se 299. Portanto, $243 + 56 = 299$. Faz-se o registo no triângulo da adição e da subtração.

Nas Figuras 37 e 38 , ilustram-se exemplos envolvendo duas parcelas com três algarismos, exemplos esses que seguem a mesma dinâmica dos anteriores.

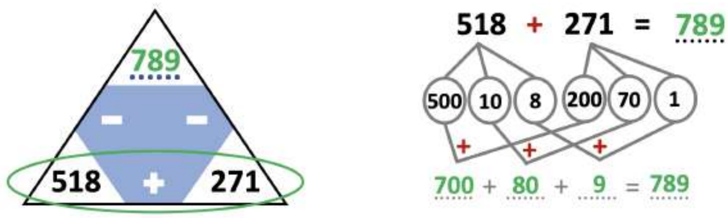

Figura 37: Decompõe-se 518 em 500, 10 e 8 e 271 em 200, 70 e 1. Adiciona-se 8 e 1, obtendo-se 9. Adiciona-se 10 e 70, obtendo-se 80 (por outras palavras, adiciona-se 1 dezena e 7 dezenas, obtendo-se 8 dezenas). Adiciona-se 500 e 200, obtendo-se 700 (por outras palavras, adiciona-se 5 centenas e 2 centenas, obtendo-se 7 centenas). Por fim, há que compor os resultados parciais, 700, 80 e 9, obtendo-se 789. Portanto, $518 + 271 = 789$. Faz-se o registo no triângulo da adição e da subtração.

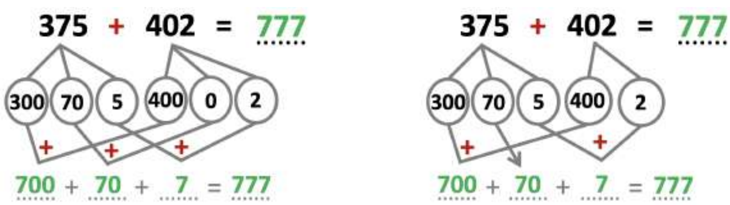

Figura 38: Duas possibilidades de aplicação da teia de cálculo quando surge o algarimo 0 em alguma das parcelas.

3.2 Teias de cálculo para a subtração sem decomposição

Para aplicar uma teia de cálculo a uma subtração, o aluno deve começar por decompor o aditivo e o subtrativo, atendendo ao valor posicional de cada algarismo. Em seguida, de modo a esquematizar o raciocínio a aplicar, os valores posicionais dos algarismos do aditivo devem ser ligados aos respetivos valores dos algarismos do subtrativo. Uma vez esquematizado o cálculo, os valores resultantes da decomposição do subtrativo são subtraídos aos relativos ao aditivo, ordem a ordem, a começar pela ordem das unidades. Por fim, os resultados parciais são compostos de modo a obter o resultado final da subtração principal. Pode-se efetuar o registo no triângulo da adição e da subtração, identificando a operação usada (subtração) e registando os valores envolvidos (aditivo, subtrativo e diferença).

Apresentamos, abaixo, exemplos envolvendo a subtração sem decomposição (ver Figuras 39 a 41).

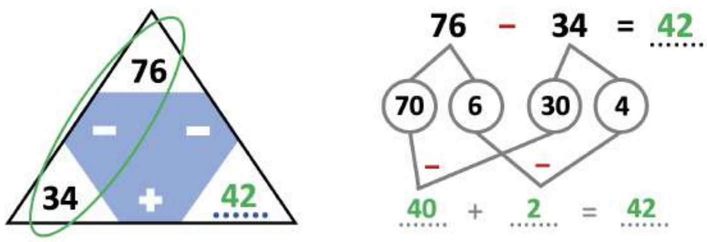

Figura 39: Decompõe-se 76 em 70 e 6 e 34 em 30 e 4. Subtrai-se 4 a 6, obtendo-se 2. Subtrai-se 30 a 70, obtendo-se 40 (por outras palavras, subtrai-se 3 dezenas a 7 dezenas, obtendo-se 4 dezenas). Por fim, há que compor os resultados parciais, 40 e 2, obtendo-se 42. Portanto, $76 - 34 = 42$. Faz-se o registo no triângulo da adição e da subtração.

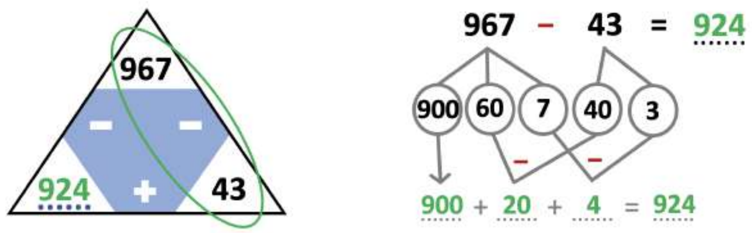

Figura 40: Decompõe-se 967 em 900, 60 e 7 e 43 em 40 e 3. Subtrai-se 3 a 7, obtendo-se 4. Subtrai-se 40 a 60, obtendo-se 20 (por outras palavras, subtrai-se 4 dezenas a 6 dezenas, obtendo-se 2 dezenas). Por fim, há que compor o 900 com os resultados parciais, 20 e 4, obtendo-se 924. Portanto, $967 - 43 = 924$. Faz-se o registo no triângulo da adição e da subtração.

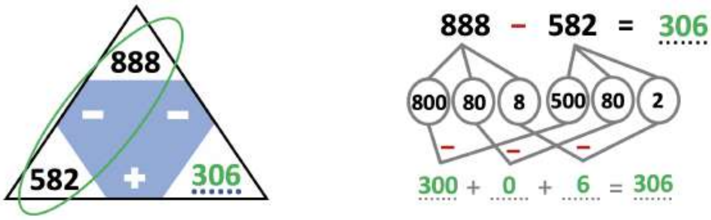

Figura 41: Decompõe-se 888 em 800, 80 e 8 e 582 em 500, 80 e 2. Subtrai-se 2 a 8, obtendo-se 6. Subtrai-se 80 a 80, obtendo-se 0 (por outras palavras, subtrai-se 8 dezenas a 8 dezenas, obtendo-se 0 dezenas). Subtrai-se 500 a 800, obtendo-se 300 (por outras palavras, subtrai-se 5 centenas a 8 centenas, obtendo-se 3 centenas). Por fim, há que compor os resultados parciais, 300, 0 e 6, obtendo-se 306. Portanto, $888 - 582 = 306$. Faz-se o registo no triângulo da adição e da subtração.

3.3 Teias de cálculo para a adição com composição

Seguem-se exemplos da adição com composição (ver Figuras 42 a 45).

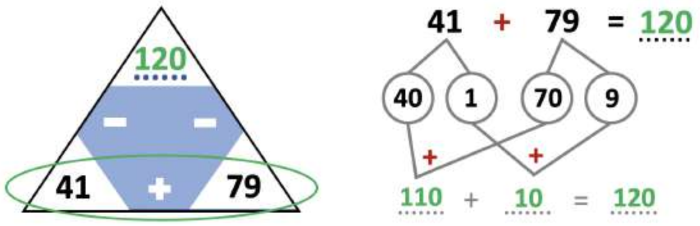

Figura 42: Decompõe-se 41 em 40 e 1 e 79 em 70 e 9. Adiciona-se 1 e 9, obtendo-se 10: há a composição de uma dezena. Adiciona-se 40 e 70, obtendo-se 110: há a composição de uma centena (por outras palavras, adiciona-se 4 dezenas e 7 dezenas, obtendo-se 11 dezenas; pode-se aplicar a estratégia ilustrada na Figura 15 para concluir que $4 + 7 = 11$). Por fim, há que compor os resultados parciais, 110 e 10, obtendo-se 120. Portanto, $41 + 79 = 120$.

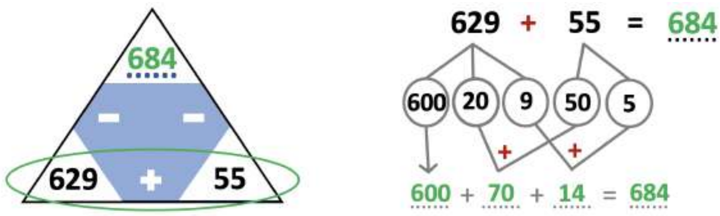

Figura 43: Decompõe-se 629 em 600, 20 e 9 e 55 em 50 e 5. Adiciona-se 9 e 5, obtendo-se 14: há a composição de uma dezena; pode-se aplicar a estratégia ilustrada na Figura 15 para concluir que $9 + 5 = 14$. Adiciona-se 20 e 50, obtendo-se 70 (por outras palavras, adiciona-se 2 dezenas e 5 dezenas, obtendo-se 7 dezenas). Por fim, há que compor o 600 com os resultados parciais, 70 e 14, obtendo-se 684. Portanto, $629 + 55 = 684$.

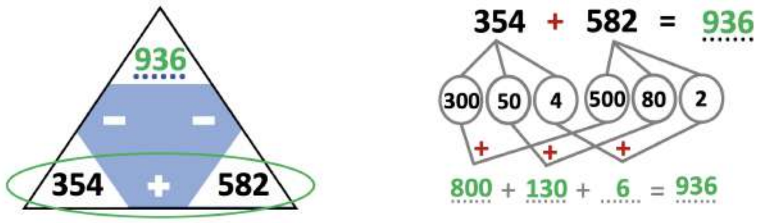

Figura 44: Decompõe-se 354 em 300, 50 e 4 e 582 em 500, 80 e 2. Adiciona-se 4 e 2, obtendo-se 6. Adiciona-se 50 e 80, obtendo-se 130: há a composição de uma centena (por outras palavras, adiciona-se 5 dezenas e 8 dezenas, obtendo-se 13 dezenas; também se pode aplicar a estratégia ilustrada na Figura 15 para concluir que $5 + 8 = 13$). Adiciona-se 300 e 500, obtendo-se 800 (por outras palavras, adiciona-se 3 centenas e 5 centenas, obtendo-se 8 centenas). Por fim, há que compor os resultados parciais, 800, 130 e 6, obtendo-se 936. Desta forma, conclui-se que $354 + 582 = 936$.

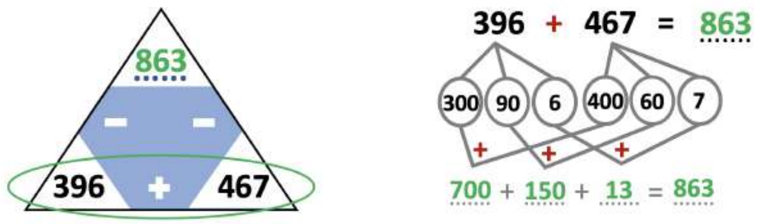

Figura 45: Decompõe-se 396 em 300, 90 e 6 e 467 em 400, 60 e 7. Adiciona-se 6 e 7, obtendo-se 13: há a composição de uma dezena; pode-se aplicar a estratégia ilustrada na Figura 15 para concluir que $6 + 7 = 13$. Adiciona-se 90 e 60, obtendo-se 150: há a composição de uma centena (por outras palavras, adiciona-se 9 dezenas e 6 dezenas, obtendo-se 15 dezenas; também se pode aplicar a estratégia ilustrada na Figura 15 para concluir que $9 + 6 = 15$). Adiciona-se 300 e 400, obtendo-se 700 (por outras palavras, adiciona-se 3 centenas e 4 centenas, obtendo-se 7 centenas). Por fim, há que compor os resultados parciais, 700, 150 e 13, obtendo-se 863. Desta forma, conclui-se que $396 + 467 = 863$.

Quando aplicamos uma teia de cálculo a uma adição, com ou sem composição, e queremos efetuar o cálculo das adições parciais, apenas precisamos conhecer todas as decomposições dos números até 10 e a estratégia de cálculo ilustrada na Figura 15, quando a soma dos algarismos correspondentes ultrapassa 10.

Estas são, precisamente, as ferramentas necessárias para aplicarmos com sucesso o algoritmo da adição, pelo que o trabalho prévio com as teias de cálculo desempenha um papel relevante, com a vantagem de se "visualizarem os zeros", ou seja, o valor posicional de cada algarismo, o que estimula a compreensão do nosso sistema de numeração, um sistema decimal e posicional.

3.4 Teias de cálculo para a subtração com decomposição

Por seu turno, numa teia de cálculo envolvendo uma subtração, com ou sem decomposição, para efetuarmos o cálculo das subtrações parciais, é suficiente conhecermos todas as decomposições dos números até 10 e usarmos, sempre que surja a necessidade de uma decomposição, duas ferramentas: a reorganização da decomposição decimal de um número (ilustrada nos exemplos da Figura 11) e uma das duas estratégias de cálculo ilustradas nas Figuras 16 e 17. Estas também são as ferramentas necessárias para aplicarmos com sucesso o algoritmo da subtração por decomposição, pelo que o trabalho prévio com as teias de cálculo constituiu uma aposta na promoção da compreensão.

Nas Figuras 46 a 50, ilustramos exemplos da subtração com decomposição.

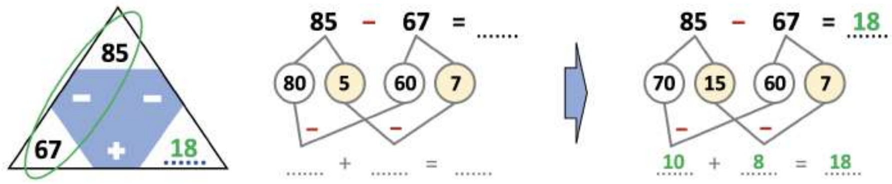

Figura 46: Começa-se naturalmente por decompor 85 em 80 e 5 e 67 em 60 e 7. Contudo, não é possível retirar 7 unidades de 5 unidades. Sendo assim, decompõe-se 85 em 70 e 15, atendendo ao trabalho prévio com as diferentes decomposições de um número envolvendo a reorganização das dezenas (exploração ilustrada na Figura 11). Subtrai-se 7 a 15, obtendo-se 8: há a decomposição de uma dezena; pode-se aplicar a estratégia ilustrada na Figura 16 ou a estratégia ilustrada na Figura 17 para concluir que $15-7=8$. Subtrai-se 60 a 70, obtendo-se 10 (por outras palavras, subtrai-se 6 dezenas a 7 dezenas, obtendo-se 1 dezena). Por fim, há que compor os resultados parciais, 10 e 8, obtendo-se 18. Portanto, $85-67=18$.

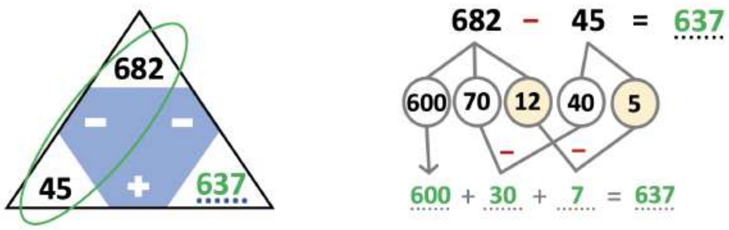

Figura 47: Não é possível retirar 5 unidades de 2 unidades. Então decompõe-se 682 em 600, 70 e 12 e 45 em 40 e 5. Subtrai-se 5 a 12, obtendo-se 7: há a decomposição de uma dezena; pode-se aplicar a estratégia ilustrada na Figura 16 ou a estratégia ilustrada na Figura 17 para concluir que $12-5=7$. Subtrai-se 40 a 70, obtendo-se 30 (por outras palavras, subtrai-se 4 dezenas a 7 dezenas, obtendo-se 3 dezenas). Por fim, há que compor o 600 com os resultados parciais, 30 e 7, obtendo-se 637. Portanto, $682-45=637$.

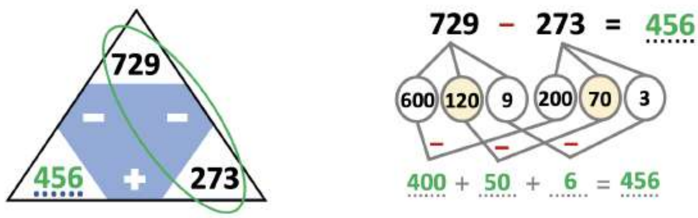

Figura 48: Neste exemplo, não é possível retirar 7 dezenas de 2 dezenas. Então decompõe-se 729 em 600, 120 e 9 e 273 em 200, 70 e 3. Subtrai-se 3 a 9, obtendo-se 6. Subtrai-se 70 a 120, obtendo-se 50: há a decomposição de uma centena (por outras palavras, subtrai-se 7 dezenas a 12 dezenas, obtendo-se 5 dezenas; pode-se aplicar a estratégia ilustrada na Figura 16 ou a estratégia ilustrada na Figura 17 para concluir que $12 - 7 = 5$). Subtrai-se 200 a 600, obtendo-se 400 (por outras palavras, subtrai-se 2 centenas a 6 centenas, obtendo-se 4 centenas). Por fim, há que compor os resultados parciais, 400, 50 e 6, obtendo-se 456. Portanto, $729 - 273 = 456$.

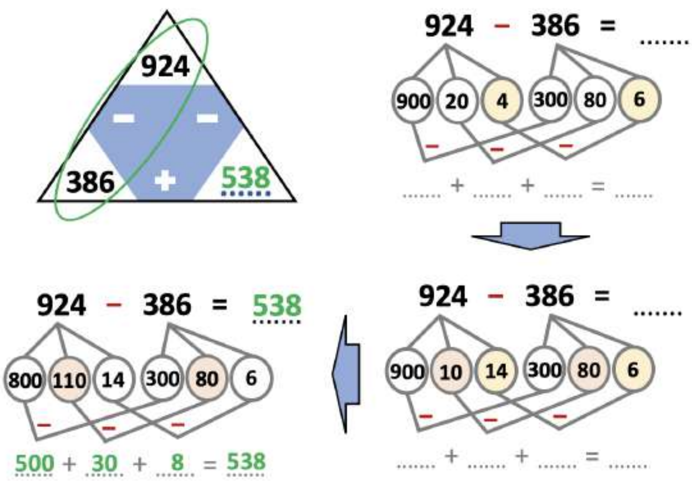

Figura 49: Ilustra-se o raciocíno que conduz à decomposição de 924 em 800, 110 e 14. Não é possível retirar 6 unidades de 4 unidades, o que conduz à decomposição de 924 em 900, 10 e 14. Contudo, como também não é possível retirar 8 dezenas de 1 dezena, reorganiza-se a decomposição do 924 em 800, 110 e 14. Então decompõe-se 924 em 800, 110 e 14 e 386 em 300, 80 e 6. Subtrai-se 6 a 14, obtendo-se 8: há a decomposição de uma dezena; pode-se aplicar a estratégia ilustrada na Figura 16 ou a estratégia ilustrada na Figura 17 para concluir que $14 - 6 = 8$. Subtrai-se 80 a 110, obtendo-se 30: há a decomposição de uma centena (por outras palavras, subtrai-se 8 dezenas a 11 dezenas, obtendo-se 3 dezenas; pode-se aplicar a estratégia ilustrada na Figura 16 ou a estratégia ilustrada na Figura 17 para concluir que $11 - 8 = 3$). Subtrai-se 300 a 800, obtendo-se 500 (por outras palavras, subtrai-se 3 centenas a 8 centenas, obtendo-se 5 centenas). Por fim, há que compor os resultados parciais, 500, 30 e 8, obtendo-se 538. Portanto, $924 - 386 = 538$.

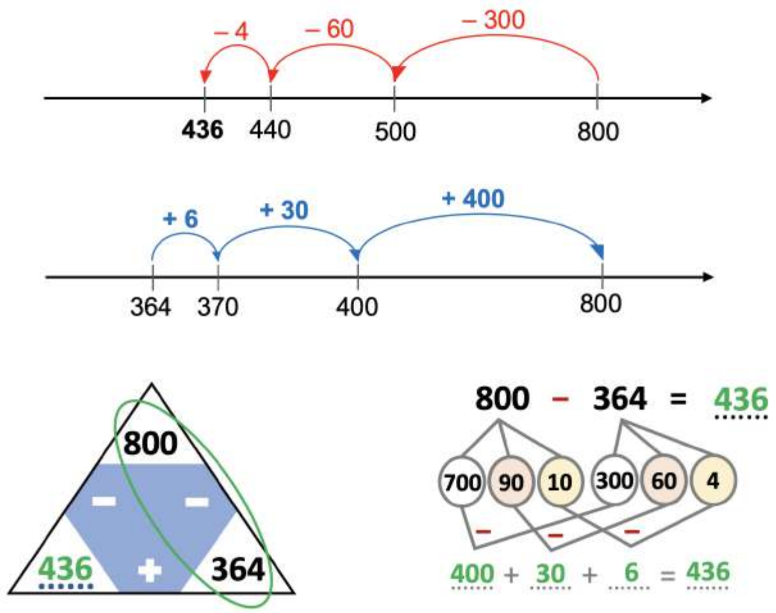

Figura 50: Apresenta-se o último exemplo, em que se pretende calcular $800-364$. Neste tipo de cálculo, recorre-se normalmente à reta não graduada, aplicando uma das seguintes estratégias: marca-se o 800 na reta e subtrai-se 364 (a subtração pode ser feita de acordo com a decomposição decimal do 364, como se ilustra na imagem de cima), obtendo-se a diferença 436, ou, em alternativa, marca-se o 364 e o 800 na reta e determina-se o número que é preciso adicionar ao 364 para obter o 800 (esta etapa também pode ser feita de forma faseada, como se ilustra na imagem do meio), obtendo-se como resposta o 436. Contudo, também é possível aplicar uma teia de cálculo, com alguma destreza, fazendo a decomposição do 800 em 700 e 100 e, em seguida, do 100 em 90 e 10. Sendo assim, de acordo com a imagem de baixo, decompõe-se 800 em 700, 90 e 10 e 364 em 300, 60 e 4. Subtrai-se 4 a 10, obtendo-se 6. Subtrai-se 60 a 90, obtendo-se 30 (por outras palavras, subtrai-se 6 dezenas a 9 dezenas, obtendo-se 3 dezenas). Subtrai-se 300 a 700, obtendo-se 400 (por outras palavras, subtrai-se 3 centenas a 7 centenas, obtendo-se 4 centenas). Por fim, há que compor os resultados parciais, 400, 30 e 6, obtendo-se 436. Portanto, $800 - 364 = 436$.

Apresentadas as diferentes situações envolvendo a adição e a subtração, podemos concluir que as teias de cálculo constituem uma mais-valia no desenvolvimento do cálculo mental, particularmente por tirarem partido da natureza decimal e posicional do nosso sistema de numeração. Numa teia de cálculo, os valores posicionais dos algarismos são ligados, de acordo com as respetivas ordens. Em seguida, os cálculos são efetuados à vez, ordem a ordem (começa-se pela ordem das unidades), compondo-se no final os resultados parciais. Espera-se que, com o passar do tempo, deixe de ser necessário efetuar o registo esquemático das teias no papel, passando esse procedimento a ser visualizado mentalmente. O trabalho prévio com as teias de cálculo estimula, portanto, a compreensão dos procedimentos aplicados nos algoritmos da adição e subtração, facilitando a sua compreensão. Justifica-se, assim, um investimento assertivo nas teias de cálculo.

4 Tarefas lúdicas com teias de cálculo

Terminamos com quatro propostas de tarefas lúdicas envolvendo a aplicação de teias de cálculo. As tarefas foram exploradas pelos autores nas sessões "Matemática Passo a Passo", do 2.º ano de escolaridade, da temporada 2 do programa "Aprender em Casa", da RTP Açores (disponíveis, à data de publicação deste artigo, na RTP Play).

4.1 Mensagens secretas

Neste tipo de dinâmica, os alunos são desafiados a descobrir uma mensagem secreta, estabelecendo para isso uma correspondência entre números e letras, de modo a completar a mensagem de forma gradual. Logicamente, a números iguais correspondem letras iguais. O que aqui apresentamos é apenas um exemplo (ver Figuras 51 a 55), pois as expressões poderão ser adaptadas, bem como a mensagem. A ideia, no entanto, é escolher uma mensagem que possa proporcionar alguma reflexão acerca de um determinado assunto, de modo que se consiga aliar o jogo ao debate sobre assuntos eventualmente importantes, por intermédio da aplicação de ferramentas matemáticas (neste caso, as teias de cálculo).

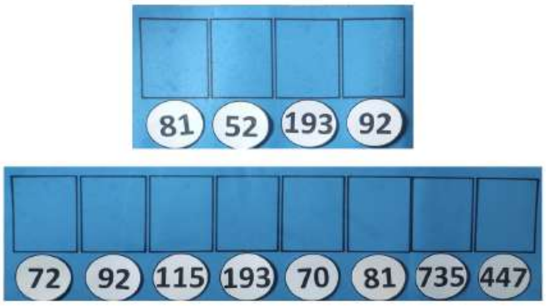

Figura 51: A mensagem secreta que se apresenta como desafio.

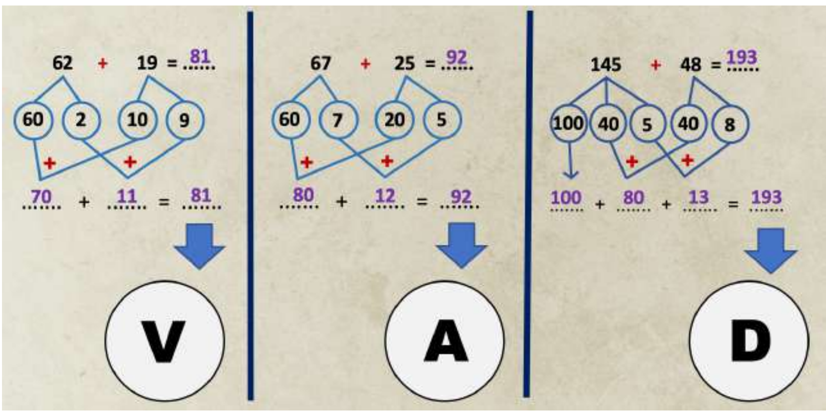

Figura 52: Aplicação de três teias de cálculo de modo a descobrir quais os números que correspondem às letras V, A e D.

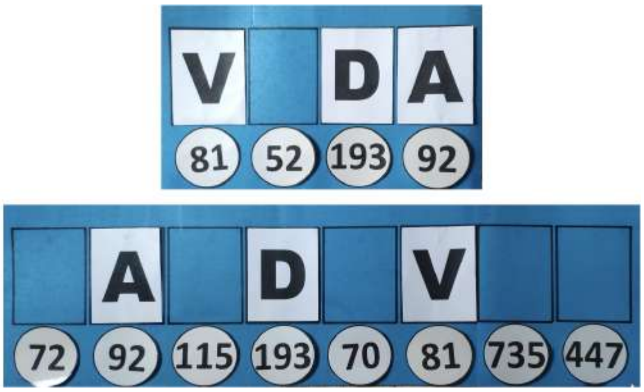

Figura 53: Colocam-se as letras V, A e D na mensagem, de acordo com os valores obtidos nos cálculos anteriores.

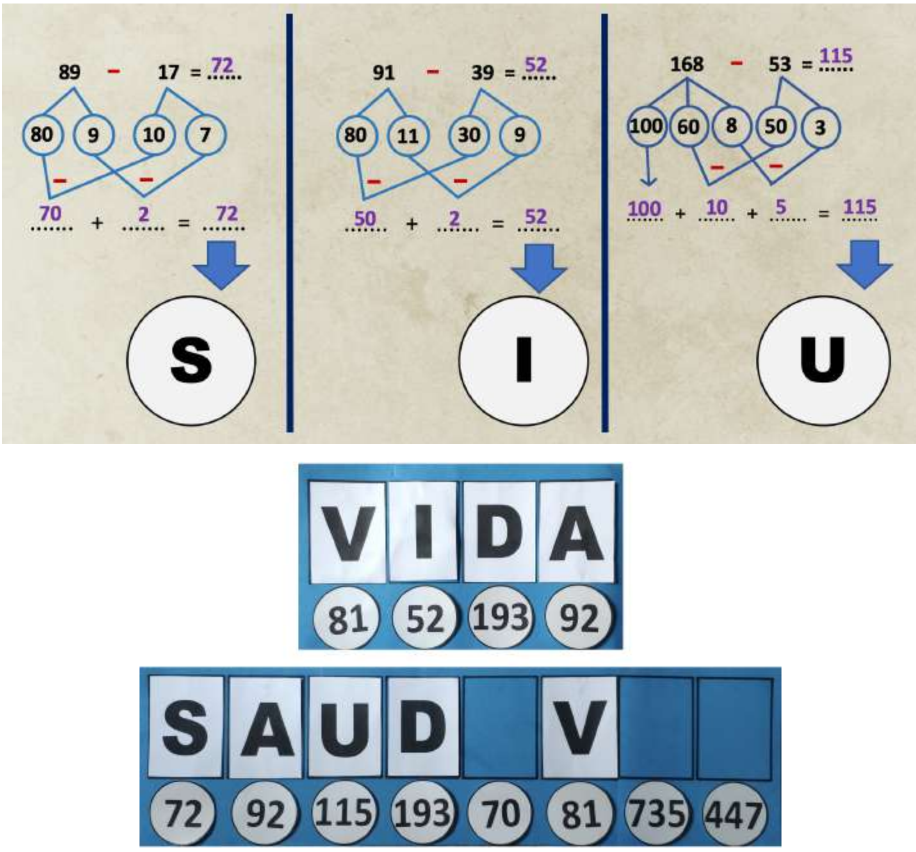

Figura 54: Aplicação de mais três teias de cálculo para descobrir os números que correspondem às letras S, I e U. Colocam-se as letras na mensagem, nas posições correspondentes.

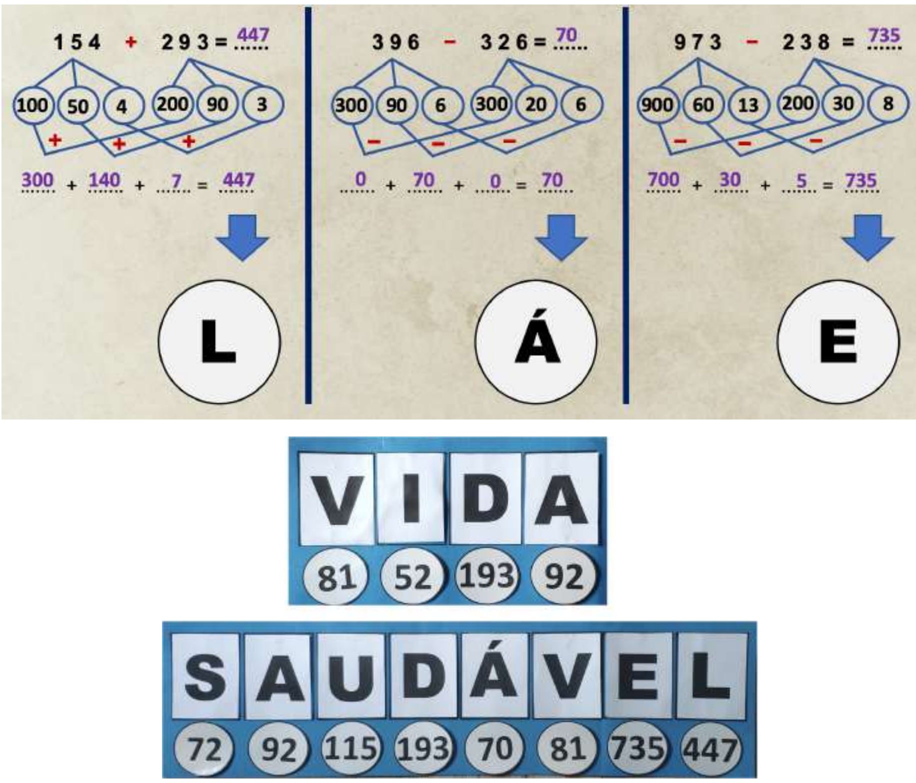

Figura 55: Aplicação de três teias de cálculo para descobrir os números que correspondem a L, Á e E (optou-se por atribuir números diferentes às letras acentuadas). Colocam-se as últimas letras na mensagem.

4.2 Muros de cálculo

Os muros de cálculo constituem uma dinâmica interessante de exploração das teias de cálculo e, mais tarde, dos algoritmos da adição e da subtração, bem como da relação entre estas duas operações. Esta dinâmica foi introduzida pelos Prof DA da EBI da Praia da Vitória. O objetivo consiste em completar os blocos do muro de acordo com a seguinte regra: cada número resulta da soma dos dois números que estão debaixo dele. Ilustra-se um exemplo nas Figuras 56 a 59.

Figura 56: O muro de cálculo que se apresenta como desafio.

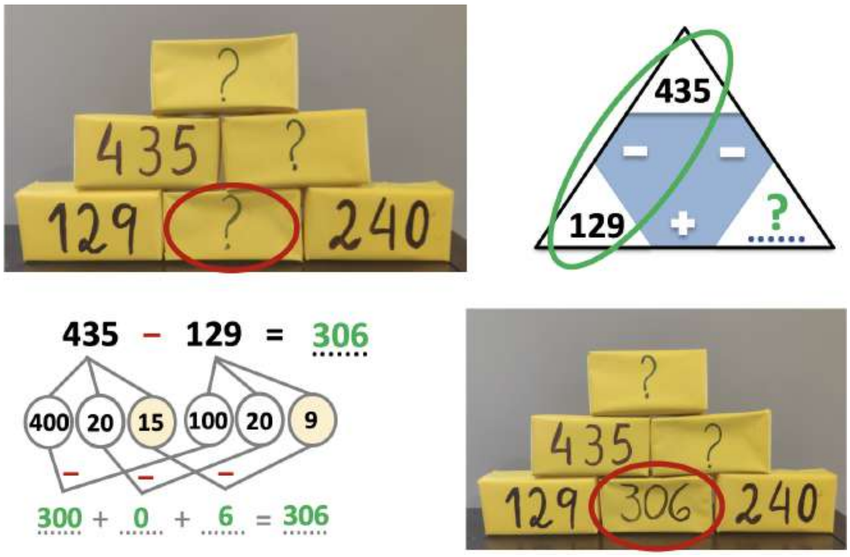

Figura 57: Para darmos início à resolução deste muro de cálculo, temos de descobrir o número que está em falta no bloco central da base do muro. Para tal, devemos recorrer aos números 435 e 129, sendo que o 435 assume-se como o todo e o 129 como uma das suas partes. Assim, facilmente percebemos que a operação a que devemos recorrer é a subtração. Aplicamos uma teia de cálculo para resolver a subtração, obtendo a diferença 306.

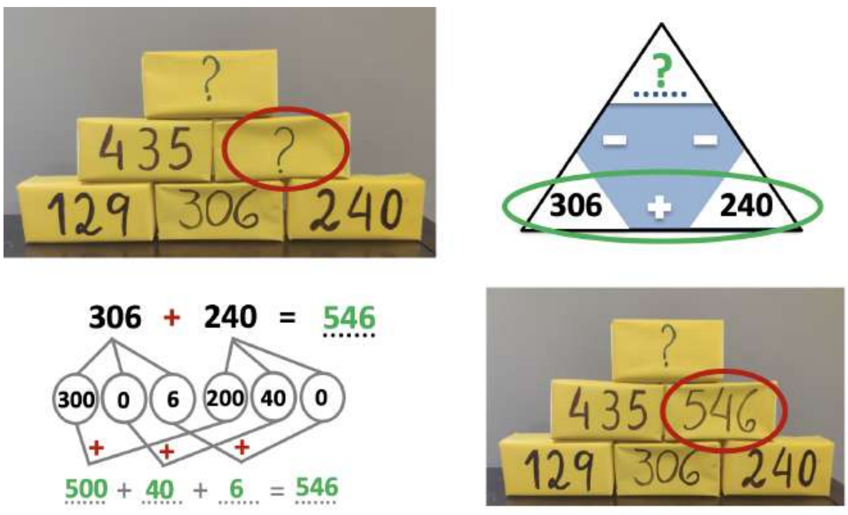

Figura 58: O número em falta na fila de blocos do meio deve ser descoberto através de uma adição, pois temos conhecimento das duas partes e pretendemos descobrir o todo. Usamos uma teia de cálculo, desta vez aplicada a uma adição, para obter a soma 546.

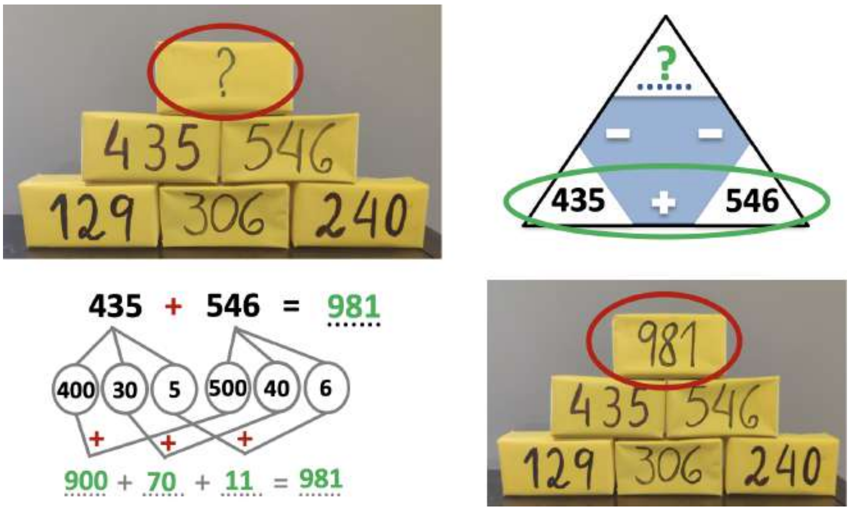

Figura 59: Falta determinar o número do bloco superior do muro. Devemos recorrer novamente a uma adição, pois conhecemos as duas partes e pretendemos descobrir o todo. Usamos uma teia de cálculo, aplicada à adição $435+546$, para obter a soma 981.

4.3 Percursos mistério

Os percursos mistério constituem mais uma sugestão para explorar de forma lúdica o sentido de número, nomeadamente as teias de cálculo.

No exemplo que se apresenta nas Figuras 60 a 63, a ideia é descobrir qual o destino do cavalo Pedro. Para isso, é necessário resolver alguns desafios envolvendo as diferentes operações e as leituras de números. Note-se que esta tarefa poderá ser adaptada a diferentes conteúdos, de acordo com as necessidades.

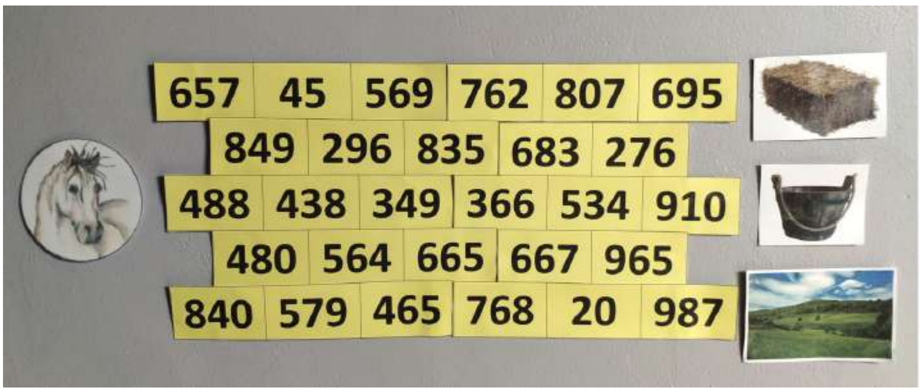

Figura 60: Pretendemos saber qual o destino do cavalo Pedro. Será que o cavalo Pedro se dirige para o fardo de palha, para o balde de água ou para os prados verdejantes? Para dar resposta a este desafio, temos de descobrir os números que compõem o caminho que será percorrido pelo cavalo Pedro.

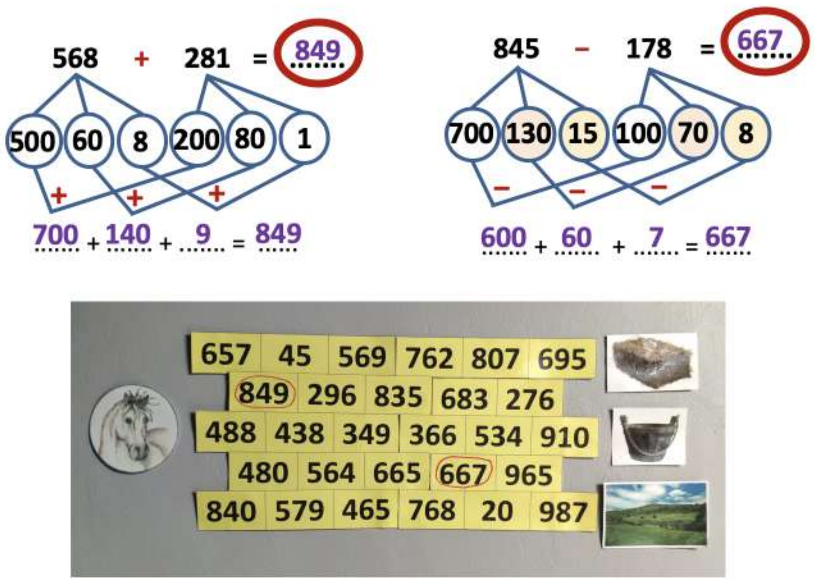

Figura 61: Os participantes devem resolver duas teias de cálculo (uma envolvendo uma adição com composição e a outra uma subtração com decomposição), de modo a descobrirem dois dos números que compõem o caminho a percorrer pelo cavalo Pedro.

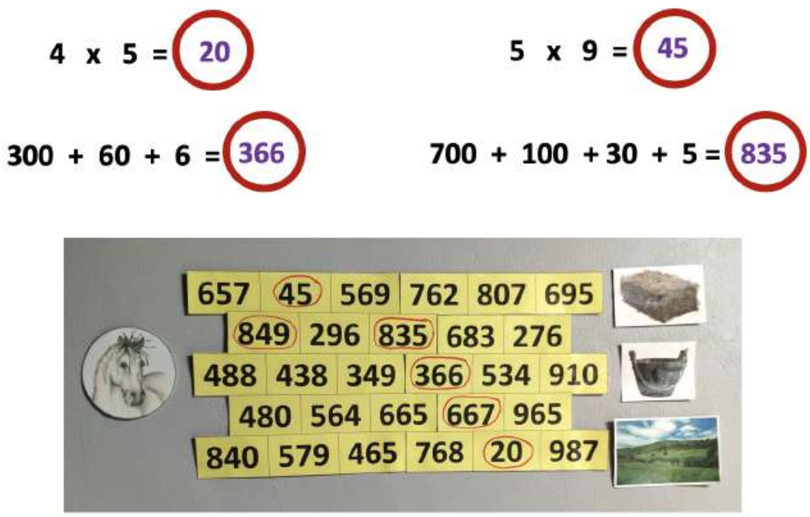

Figura 62: Os participantes resolvem mais alguns desafios, de modo a descobrirem outros números que compõem o caminho a trilhar pelo cavalo Pedro. Optou-se por diversificar os desafios a resolver. Contudo, em alternativa, os diferentes desafios poderiam ser todos centrados na aplicação das teias de cálculo.

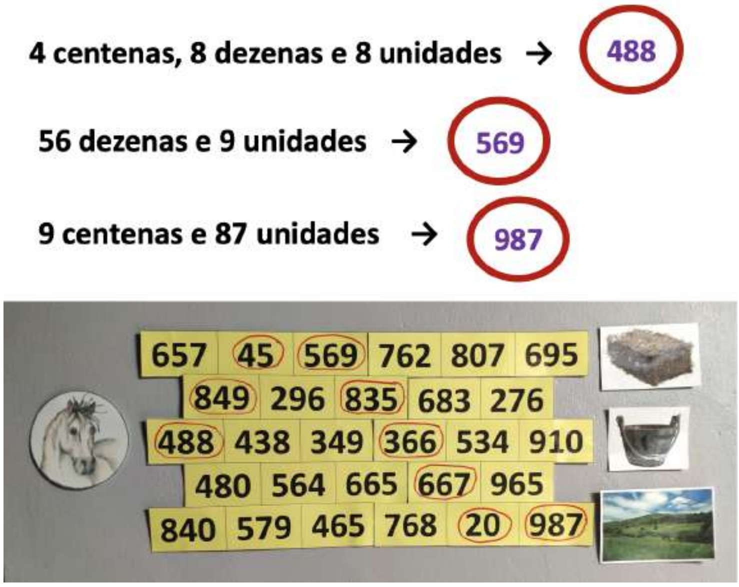

Figura 63: Resolvem-se os últimos desafios, envolvendo leituras de números (por ordens e mistas), e descobre-se o caminho a percorrer. Afinal, o cavalo Pedro dirige-se para os prados verdejantes!

4.4 Nuvens de cálculo

A quarta e última dinâmica baseia-se numa sequência de cálculos que são apresentados de nuvem em nuvem, de forma cíclica, com recurso a setas. Este tipo de tarefa permite mobilizar diferentes conteúdos previamente trabalhados. Apresenta-se um exemplo de exploração das nuvens de cálculo nas Figuras 64 e 65.

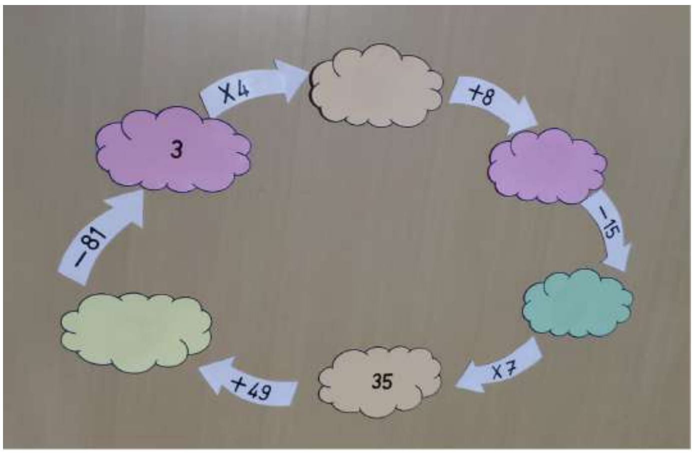

Figura 64: Um desafio com nuvens de cálculo, em que se pretende descobrir os números em falta em quatro nuvens.

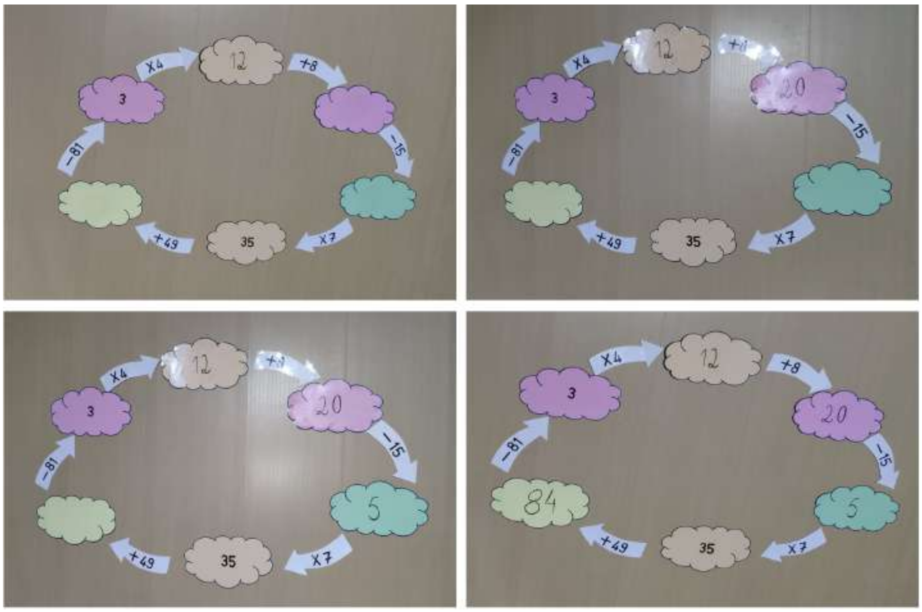

Figura 65: De modo a resolvermos este desafio, podemos começar na nuvem com o número 3 e, ao seguirmos as indicações dadas pelas setas, vamos descobrindo os números em falta até ao ponto de partida. Pelo caminho, encontramos o número 35, que nos permitirá confirmar os cálculos efetuados até então. Esta é uma dinâmica potenciadora do desenvolvimento do cálculo mental, que fomenta a implementação de diferentes estratégias de cálculo para as quatro operações. Entre as possíveis estratégias, temos as teias de cálculo para determinar somas e diferenças, podendo as teias ser escritas em papel e, com o passar do tempo, apenas visualizadas mentalmente.

Referências

[1] Alves, A., Viveiros, A., Carvalho, A. *CartoMat: Vamos Jogar e Dar Cartas em Matemática*, Coordenação científica: R. C. Teixeira, Ponta Delgada: Letras Lavadas Edições, 2019.

[2] Bruner, J. S. *Para uma Teoria da Educação* (Trad. M. Vaz), Lisboa: Relógio D'Água Editores, 1966.

[3] Carreiro, C., Correia, E., Patrício, J., Santos, C. P., Teixeira, R. C. A multiplicação e a divisão em imagens: explorações no 2.º ano de escolaridade, *Jornal das Primeiras Matemáticas* 11, 5-32, 2018.

[4] Carreiro, C., Correia, E., Patrício, J., Santos, C. P., Teixeira, R. C. A introdução do conceito de fração em imagens: explorações no 2.º ano de escolaridade, *Jornal das Primeiras Matemáticas* 12, 5-28, 2019.

[5] D' Arruda, A. I., Pacheco, C., Marques, E. *A Estrela Alegria... e os seus 10 Amigos*, Coordenação científica: R. C. Teixeira, Ilustração: E. Marques, Ponta Delgada: Letras Lavadas Edições, 2019.

[6] Dienes, Z. *Aprendizado Moderno de Matemática* (Trad. J. E. Fortes), Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

[7] Dinis, R., Teixeira, R. C., Pacheco, S. Os Princípios Orientadores do Método de Singapura e a Aprendizagem da Matemática no 1.º Ciclo do Ensino Básico, *Jornal das Primeiras Matemáticas* 13, 5-36, 2019.

[8] Furtado, A. R., Duarte, J., Medeiros, M. P., Faria, Z., Silva, L., Fonseca, M. H., Sousa, P., Teixeira, R. C. Recursos didáticos promotores do sentido de número no 1.º Ciclo do Ensino Básico, *Jornal das Primeiras Matemáticas* 11, 33-63, 2018.

[9] Hoong, L. Y., Kin, H. W., Pien, C. L. Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its Origins and Charting its Future, *The Mathematics Educator* 16 (1), 1-18, 2015.

[10] Lima, A. M., Santos, C. P., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. A resolução de problemas no 2.º ano de escolaridade: uma sequência de aprendizagem do modelo de barras, *Jornal das Primeiras Matemáticas* 8, 23 - 82, 2017.

[11] Lima, A. M., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. *Matemática Passo a Passo: Caderno do aluno para o 2.º ano de escolaridade*, Edição Revista, Letras Lavadas Edições, 2021.

[12] Lima, A. M., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. *Matemática Passo a Passo: Caderno do aluno para o 3.º ano de escolaridade*, Edição Revista, Letras Lavadas Edições, 2021.

[13] Lima, A. M., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. *Matemática Passo a Passo: Caderno do aluno para o 4.º ano de escolaridade*, Edição Revista, Letras Lavadas Edições, 2021.

[14] Lima, M., Santos, E. *À descoberta das figuras mistério*, Coordenação científica: R. C. Teixeira, Design das figuras: E. Marques e M. E. Teves, Ponta Delgada: Letras Lavadas Edições, 2017.

[15] Martins, H., Silva, L., Areias, M. F., Santos, C. P., Teixeira, R. C. As cinco estratégias de cálculo da adição e subtração do 1.º ano e o seu impacto nas aprendizagens do 1.º ciclo, *Jornal das Primeiras Matemáticas* 15, 19-53, 2020.

[16] Santos, C. P., Teixeira, R. C. Matemática na Educação Pré-Escolar: A Primeira Dezena, *Jornal das Primeiras Matemáticas* 3, 17-46, 2014.

[17] Santos, C. P., Teixeira, R. C. Matemática na Educação Pré-Escolar: Esquemas todo-partes, *Jornal das Primeiras Matemáticas* 4, 55-70, 2015.

[18] Silva, C., Cordeniz, C., Areias, M. F., Rainha, F., Martins, H., Silva, L., Teixeira, R. C. Da localização espacial às figuras planas e aos sólidos geométricos: explorações no 2.º ano de escolaridade, *Jornal das Primeiras Matemáticas* 13, 37-68, 2019.

[19] Skemp, R. *Mathematics in the Primary School*, London: Routledge, 1989.

[20] Sousa, D. A. *How the Brain Learns Mathematics*, 2nd edition, Thousand Oaks, CA: Corwin, 2014.

[21] Yee, L. P., Hoe, L. N. (Eds.) *Teaching Primary School Mathematics: A Resource Book*, 2nd Edition, Singapore: McGraw-Hill, 2009.