Jornal das Primeiras Matemáticas

Número 17
Dezembro, 2021

Ludus

Problemas e Desafios

O MODELO DE BARRAS COMO UMA REPRESENTAÇÃO PICTÓRICA DE APOIO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Elisabete Barbosa, Elsa Marques e Maria Leonor Rodrigues,
Carlos Pereira dos Santos, Ricardo Cunha Teixeira

EBI Canto da Maia, CEAFEL & ISEL-IPL, NICA-UAc & FCT-UAc

cmfsantos@fc.ul.pt, ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *O modelo de barras é uma marca do conhecido método de Singapura, que tem sido amplamente aplicada em muitos países. Neste artigo, procura-se explicitar o potencial didático do modelo de barras na promoção da compreensão de conceitos e procedimentos fundamentais da Matemática Elementar, no contexto da resolução de problemas aritméticos, ou seja, de problemas que se baseiam nas quatro operações aritméticas. Através da construção de um esquema de barras, os alunos podem representar, por intermédio de um registo pictórico, as quantidades conhecidas e desconhecidas e perceber as relações entre essas quantidades, de modo a ganhar uma melhor compreensão do problema, o que estimula o desenvolvimento do raciocínio matemático e a destreza na resolução de problemas. Apresenta-se, ao longo do artigo, uma sequência de aprendizagem do modelo de barras, com progressivo aumento do grau de dificuldade ao longo do 1.º Ciclo do Ensino Básico.*

Palavras-chave: Matemática elementar, resolução de problemas, modelo de barras, método de Singapura, 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Introdução

Ao longo das últimas décadas, a resolução de problemas tem vindo a ganhar algum destaque nos currículos escolares, não apenas em Portugal mas, de uma maneira geral, em termos internacionais. Na década de 90 do século passado, a UNESCO, através da Declaração Mundial sobre Educação para Todos, estabeleceu que a resolução de problemas deve ser um instrumento essencial para a aprendizagem, do mesmo modo que a leitura, a escrita, a expressão oral e o cálculo [29]. Nesse documento refere-se, ainda, que a satisfação das necessidades básicas de aprendizagem confere aos membros de uma sociedade a possibilidade e, ao mesmo tempo, a responsabilidade de respeitar e desenvolver a sua herança cultural, linguística e espiritual, de proteger o meio ambiente e de ser tolerante com os sistemas sociais, políticos e religiosos que difiram dos seus, de modo a salvaguardar o respeito pelos direitos humanos.

Mais recentemente, no documento Educação 2030: Declaração de Incheon, a UNESCO reforça a defesa de uma educação de qualidade que assegure "a aquisição de habilidades básicas em alfabetização e Matemática, bem como habilidades analíticas e de resolução de problemas" ([30], p. 8). O documento refere que se deve dar ênfase ao desenvolvimento de habilidades de alto nível, como a resolução de problemas, o pensamento crítico e a criatividade, que podem ser usadas ao longo da vida num leque vasto de áreas de ocupação.

No contexto nacional, destaca-se o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória [17]. Este documento de referência para a organização do sistema educativo foi homologado pelo Ministério da Educação em 2017 e pretende contribuir para a convergência e a articulação das decisões inerentes às várias dimensões do desenvolvimento curricular em Portugal. O documento contempla, ao todo, dez áreas de competências – "combinações complexas de conhecimentos, capacidades e atitudes que permitem uma efetiva ação humana em contextos diversificados" (p. 9). Uma dessas áreas intitula-se "Raciocínio e resolução de problemas", sendo esperado que os alunos: coloquem e analisem questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir; definam e executem estratégias adequadas para investigar e responder às questões iniciais; e analisem criticamente as conclusões obtidas, reformulando, sempre que necessário, as estratégias adotadas. As áreas de competências apresentam uma natureza transversal às diferentes áreas curriculares. Em particular, a resolução de problemas pode desempenhar um papel relevante no ensino-aprendizagem da Matemática.

A este propósito, o Grupo de Trabalho de Matemática, no documento intitulado Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática [6], apresenta a Recomendação 5: Um currículo de Matemática com conteúdos relevantes e baseado na compreensão matemática, que valoriza precisamente a compreensão matemática como o alicerce para a aprendizagem, enfatizando "a resolução de problemas, individual e em colaboração, o raciocínio matemático, a comunicação, as conexões, o uso de representações múltiplas, a criatividade, o pensamento crítico apoiado por argumentos matemáticos, a literacia digital, o pensamento sistémico, a reflexão (metacognição), e a persistência/resiliência" (p. 262). Na sequência de uma análise ao currículo português, bem como a vários currículos internacionais, o Grupo de Trabalho de Matemática, sobre as necessidades futuras relativas à educação matemática, conclui que

> é absolutamente inequívoco que a Matemática é e será uma disciplina incontornável na formação de qualquer cidadão, em especial na sua preparação para o mundo do trabalho. Um currículo que responda a essa exigência deve ser: pouco extenso; relevante e flexível; envolver todos os parceiros na sua construção; prever o desenvolvimento de

> competências de resolução de problemas, de raciocínio matemático e de trabalho com situações da vida real, nomeadamente privilegiando o tratamento e interpretação de dados, bem como o pensamento crítico; e dar oportunidades diversificadas a todos os alunos para que se sintam confortáveis na abordagem a problemas cuja resolução requeira Matemática. (p. 259)

Ainda em relação a este documento, a análise aos currículos internacionais de Matemática permite concluir que a resolução de problemas é valorizada de forma sistemática.

Em termos internacionais, destaca-se o método de Singapura, que é atualmente aplicado em muitas partes do Mundo, em particular nos Açores [1, 2, 3, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 23]. O sucesso deste método, refletido nos estudos internacionais TIMSS [24, 25, 26, 27, 28], prende-se com o facto de não depender de fatores de ordem cultural ou financeira, uma vez que se centra na natureza da Matemática enquanto linguagem universal e na forma como a aprendizagem desta área pode ser potenciada desde tenra idade. Em Singapura, a estrutura do currículo de Matemática apresenta a resolução de problemas numa posição central [5, 8, 20, 31]. Neste contexto, o modelo de barras desempenha um papel importante, sendo amplamente usado pelos alunos na resolução de problemas desde os primeiros anos de escolaridade [10, 19, 21, 31]. Foi introduzido na década de 80 do século passado, por uma equipa de investigadores liderada por Kho Tek Hong. O objetivo foi o de melhorar a capacidade de resolução de problemas dos alunos ao fornecer uma representação pictórica que ajudasse na visualização das diferentes relações numéricas. Segundo Kho Tek Hong, o modelo das barras estimula a resolução de problemas desafiadores e leva os alunos a habituarem-se a estabelecer um plano durante o processo de resolução.

Numa primeira fase, os problemas devem ser simples, para que os alunos tenham a oportunidade de se apropriar das diferentes situações que podem surgir e dos esquemas que podem aplicar em cada situação. Numa fase seguinte, se o aluno dominar a resolução de problemas com recurso ao modelo de barras, este terá uma ferramenta poderosa com vista à resolução de problemas de maior grau de dificuldade. Isto porque o modelo de barras constitui uma forma de esquematizar a informação do enunciado do problema, de modo a facilitar a descoberta das operações que devem ser usadas. Neste contexto, o modelo de barras é particularmente útil na resolução de problemas aritméticos, isto é, de problemas que se baseiam nas quatro operações aritméticas.

O modelo de barras centra-se no coração da resolução de problemas aritméticos – a importância da representação. De facto, o modelo de barras estimula que os alunos trabalhem com três formas de representação: texto (enunciado do problema), pictórico/esquemático (desenho das barras) e simbólico (escrita de expressões matemáticas). No decorrer do percurso escolar dos alunos, o modelo de barras pode mesmo potenciar a transição entre a resolução de problemas aritméticos e a resolução de problemas algébricos, com recurso a variáveis. Na verdade, as representações esquemáticas proporcionadas pelo modelo de barras funcionam como "equações pictóricas" [21].

Nos próximos tópicos, propõe-se uma sequência de aprendizagem do modelo de barras, com progressivo aumento do grau de dificuldade ao longo do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

1. Considerações gerais e primeiras explorações

De modo a potenciar um trabalho sistemático com o modelo de barras na resolução de problemas, torna-se relevante a criação de pelo menos um *momento semanal de resolução de problemas* [11]. A periodicidade e a duração podem variar (por exemplo, pode estabelecer-se um bloco de 90 minutos todas as sextas ou, em alternativa, dois blocos de 45 minutos, um às terças e o outro às quintas, entre outras possibilidades a decidir de acordo com as características da turma).

A designação atribuída aos momentos semanais de resolução de problemas pode apelar à curiosidade pela resolução de mistérios, estimulando, assim, a motivação dos alunos (por exemplo, "Detetives em ação na resolução de problemas!", "Os génios dos problemas!" ou "Incríveis matemáticos encontram as soluções!"). Os alunos podem mesmo ser desafiados a escolher o nome para estes momentos. Depois de selecionadas algumas propostas, o nome preferido pode ser alvo de votação [11]. Os resultados podem ser organizados, por exemplo, num gráfico de pontos.

Desde as primeiras explorações, é importante passar a mensagem de que o modelo de barras fornece uma representação pictórica, com recurso a barras, que permite compreender e relacionar os dados e o objetivo apresentados no enunciado do problema, de modo a identificar mais facilmente as operações aritméticas que devem ser aplicadas para descobrir a solução.

No 1.º Ciclo do Ensino Básico, o modelo de barras é empregue sobretudo na resolução de problemas envolvendo as quatro operações aritméticas. Neste contexto, é fundamental explorar os diferentes sentidos das quatro operações, recorrendo, sempre que necessário, a material de concretização com vista a uma melhor compreensão desses sentidos. Recomendamos, também, momentos de estímulo à metacognição e à comunicação matemática, de modo que os alunos possam pensar e partilhar as suas ideias sobre os esquemas de barras que foram usados, relacionando esses esquemas com os sentidos das operações aplicadas.

Sempre que possível, entendemos ser profícua uma articulação dos conteúdos trabalhados nas aulas com os momentos semanais de resolução de problemas. Desta forma, a resolução de problemas pode constituir uma oportunidade para consolidar e aplicar conceitos e procedimentos ligados ao sentido de número, nomeadamente estratégias de cálculo variadas, bem como os algoritmos das quatro operações.

De modo a promover um trabalho estruturado na resolução de problemas, é importante que os alunos se habituem a respeitar uma série de etapas. Neste âmbito, os autores propõem as 8 etapas ilustradas na Figura 1.

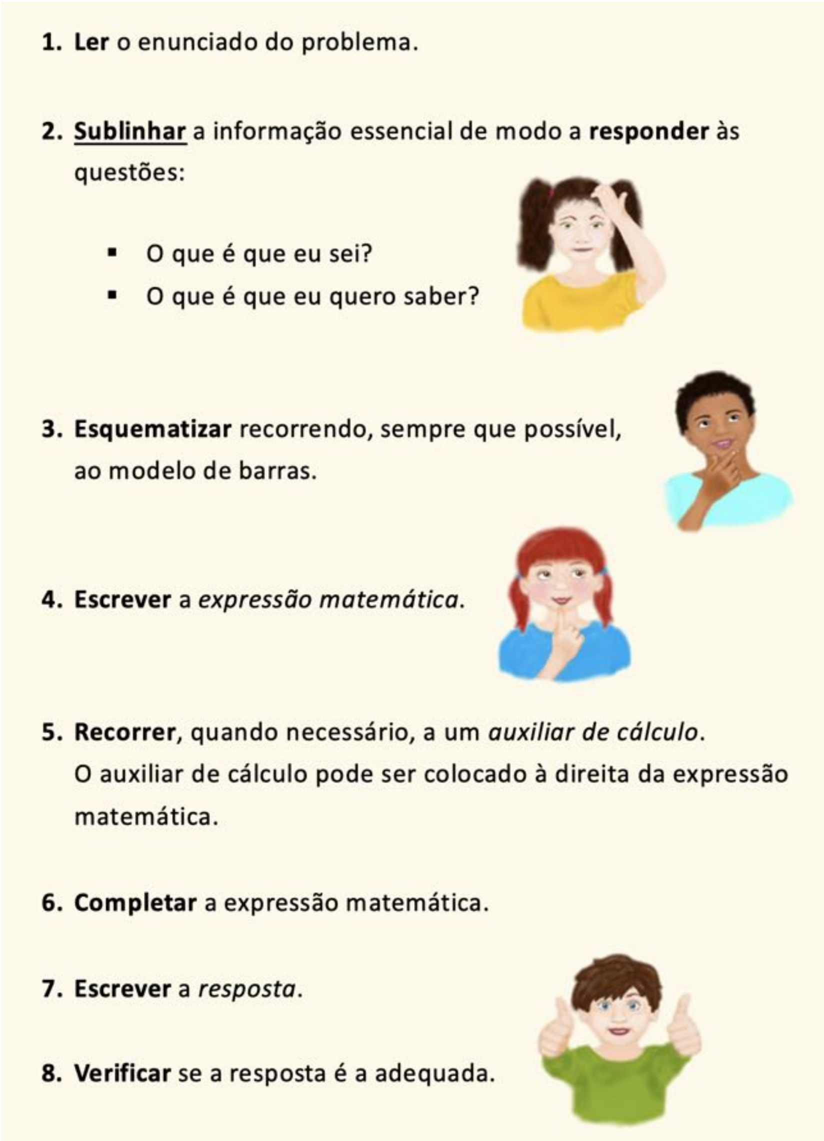

Figura 1: As 8 etapas da resolução de problemas com recurso ao modelo de barras (retirado de [13]).

As primeiras explorações, no decurso do 1.º ano de escolaridade, devem envolver o desenho das barras em papel quadriculado, representando cada quadrícula uma unidade, de modo a facilitar o desenho e a interpretação das barras. Podem também envolver elementos pictóricos, nomeadamente, imagens de objetos/seres que ajudem a identificar as quantidades exploradas. Este tipo de representação funciona para valores nos intervalos 1-10 ou 1-20. Para valores superiores a 20, sugerimos que a representação das barras seja efetuada em papel pautado, de modo a facilitar o desenho das barras, mas sem a necessidade de fazer corresponder uma unidade a cada quadrícula. Quando os alunos se sentirem mais à vontade no desenho das barras, estas podem ser construídas pelos alunos em papel de desenho (portanto, sem o apoio de quadrículas ou de linhas), no quadro da sala de aula ou, mesmo, em quadros brancos que podem ser usados a pares [11].

O trabalho a pares pode ser muito produtivo, não só por estimular a cooperação e a comunicação matemática, mas também por poder proporcionar momentos ricos de interação entre os grupos (por exemplo, os grupos podem ser desafiados a criarem os seus próprios problemas, a trocarem os problemas entre si e a resolverem problemas criados pelos colegas). De facto, a capacidade de resolver problemas de uma determinada tipologia fica enriquecida se se proporcionar uma diversificação das abordagens, incluindo a possibilidade de os alunos criarem os seus próprios problemas dessa tipologia. Outro aspeto que pode contribuir para motivar a turma passa por incluir os nomes dos discentes e por envolver situações do seu quotidiano na elaboração dos enunciados dos problemas.

As situações apresentadas ao longo deste artigo são baseadas, na sua maioria, em problemas resolvidos pelas autoras em ambiente de sala de aula, bem como no decorrer das sessões "Matemática Passo a Passo", das temporadas 1 e 2 do programa "Aprender em Casa", da RTP Açores (disponíveis, à data de publicação deste artigo, na RTP Play e no link `http://sites.uac.pt/mea`). De seguida, analisamos alguns exemplos que podem constituir uma introdução ao modelo de barras no 1.º ano de escolaridade. Estes exemplos foram explorados nos episódios do 1.º ano da temporada 2 do "Aprender em Casa", nas semanas 14, 29, 30 e 31. Começamos pelo exemplo da Figura 2.

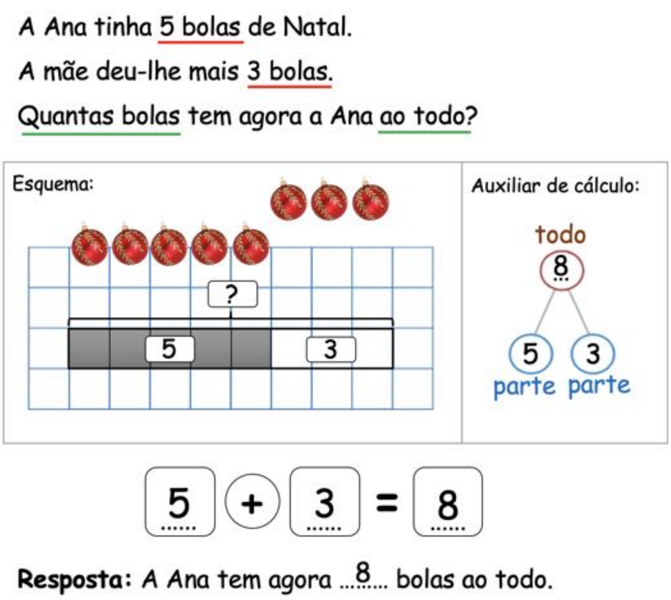

Figura 2: Problema envolvendo o sentido de acrescentar da adição.

Neste primeiro exemplo, explora-se o *sentido de acrescentar* da adição: há um grupo/conjunto de elementos e *acrescentam-se* elementos a esse grupo/conjunto. A barra desenhada permite chegar à expressão $5 + 3 = ?$, que dá resposta ao problema. O auxiliar de cálculo é um esquema todo-partes que apela à decomposição do 8 em 5 e 3. Os esquemas todo-partes permitem relacionar três números, articulando decomposições, adições e subtrações [22]. Em contraponto a esta situação, apresenta-se o exemplo da Figura 3 que explora o *sentido de retirar* da subtração: há um grupo/conjunto de elementos e *retiram-se* elementos a esse grupo/conjunto. É de notar que a posição onde se coloca o ponto de interrogação no esquema com a barra é determinante para se deduzir a expressão matemática (e, em particular, a operação) que permite dar resposta ao problema.

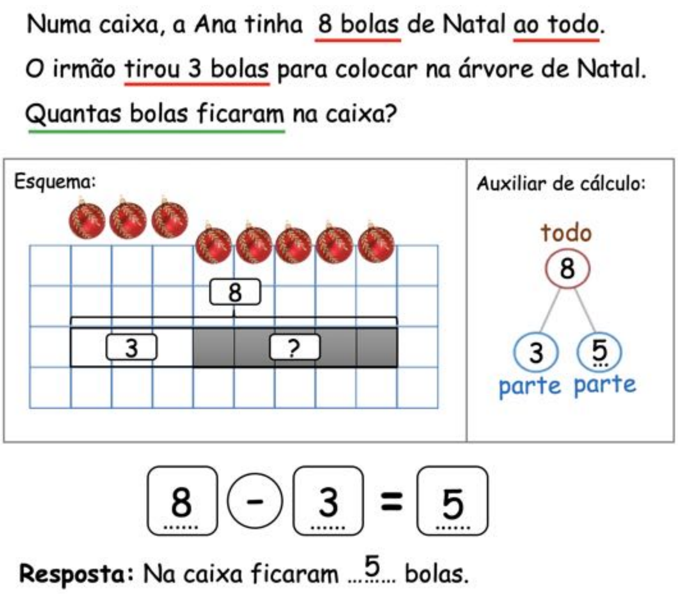

Figura 3: Problema envolvendo o sentido de retirar da subtração.

Nas próximas figuras, exploram-se situações que ilustram mais dois sentidos que se contrapõem. Nessas situações, há dois tipos de elementos que apresentam uma propriedade que os distingue. Contudo, como em qualquer situação envolvendo uma adição ou uma subtração, esses elementos têm uma natureza em comum, que pode ser mais ou menos evidente (por exemplo, vacas castanhas e vacas pretas são vacas; carrinhos e berlindes são brinquedos; bananas e laranjas são peças de fruta; etc.). Na Figura 4, explora-se o *sentido de juntar* da adição: há dois grupos/conjuntos de elementos que apresentam uma propriedade que os distingue; conhece-se o número de elementos de cada grupo; *juntam-se* esses valores para se descobrir o total de elementos. Já na Figura 5, explora-se o *sentido de separar* da subtração: há dois grupos/conjuntos de elementos que apresentam uma propriedade que os distingue; conhece-se o total de elementos e o número de elementos de um dos grupos; *separa-se* esse valor do total de elementos para se descobrir o número de elementos do outro grupo.

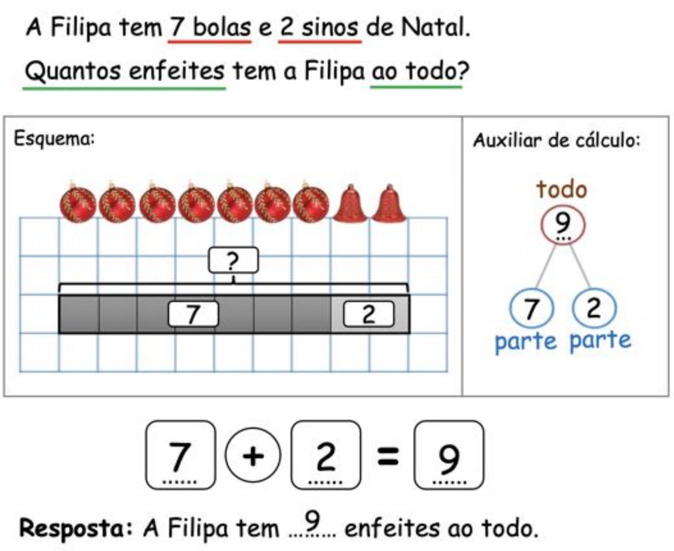

Figura 4: Problema envolvendo o sentido de juntar da adição.

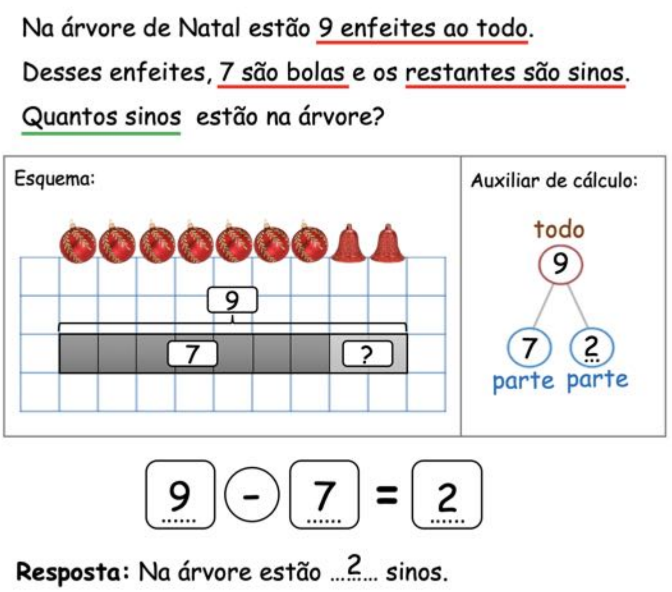

Figura 5: Problema envolvendo o sentido de separar da subtração.

Tal como se recomenda para as primeiras explorações, as barras foram desenhadas em papel quadriculado, representando cada quadrícula uma unidade, de modo a facilitar o desenho e a interpretação das barras. Incluíram-se, também, elementos pictóricos (imagens dos enfeites de Natal) que ajudam a identificar as quantidades exploradas.

Há mais um sentido da subtração a ter em conta: o *sentido de completar*. Aplicamos este sentido quando temos alguns elementos e a questão que se coloca é sabermos quantos elementos faltam para obtermos um grupo/conjunto com um determinado número de elementos. Basicamente, temos de *completar* uma parte para obtermos o todo. Enquanto que o sentido de retirar está naturalmente associado à subtração por contagem regressiva (Figura 6), o sentido de completar articula-se com a subtração por contagem continuada (Figura 7).

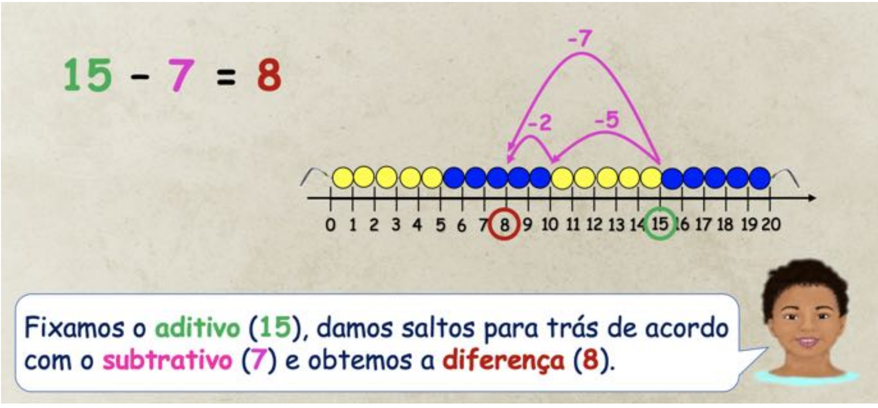

Figura 6: Subtrair contando para trás (adaptado de [12]).

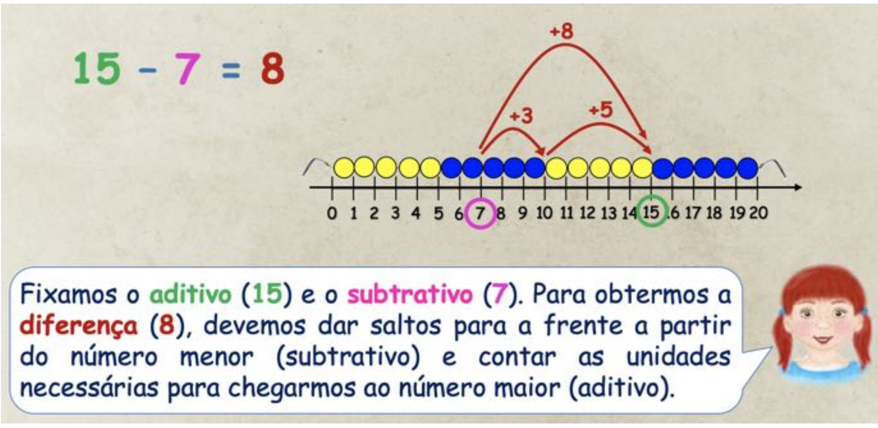

Figura 7: Subtrair contando para a frente (adaptado de [12]).

Na Figura 8, explora-se um problema envolvendo o sentido de completar da subtração. A barra foi desenhada em papel pautado, de modo a facilitar a sua representação, mas sem a necessidade de fazer corresponder uma unidade a cada quadrícula. Já não se utilizam elementos pictóricos para ajudarem a identificar as quantidades exploradas. Como auxiliar de cálculo, recorre-se à subtração por contagem continuada ("subtrair contando para a frente").

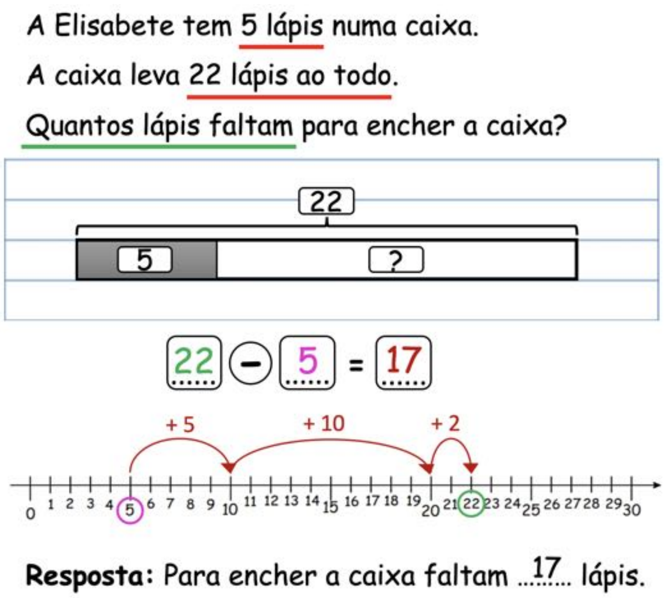

Figura 8: Problema envolvendo o sentido de completar da subtração.

A adição e a subtração também podem ser aplicadas em situações de comparação, envolvendo pelo menos duas personagens/entidades. No enunciado surgem normalmente as expressões "mais do que" ou "menos do que". Apresenta-se um exemplo na Figura 9.

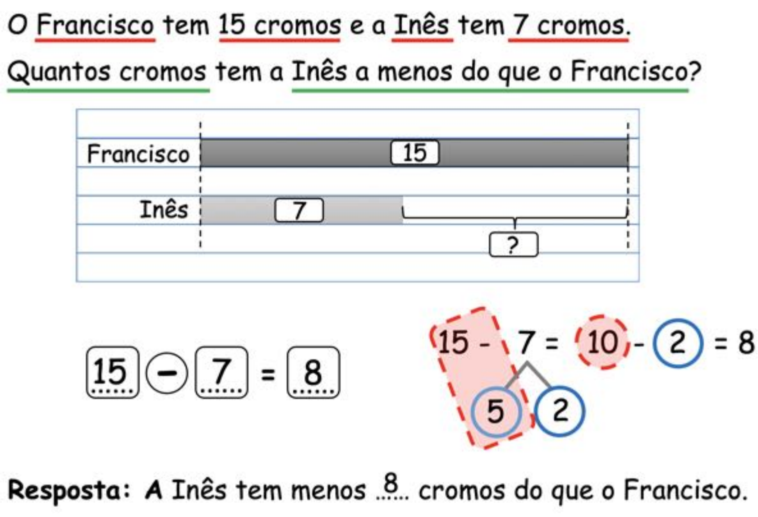

Figura 9: Problema de comparação envolvendo uma subtração.

Note-se que os cálculos seriam os mesmos se a pergunta fosse "Quantos cromos tem o Francisco a mais do que a Inês?", sendo a resposta "O Francisco tem mais 8 cromos do que a Inês.". Como auxiliar de cálculo, podia-se ter recorrido a uma das estratégias das Figuras 6 e 7. Contudo, optou-se por recorrer à estratégia de cálculo “Retirar as unidades e subtrair o restante às dezenas” [4, 18]. Observa-se que o aditivo, 15, tem cinco unidades que não estão compostas na dezena. Então decompõe-se o subtrativo, 7, em 5 e 2. Retiram-se as 5 unidades ao aditivo, ficando com 10. Falta subtrair 2 unidades a 10, obtendo-se 8. Então, $15-7=8$. Nesta estratégia, o subtrativo é decomposto em duas partes, sendo cada uma delas retirada, à vez, ao aditivo. Esta estratégia baseia-se na natureza decimal do nosso sistema de numeração e socorre-se das decomposições dos números até 10 (especificamente que 7 se decompõe em 5 e 2 e que 10 se decompõe em 2 e 8).

Nos próximos tópicos, analisam-se as tipologias base do modelo de barras para problemas de um passo (problemas que se resolvem com uma operação). Os exemplos explorados centram-se no 2.º ano de escolaridade.

2. O modelo todo-partes

O modelo de barras todo-partes baseia-se no esquema todo-partes, mencionado no tópico anterior. Aplica-se nas situações em que há um todo dividido em pelo menos duas partes.

A Figura 10 ilustra o modelo todo-partes com uma barra, que representa o todo, dividida em duas partes. Para resolver o problema, aplica-se uma adição quando se desconhece o todo (Posição 1). Por exemplo, a Isabel tem 13 berlindes brancos e 17 berlindes verdes. Quantas berlindes tem a Isabel? Coloca-se 13 na Posição 2, 17 na Posição 3 e ? na Posição 1. Este esquema conduz à expressão $13+17=...$, que permite resolver o problema.

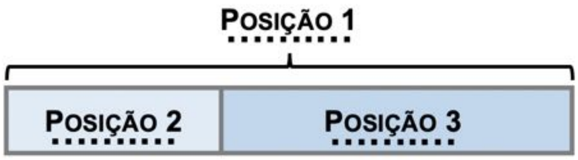

Figura 10: O modelo de barras todo-partes.

Por seu turno, aplica-se uma subtração quando se desconhece uma das partes (Posição 2 ou Posição 3). Por exemplo, numa árvore estavam 30 pássaros. Voaram 13 pássaros. Quantos pássaros ficaram na árvore? Coloca-se 30 na Posição 1, 13 na Posição 2 e ? na Posição 3. Este esquema conduz à expressão $30-13=...$, que dá resposta ao problema.

Deu-se um exemplo de uma adição no sentido de juntar e de uma subtração no sentido de retirar. Este modelo pode ser aplicado para os sentidos de acrescentar/retirar, juntar/separar e completar, envolvendo as operações adição e subtração. Nos casos em que se desconhece uma das partes, os alunos podem ser convidados a estimarem se a parte desconhecida é maior ou menor do que a parte conhecida, de modo a facilitar o preenchimento da Posição 2 e da Posição 3 na barra. Contudo, é importante que os alunos percebam que a barra é apenas um esquema que ajuda na identificação da operação a aplicar e na escrita da expressão matemática que permite dar resposta ao problema, pelo que a divisão da barra em duas partes não necessita de ser encarada com o preciosismo de as duas partes serem proporcionais aos valores envolvidos.

Nas Figuras 11 a 13, apresentam-se alguns exemplos da utilização do modelo todo-partes em problemas envolvendo a adição e a subtração.

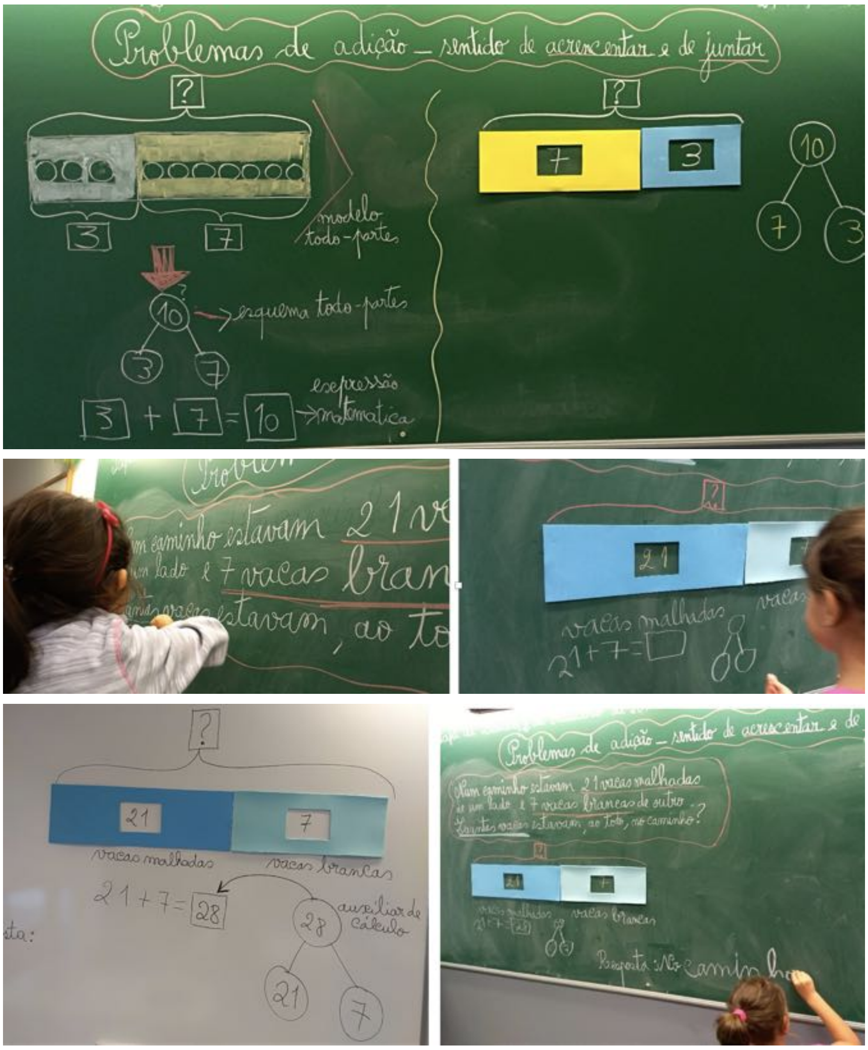

Figura 11: Exemplos de aplicação do modelo todo-partes em problemas envolvendo a adição; utilização de elementos pictóricos e de numerais; análise dos tamanhos das partes da barra e da relação com os valores numéricos que representam; análise do papel da chaveta e do ponto de interrogação; constatação que, no esquema, as partes podem ser trocadas; utilização de tiras manipuláveis para a resolução de problemas no quadro da sala de aula; utilização do esquema todo-partes como auxiliar de cálculo.

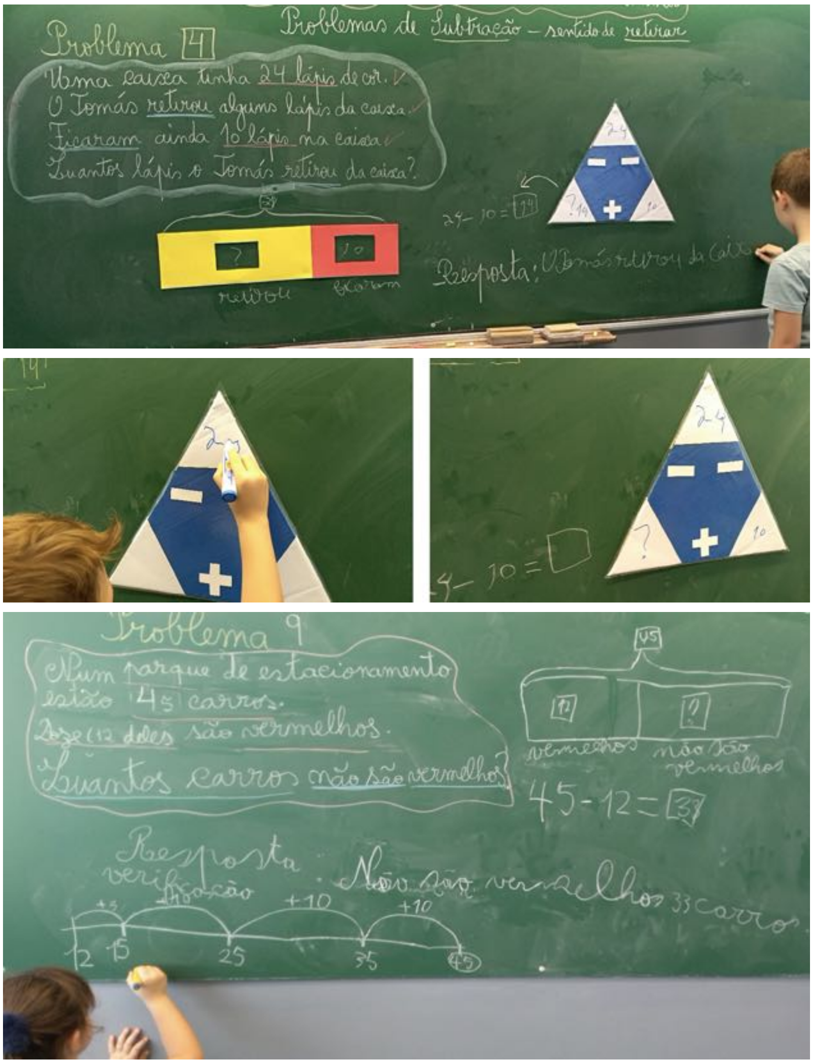

Figura 12: Explorações com o modelo todo-partes, recorrendo à subtração; o primeiro problema (de cima para baixo) envolve uma subtração no sentido de retirar: conhece-se o todo e a parte que ficou; pretende-se descobrir a parte que foi retirada; o valor retirado é maior do que metade do todo; recorre-se ao triângulo da adição e da subtração como auxiliar de cálculo; o triângulo da adição e da subtração [4] é uma variante do tradicional esquema todo-partes, que permite relacionar três números (o todo e duas partes) através de quatro factos básicos, dois envolvendo a adição e dois a subtração; por exemplo, para o todo 24 e as partes 14 e 10, temos: $14+10 = 24$, $10+14 = 24$, $24-10 = 14$ e $24-14 = 10$; o segundo problema envolve uma subtração no sentido de separar: conhece-se o todo e uma parte; pretende-se descobrir a outra parte; é identificado um tipo de elementos, subentendendo-se que existem outros tipos e uma natureza comum a todos; a questão é apresentada na negativa; recorre-se à subtração por contagem continuada como auxiliar de cálculo ("subtrair contando para a frente").

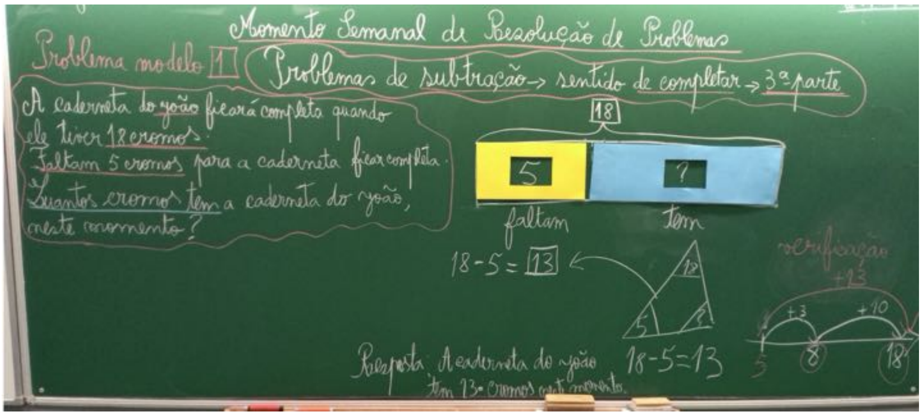

Figura 13: Utilização do modelo todo-partes num problema que envolve uma subtração no sentido de completar: conhece-se o todo e a parte que ainda está a faltar; pretende-se descobrir a parte que se tem; a parte que está em falta é menor do que metade do todo; recorre-se ao triângulo da adição e da subtração como auxiliar de cálculo; verifica-se o resultado aplicando a subtração por contagem continuada; os alunos devem habituar-se a cumprir as etapas apresentadas na Figura 1, em particular a etapa 8, verificando os seus cálculos, sempre que necessário.

Nas sessões “Matemática Passo a Passo” da temporada 2 do programa “Aprender em Casa” (disponíveis, à data de publicação deste artigo, na RTP Play e no link `http://sites.uac.pt/mea`), as autoras resolvem problemas de aplicação do modelo todo-partes (semanas 1 a 8, episódios do 2.º ano, por volta dos 35 minutos). Os problemas foram adaptados de [13].

3. O modelo de comparação com contexto aditivo

Tal como foi exemplificado no tópico 1, as operações adição e subtração também podem ser aplicadas em situações de comparação, envolvendo pelo menos duas personagens/entidades.

A Figura 14 ilustra o modelo de comparação com contexto aditivo, em que se considera uma barra para cada personagem/entidade. Recorre-se a uma adição quando se desconhece o valor da barra maior (Posição 1). Por exemplo, a Ana tem 25 berlindes. O José tem mais 32 berlindes do que a Ana. Quantos berlindes tem o José? Coloca-se 25 na Posição 2, 32 na Posição 3 e ? na Posição 1. Este esquema conduz à expressão $25 + 32 = ...$, que permite resolver o problema.

Por outro lado, recorre-se a uma subtração quando se desconhece o valor da barra menor (Posição 2). Por exemplo, o José tem 57 berlindes. A Ana tem menos 32 berlindes do que o José. Quantos berlindes tem a Ana? Coloca-se 57 na Posição 1, 32 na Posição 3 e ? na Posição 2. Este esquema conduz à expressão $57 - 32 = ...$, que permite encontrar a solução.

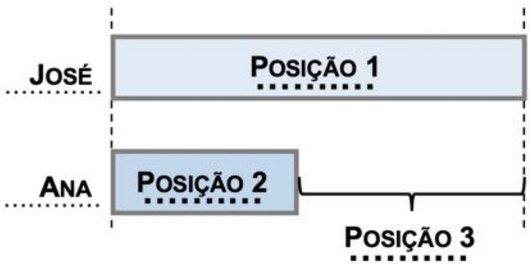

Figura 14: O modelo de comparação com contexto aditivo.

Por fim, recorre-se também a uma subtração quando se desconhece a diferença dos valores das barras (Posição 3). Por exemplo, a Ana tem 25 berlindes e o José 57. Quantos berlindes tem a Ana a menos do que o José? Coloca-se 57 na Posição 1, 25 na Posição 2 e ? na Posição 3. Este esquema conduz à expressão $57 - 25 = ...$, que dá resposta ao problema.

Nas sessões "Matemática Passo a Passo" da temporada 2 do programa "Aprender em Casa" (disponíveis, à data de publicação deste artigo, na RTP Play e no link `http://sites.uac.pt/mea`), as autoras resolvem problemas de comparação com contexto aditivo (semanas 9 a 13, episódios do 2.º ano, por volta dos 35 minutos). Os problemas foram adaptados de [13]. Nas Figuras 15 a 17, ilustram-se mais alguns exemplos.

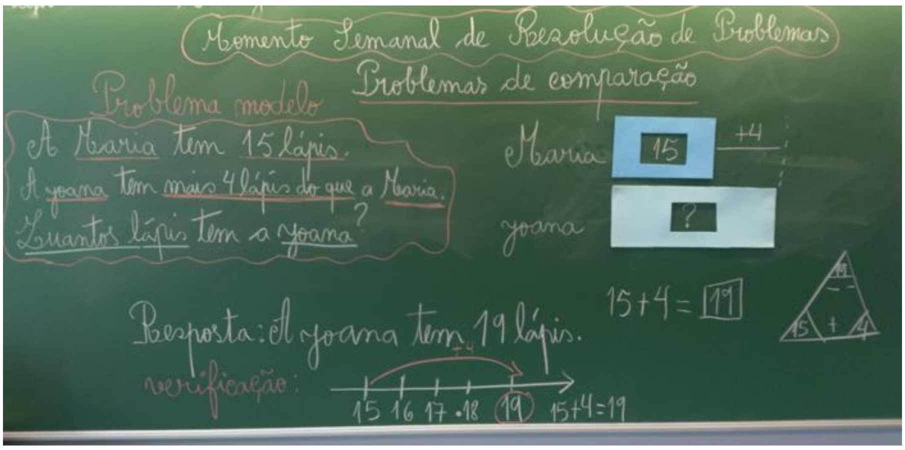

Figura 15: Utilização do modelo de comparação com contexto aditivo; neste exemplo, são conhecidos os valores da barra menor e da diferença entre as duas barras; pretende-se descobrir o valor da barra maior; é um problema que envolve a operação adição; para comparar as duas barras, recorre-se no enunciado à palavra "mais"; também se podia ter usado a palavra "menos" ("A Maria tem menos 4 lápis do que a Joana."); utiliza-se o triângulo da adição e da subtração como auxiliar de cálculo; verifica-se o resultado por contagem continuada ("adicionar contando para a frente").

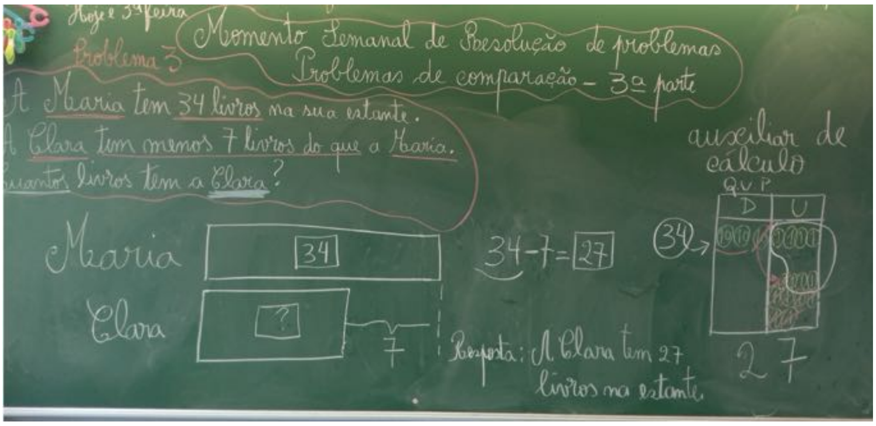

Figura 16: Utilização do modelo de comparação com contexto aditivo; neste exemplo, são conhecidos os valores da barra maior e da diferença entre as duas barras; pretende-se descobrir o valor da barra menor; é um problema que envolve a operação subtração; para comparar as duas barras, recorre-se no enunciado à palavra "menos"; também se podia ter usado a palavra "mais" ("A Maria tem mais 7 livros do que a Clara."); utiliza-se como auxiliar de cálculo o quadro de valor posicional e os círculos de valor posicional [18].

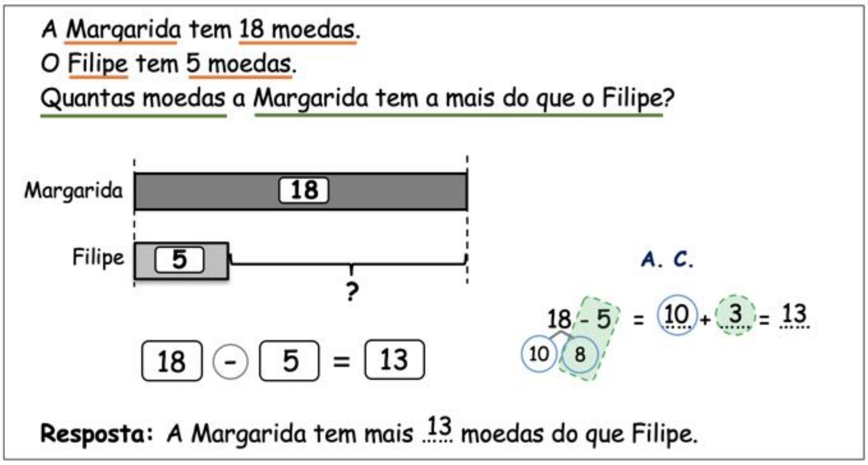

Figura 17: Utilização do modelo de comparação com contexto aditivo; neste exemplo, são conhecidos os valores da barra maior e da barra menor; pretende-se descobrir a diferença entre as duas barras; é um problema que envolve a operação subtração; para comparar as duas barras, recorre-se no enunciado à palavra "mais"; também se podia ter usado a palavra "menos" ("Quantas moedas o Filipe tem a menos do que a Margarida?"); utiliza-se como auxiliar de cálculo a estratégia "Decompor e subtrair às unidades" [4, 18]; decompõe-se 18 em 10 e 8; subtrai-se 5 a 8, obtendo-se 3; por fim, compõe-se 10 e 3, obtendo-se 13; então, $18 - 5 = 13$.

Nos exemplos das Figuras 15 e 16, a barra menor é maior do que metade da barra maior. Já no exemplo da Figura 17, a barra menor é menor do que metade da barra maior. Os alunos podem ser convidados a estimarem se a barra menor é maior ou menor do que metade da barra maior, de modo a facilitar o desenho das duas barras. Contudo, é importante que os alunos percebam que as barras constituem apenas um esquema que ajuda na identificação da operação a aplicar e na escrita da expressão matemática que permite dar resposta ao problema, pelo que o desenho das duas barras não necessita de ser encarado com o preciosismo de essas barras serem proporcionais aos valores envolvidos.

A Figura 18 ilustra que o modelo de comparação com contexto aditivo pode ser encarado como um modelo todo-partes, em que a barra maior representa o todo, enquanto que a barra menor e a diferença das barras representam as partes. Assim, se desconhecermos o todo (o valor da barra maior), devemos aplicar uma adição. Já se desconhecermos uma das partes (o valor da barra menor ou a diferença das barras), devemos aplicar uma subtração. De notar que as barras devem estar alinhadas à esquerda, não sendo relevante a ordem pela qual são desenhadas.

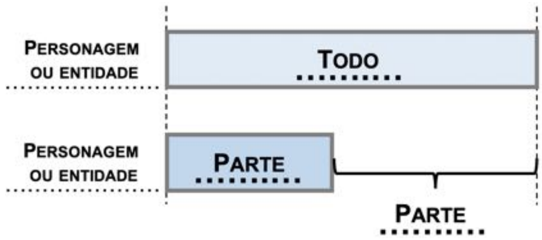

Figura 18: O modelo de comparação com contexto aditivo e a sua relação com o modelo todo-partes.

4. O modelo da multiplicação e da divisão

O modelo da multiplicação e da divisão é uma variante do modelo todo-partes, em que se considera uma barra única dividida num número variável de partes iguais. Para uma melhor interpretação do modelo da multiplicação e da divisão, importa ter em conta três sentidos dessas operações. Observe-se a Figura 19.

Figura 19: Imagem para aplicação do sentido aditivo da multiplicação e dos sentidos de partilha equitativa e de agrupamento da divisão (retirada de [13]).

Um olhar atento permite identificar três cestas, cada uma com cinco maçãs. São, portanto, três grupos iguais, ou seja, três grupos com o mesmo número de elementos. Podemos calcular o total de maçãs (o todo), recorrendo a uma adição de parcelas iguais, contando as maçãs de cinco em cinco: $5+5+5=15$. Neste tipo de situações, surge naturalmente a operação multiplicação, no seu *sentido aditivo*, como forma de simplificar a escrita da expressão matemática, obtendo-se $3\times 5=15$. A memorização da tabuada do 3 ou do 5 permite também um cálculo mais expedito do total de maçãs, deixando de ser necessário contar as maçãs de cinco em cinco.

Como já foi referido anteriormente, as parcelas numa adição, bem como o aditivo e o subtrativo numa subtração, têm sempre uma natureza em comum. Já em relação à multiplicação, os fatores não partilham de uma mesma natureza: no âmbito dos números naturais, o multiplicador (o fator da esquerda) indica o número de grupos/o número de cópias, enquanto que o multiplicando (o fator da direita) indica o número de elementos de cada grupo/aquilo que é copiado. Assim, $3 \times 5 = 15$, no contexto da situação concreta, indica que "3 grupos de 5 maçãs são 15 maçãs" ou "3 cópias de 5 maçãs são 15 maçãs".

A divisão, enquanto operação inversa da multiplicação, surge em situações em que conhecemos o produto e um dos fatores, mas desconhecemos o outro fator. Os dois sentidos da divisão que exemplificamos de seguida dependem, precisamente, do fator que não é conhecido: se desconhecermos o multiplicador temos o *sentido de agrupamento* ou *de medida*; por seu turno, se desconhecermos o multiplicando temos o *sentido de partilha equitativa.*

De regresso à Figura 19, apresentamos um exemplo de uma divisão por medida ou por agrupamento. O senhor Fernando tem 15 maçãs e pretende organizá-las em cestas, com 5 maçãs cada. Quantas cestas são necessárias? Por outras palavras, "quantas vezes o 5 cabe no 15"? Nesta situação, conhecemos o total de elementos (15 maçãs) e o número de elementos de cada grupo/cesta (5 maçãs). Pretendemos descobrir o número de grupos/cestas (o multiplicador), ou seja, pretendemos descobrir ? tal que $? \times 5 = 15$. A resposta obtém-se através da divisão $15 : 5 = 3$.

Passamos a um exemplo de uma divisão por partilha equitativa. A senhora Vera tem 15 maçãs e pretende distribuí-las igualmente por 3 cestas. Quantas maçãs ficam em cada cesta? Por outras palavras, "quanto calha a cada cesta"? Nesta situação, conhecemos o total de elementos (15 maçãs) e o número de grupos/cestas (3 cestas). Pretendemos descobrir o número de elementos de cada grupo/cesta (o multiplicando), ou seja, pretendemos descobrir ? tal que $3\times ? = 15$. A resposta obtém-se através da divisão $15 : 3 = 5$.

O sentido aditivo da multiplicação e os sentidos de partilha equitativa e de agrupamento da divisão estão contextualizados (para mais informações, ver [2, 9]), pelo que regressamos ao modelo da multiplicação e da divisão para uma análise mais detalhada. A Figura 20 ilustra este modelo que é formado por uma barra que representa o todo dividido em partes/grupos iguais. A Posição 1 indica o todo, ou seja, o total de elementos, a Posição 2 indica o número de elementos de cada grupo e a Posição 3 indica o número de grupos. Recorre-se a uma multiplicação quando se desconhece o todo (Posição 1). Por exemplo, num parque estão 5 bicicletas. Cada bicicleta tem 2 rodas. Quantas rodas têm as bicicletas ao todo? Coloca-se 2 na Posição 2, 5 na Posição 3 e ? na Posição 1. Este esquema conduz à expressão $5 \times 2 = ...$, que permite resolver o problema.

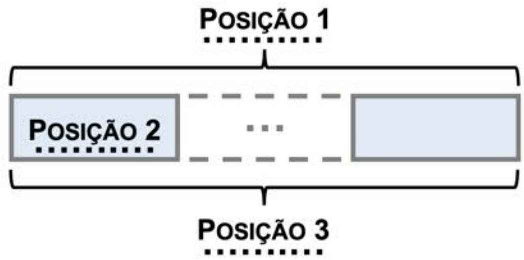

Figura 20: O modelo da multiplicação e da divisão.

Por seu turno, recorre-se a uma divisão por partilha equitativa quando se desconhece o número de elementos de cada grupo (Posição 2). Por exemplo, 5 amigos querem distribuir 40 berlindes igualmente entre si. Quantos berlindes deve receber cada amigo? Coloca-se 40 na Posição 1, 5 na Posição 3 e ? na Posição 2. Este esquema conduz à expressão $40 : 5 = ...$, que dá resposta ao problema.

Recorre-se a uma divisão por agrupamento quando se desconhece o número de grupos (Posição 3). Por exemplo, o Tiago tem 28 aviões. Ele pretende guardá-los em caixas iguais. Cada caixa leva 7 aviões. Quantas caixas são necessárias? Coloca-se 28 na Posição 1, 7 na Posição 2 e ? na Posição 3. Este esquema conduz à expressão $28 : 7 = ...$, que permite encontrar a solução.

Nos casos em que se conhece o número de grupos (Posição 3), ou seja, nas situações em que se aplica uma multiplicação no sentido aditivo ou uma divisão por partilha equitativa, é habitual representarem-se todas as partes iguais, se esse número não for muito elevado (ver Figura 21).

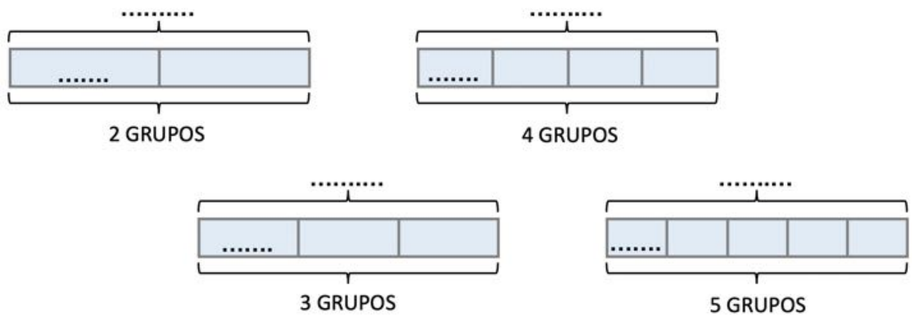

Figura 21: Exemplos do modelo da multiplicação e da divisão, em que se representam todas as partes iguais em que a barra está dividida.

Nas sessões "Matemática Passo a Passo" da temporada 2 do programa "Aprender em Casa" (disponíveis, à data de publicação deste artigo, na RTP Play e no link `http://sites.uac.pt/mea`), as autoras resolvem problemas de aplicação do modelo da multiplicação e da divisão (semanas 15 a 19, episódios do 2.º ano, por volta dos 35 minutos). Os problemas foram adaptados de [13]. Nas Figuras 22 a 24, ilustram-se mais alguns exemplos.

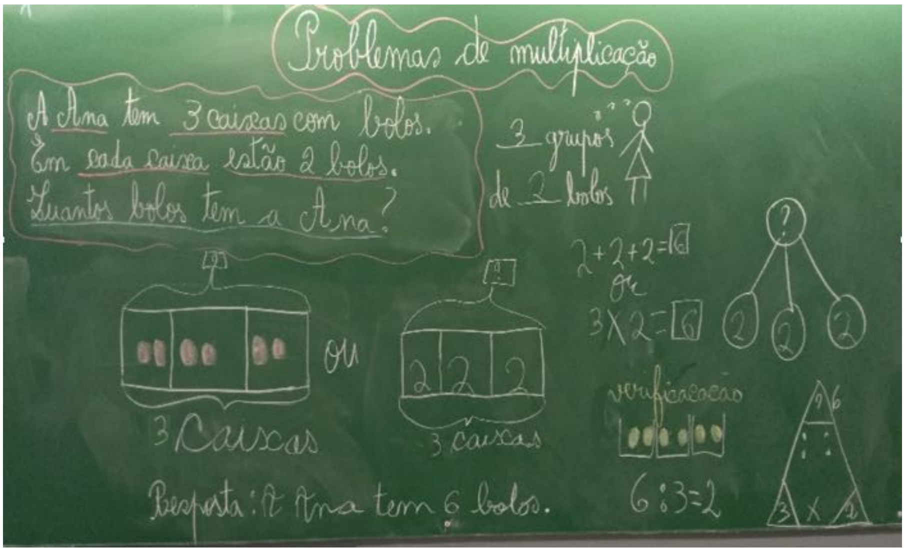

Figura 22: Utilização do modelo da multiplicação e da divisão; neste exemplo, são conhecidos o número de grupos (3 caixas) e o número de elementos de cada grupo (2 bolos por caixa); pretende-se descobrir o todo, ou seja, o total de elementos (o total de bolos); é um problema que envolve o sentido aditivo da multiplicação; de modo a apelar à concretização da situação apresentada, começa-se por representar os elementos de cada grupo com um registo pictórico (pequenos círculos), recorrendo-se, posteriormente, à escrita dos numerais; o modelo conduz à expressão $2 + 2 + 2 = ...$ ou, em alternativa, a $3 \times 2 = ...$, ilustrando assim o sentido aditivo da multiplicação; o resultado pode ser obtido contando de 2 em 2, seguindo o esquema todo-partes ilustrado no lado direito do quadro; em alternativa, de modo a obter-se o resultado de forma mais expedita, pode-se recorrer à memorização da tabuada do 2 ou do 3; a verificação é feita através da operação inversa, constatando que $6 : 3 = 2$, ou seja, se quisermos distribuir 6 bolos igualmente por 3 caixas, ficamos, de facto, com 2 bolos em cada caixa (na verificação aplica-se uma divisão por partilha equitativa); também se podia ter verificado o problema, aplicando uma divisão por agrupamento, mediante a expressão $6 : 2 = 3$ (se quisermos organizar 6 bolos em caixas de 2 bolos cada, precisamos de 3 caixas); recorre-se ao triângulo da multiplicação e da divisão [2], que permite relacionar três números (o produto e os dois fatores) através de quatro factos básicos, dois envolvendo a multiplicação e dois a divisão; por exemplo, para o produto 6 e os fatores 3 e 2, temos: $3 \times 2 = 6$, $2 \times 3 = 6$, $6 : 3 = 2$ e $6 : 2 = 3$.

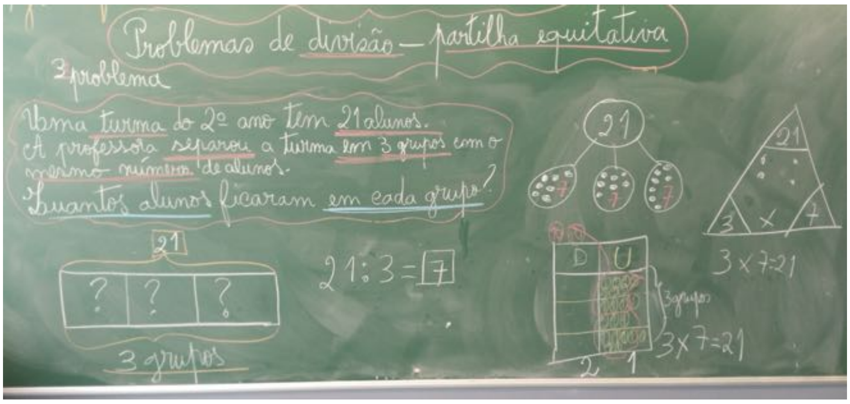

Figura 23: Utilização do modelo da multiplicação e da divisão; neste exemplo, são conhecidos o número de grupos (3 grupos) e o total de elementos (21 alunos); pretende-se descobrir o número de elementos de cada grupo (o número de alunos em cada grupo); é um problema de divisão por partilha equitativa; o modelo conduz à expressão 21 : 3 = ...; o resultado foi obtido de duas formas diferentes: distribuindo 21 pequenos círculos, que representam os alunos, um a um, por 3 grupos (de acordo com o registo do esquema todo-partes) e através do triângulo da multiplicação e da divisão, verificando que o resultado pretendido é o número ? tal que $3 \times ? = 21$ (articula-se, assim, dois factos básicos espelhados no triângulo, $21 : 3 = 7$ e $3 \times 7 = 21$); a verificação de $3 \times 7 = 21$ fez-se através do quadro de valor posicional e dos círculos de valor posicional (constatando que 3 cópias de 7 unidades são 2 dezenas e 1 unidade).

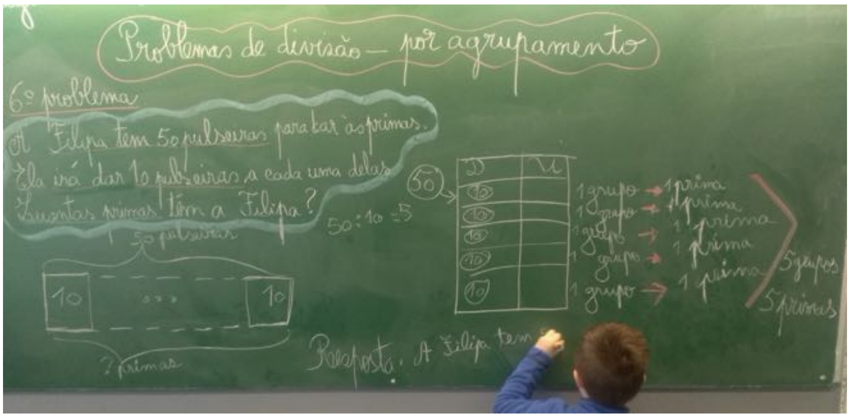

Figura 24: Utilização do modelo da multiplicação e da divisão; neste exemplo, são conhecidos o número de elementos de cada grupo (10 pulseiras) e o total de elementos (50 pulseiras); pretende-se descobrir o número de grupos (o número de primas da Filipa); é um problema de divisão por agrupamento; o modelo conduz à expressão 50 : 10 = ...; o resultado foi obtido através do quadro de valor posicional e dos círculos de valor posicional, verificando que, com 5 dezenas (50), é possível fazer 5 grupos de 1 dezena (10).

5. O modelo de comparação com contexto multiplicativo

As operações multiplicação e divisão também podem ser aplicadas em situações de comparação, envolvendo pelo menos duas personagens/entidades.

A Figura 25 ilustra o modelo de comparação com contexto multiplicativo, em que se considera uma barra para cada personagem/entidade. Recorre-se a uma multiplicação para aplicar um operador multiplicativo: dobro ("duas cópias de"), triplo ("três cópias de"), quádruplo ("quatro cópias de"), quíntuplo ("cinco cópias de"), etc. Por exemplo, a Cláudia tem 5 anéis. A mãe tem o triplo dos anéis da Cláudia. Quantos anéis tem a mãe da Cláudia? Coloca-se 5 na Posição 1 e ? na Posição 2. Neste caso, a barra da mãe da Cláudia é três vezes maior do que a barra da Cláudia. Este esquema conduz à expressão $3 \times 5 = ...$ ("três cópias de 5"), que permite resolver o problema.

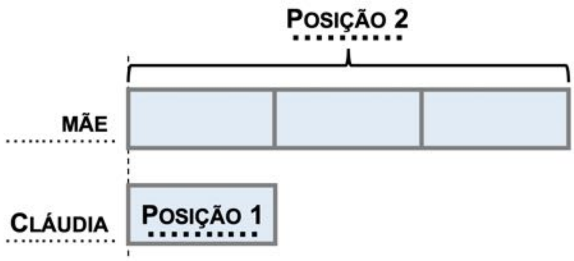

Figura 25: O modelo de comparação com contexto multiplicativo.

Por seu turno, recorre-se a uma divisão para aplicar um operador partitivo: metade ("uma de duas partes iguais"), terça parte ("uma de três partes iguais"), quarta parte ("uma de quatro partes iguais"), quinta parte ("uma de cinco partes iguais"), etc. Por exemplo, a mãe da Cláudia tem 15 anéis. A Cláudia tem a terça parte dos anéis da mãe. Quantos anéis tem a Cláudia? Coloca-se 15 na Posição 2 e ? na Posição 1. Neste exemplo, a barra da Cláudia continua a ser três vezes menor do que a barra da mãe. Este esquema conduz à expressão $15 : 3 = ...$ (organizam-se os 15 anéis em três partes/grupos iguais e escolhe-se uma dessas partes/grupos), que dá resposta ao problema.

Nesta versão simples do modelo de comparação com contexto multiplicativo, a barra maior corresponde a um determinado número de cópias da barra menor. De notar que as barras devem estar alinhadas à esquerda, não sendo relevante a ordem pela qual são desenhadas.

Nas sessões "Matemática Passo a Passo" da temporada 2 do programa "Aprender em Casa" (disponíveis, à data de publicação deste artigo, na RTP Play e no link `http://sites.uac.pt/mea`), as autoras resolvem problemas de comparação com contexto multiplicativo (semanas 20 a 24, episódios do 2.º ano, por volta dos 35 minutos). Os problemas foram adaptados de [13]. Nas Figuras 26 a 29, ilustram-se mais alguns exemplos.

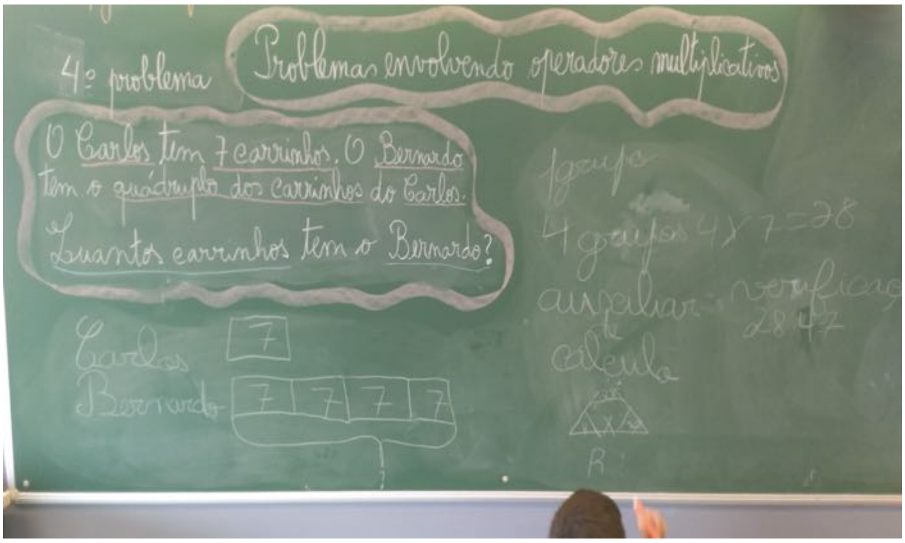

Figura 26: Utilização do modelo de comparação com contexto multiplicativo; neste exemplo, aplica-se o quádruplo de 7, calculando 4 cópias de 7 (4 grupos de 7); usa-se o triângulo da multiplicação e da divisão e aplica-se a operação inversa na verificação dos cálculos: 28 : 4 = 7 (a quarta parte de 28 é 7).

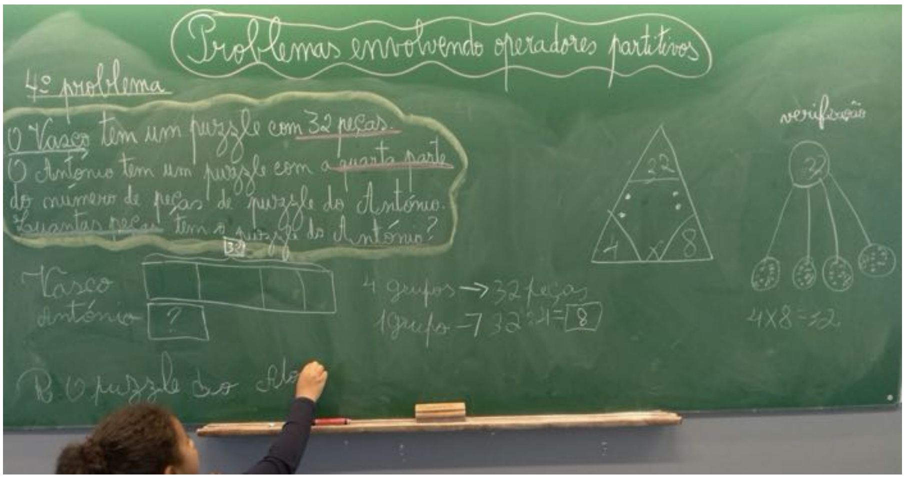

Figura 27: Utilização do modelo de comparação com contexto multiplicativo; neste exemplo, aplica-se a quarta parte de 32; organizam-se as 32 peças em quatro partes/grupos iguais e escolhe-se uma dessas partes/grupos; usa-se o triângulo da multiplicação e da divisão e aplica-se a operação inversa na verificação dos cálculos: $4 \times 8 = 32$, calculando 4 cópias de 8 (o quádruplo de 8 é 32).

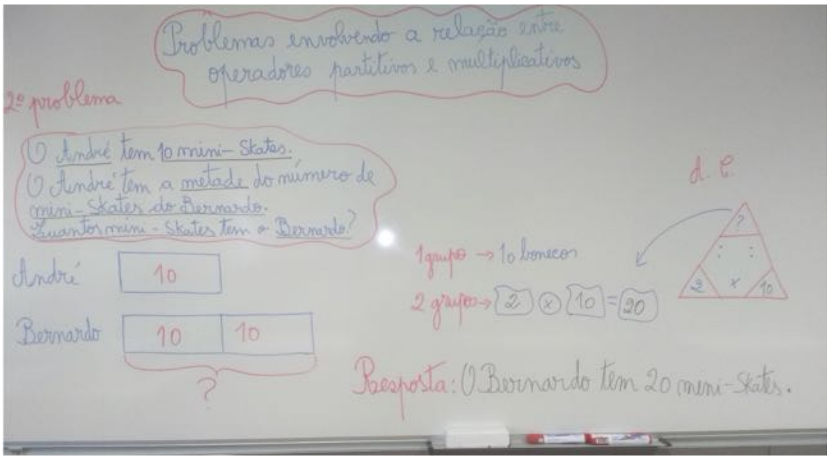

Figura 28: Utilização do modelo de comparação com contexto multiplicativo; neste exemplo, aplica-se o dobro de 10, calculando 2 cópias de 10 (2 grupos de 10); usa-se o triângulo da multiplicação e da divisão; observe-se que no enunciado usa-se a palavra "metade", mas na resolução aplica-se o operador multiplicativo correspondente (de facto, se o André tem metade dos mini-skates do Bernardo, então o Bernardo tem o dobro dos mini-skates do André).

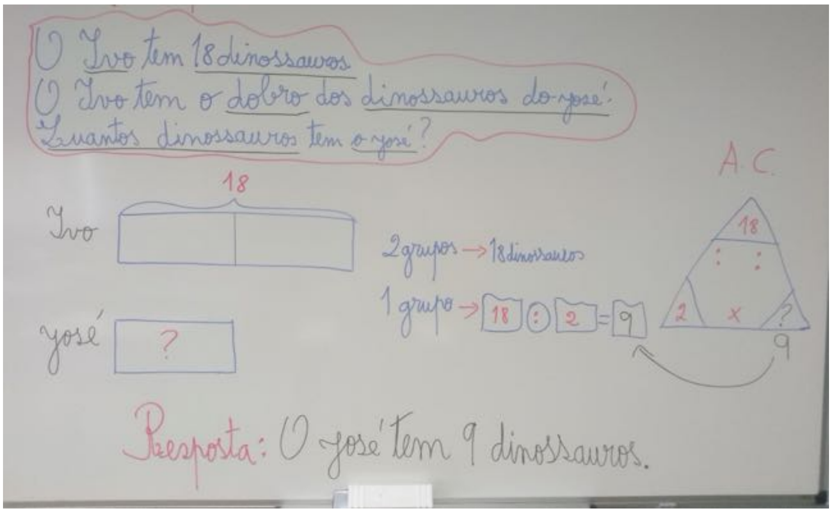

Figura 29: Utilização do modelo de comparação com contexto multiplicativo; neste exemplo, aplica-se a metade de 18; organizam-se os 18 dinossauros em duas partes/grupos iguais e escolhe-se uma dessas partes/grupos; usa-se o triângulo da multiplicação e da divisão, de modo a relacionar as expressões $18 : 2 = 9$ e $2 \times 9 = 18$; observe-se que no enunciado usa-se a palavra "dobro", mas na resolução aplica-se o operador partitivo correspondente (de facto, se o Ivo tem o dobro dos dinossauros do José, então o José tem metade dos dinossauros do Ivo).

6. O modelo de barras em problemas de dois passos

Neste tópico, analisam-se várias tipologias do modelo de barras para problemas de dois passos (problemas que se resolvem com duas operações), que se baseiam nas quatro tipologias do modelo de barras para os problemas de um passo, expostas nos tópicos 2 a 5 deste artigo. Os exemplos explorados são adequados para os 2.º e 3.º anos de escolaridade. Nas Figuras 30 a 46, analisam-se as diferentes tipologias.

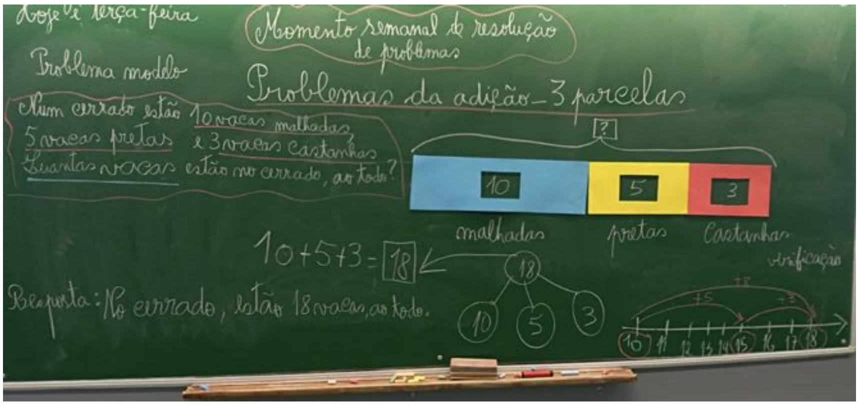

Figura 30: Nos problemas em que é necessário aplicar duas vezes a operação adição, pode-se considerar uma barra única dividida em três partes, recorrendo ao modelo todo-partes.

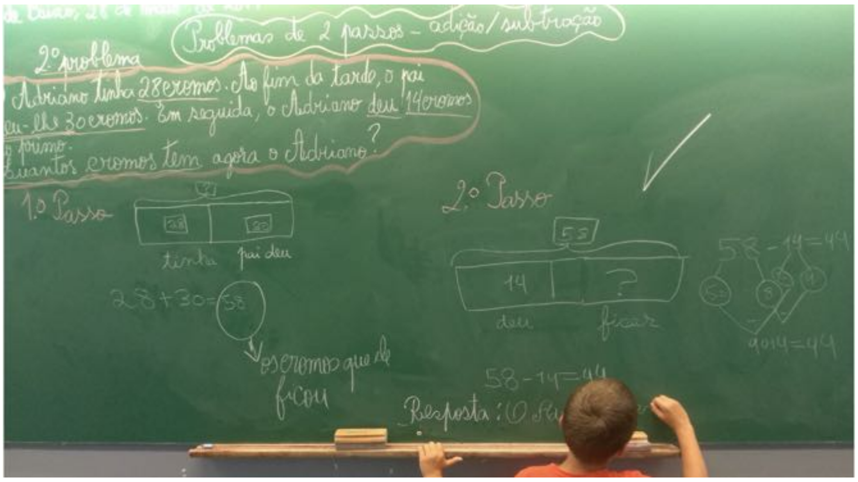

Figura 31: Neste problema, aplica-se uma adição no 1.º passo e uma subtração no 2.º passo, recorrendo a dois modelos todo-partes; no 2.º passo, usa-se uma teia de cálculo [4, 18]; é importante que os alunos percebam que o resultado do 1.º passo deve ser usado no 2.º passo.

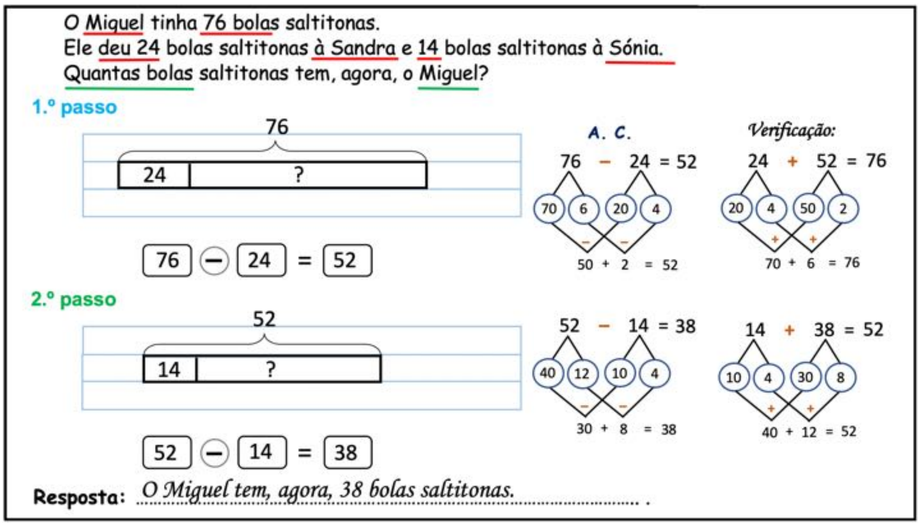

Figura 32: Neste problema, aplica-se uma subtração em cada um dos dois passos, recorrendo a modelos todo-partes; em alternativa, podia-se aplicar uma adição $(24 + 14 = 38)$, seguida de uma subtração $(76 - 38 = 38)$; nos dois passos, usam-se teias de cálculo [4, 18], como auxiliar de cálculo e na verificação; é importante que os alunos percebam que o resultado do 1.º passo deve ser usado no 2.º passo.

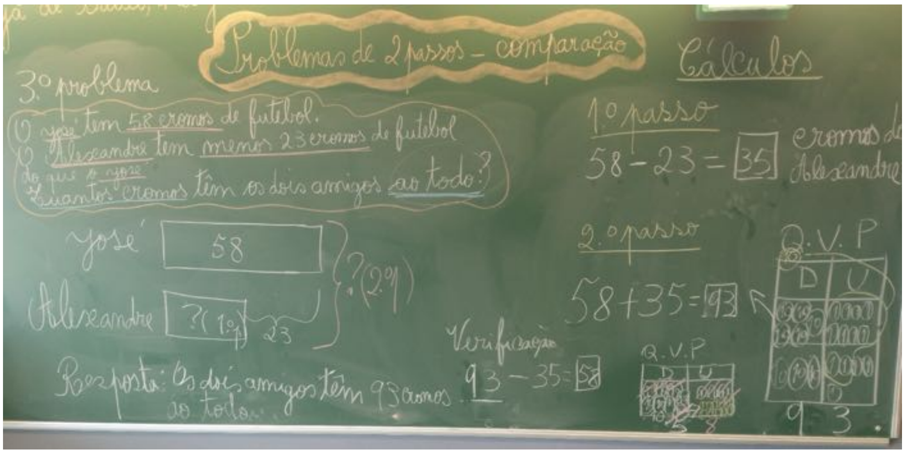

Figura 33: Problema de comparação com contexto aditivo, de dois passos; normalmente, neste tipo de problemas fornece-se o valor de uma barra e a diferença das barras, pedindo-se a soma dos valores das duas barras; o 1.º passo consiste no cálculo do valor da barra que se desconhece (neste caso, aplica-se uma subtração); é importante que os alunos percebam que o resultado do 1.º passo é necessário para o 2.º passo; no 2.º passo usa-se o quadro de valor posicional, com os círculos de valor posicional [18], como auxiliar de cálculo e na verificação.

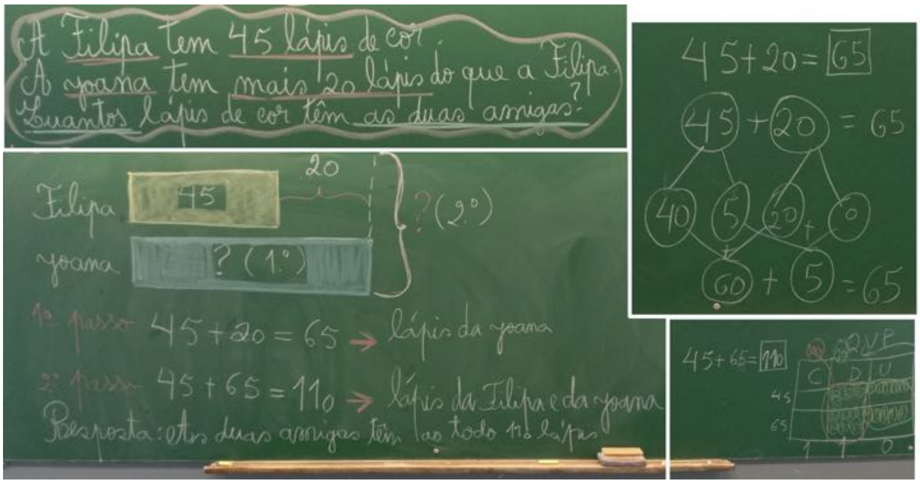

Figura 34: Problema de comparação com contexto aditivo, de dois passos; fornece-se o valor de uma barra e a diferença das barras, pedindo-se a soma dos valores das duas barras; o 1.º passo consiste no cálculo do valor da barra que se desconhece (neste caso, aplica-se uma adição); é importante que os alunos percebam que o resultado do 1.º passo é necessário para o 2.º passo; no 1.º passo usa-se uma teia de cálculo [4, 18] e no 2.º passo usa-se o quadro de valor posicional, com os círculos de valor posicional [18].

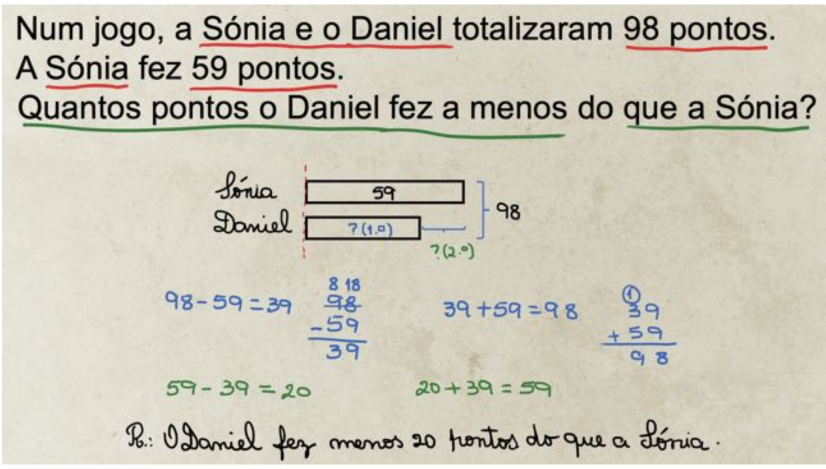

Figura 35: Problema de comparação com contexto aditivo, de dois passos; fornece-se o valor de uma barra e a soma dos valores das duas barras, pedindo-se a diferença das barras; o 1.º passo consiste no cálculo do valor da barra que se desconhece; é importante que os alunos percebam que o resultado do 1.º passo é necessário para o 2.º passo; no 1.º passo, recorre-se ao algoritmo da subtração por decomposição [18], como auxiliar de cálculo, e ao algoritmo da adição [18], para verificação; a verificação de cada cálculo principal é feita à direita.

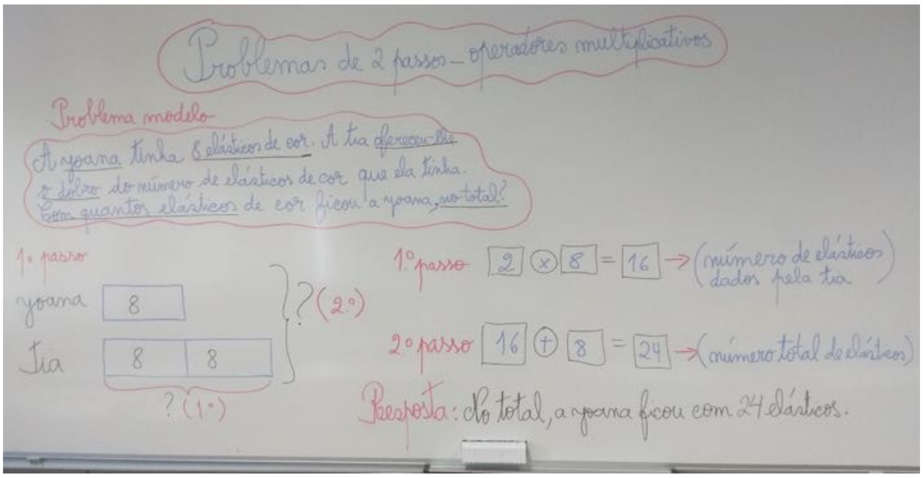

Figura 36: Problema de comparação com contexto multiplicativo, de dois passos; normalmente, neste tipo de problemas sabe-se o valor de uma das barras e pretende-se descobrir a soma dos valores das duas barras; o 1.º passo consiste no cálculo do valor da barra que se desconhece (neste caso, aplica-se o operador multiplicativo "dobro"); neste exemplo, também era possível resolver o problema num só passo, ao analisar o esquema de barras, concluindo-se que o resultado pretendido resulta de três cópias do 8 ($3 \times 8 = 24$).

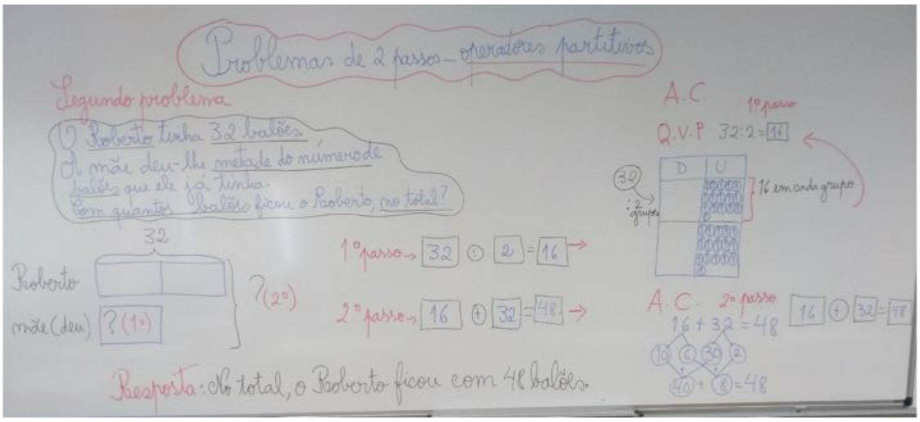

Figura 37: Problema de comparação com contexto multiplicativo, de dois passos; sabe-se o valor de uma das barras e pretende-se descobrir a soma dos valores das duas barras; o 1.º passo consiste no cálculo do valor da barra que se desconhece (neste caso, aplica-se o operador partitivo "metade"); como auxiliares de cálculo, recorre-se ao quadro de valor posicional e aos círculos de valor posicional, para o 1.º passo, e a uma teia de cálculo, para o 2.º passo.

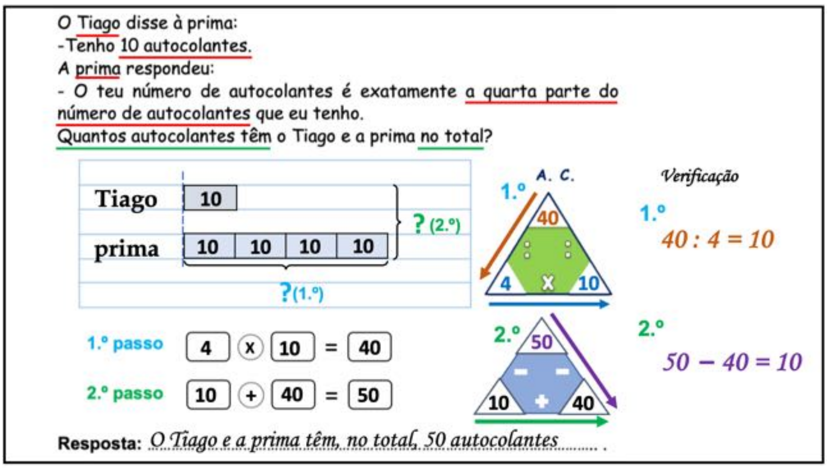

Figura 38: Problema de comparação com contexto multiplicativo, de dois passos; o 1.º passo consiste no cálculo do valor da barra que se desconhece (neste caso, aplica-se o operador multiplicativo “quádruplo”, porque se o Tiago tem a quarta parte dos autocolantes da prima, então a prima tem o quádruplo dos autocolantes do Tiago); recorre-se ao triângulo da multiplicação e da divisão, para o 1.º passo, e ao triângulo da adição e da subtração, para o 2.º passo; neste exemplo, também era possível resolver o problema num só passo, ao analisar o esquema de barras, concluindo-se que o resultado pretendido resulta de cinco cópias do 10 ($5 \times 10 = 50$).

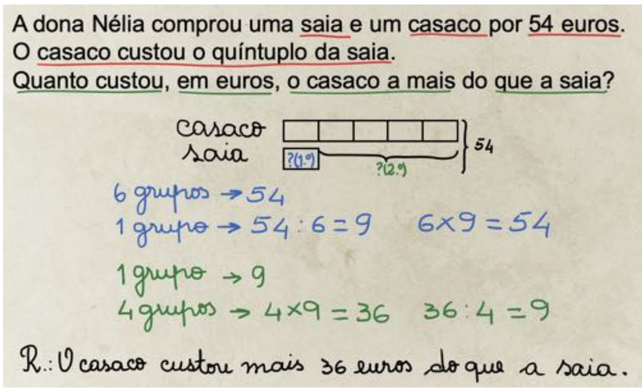

Figura 39: Problema de comparação com contexto multiplicativo, de dois passos; neste problema, ao contrário dos anteriores, conhece-se a soma dos valores das duas barras, desconhecendo-se os valores de cada barra; contudo, observando com atenção o esquema de barras, em que a barra que representa o preço do casaco é cinco vezes maior do que a barra que representa o preço da saia, conclui-se que 54 : 6 fornece o valor de cada uma das seis partes iguais que compõem as duas barras; por seu turno, o 2.º passo consiste em calcular o valor de quatro dessas partes, que correspondem à diferença entre as duas barras.

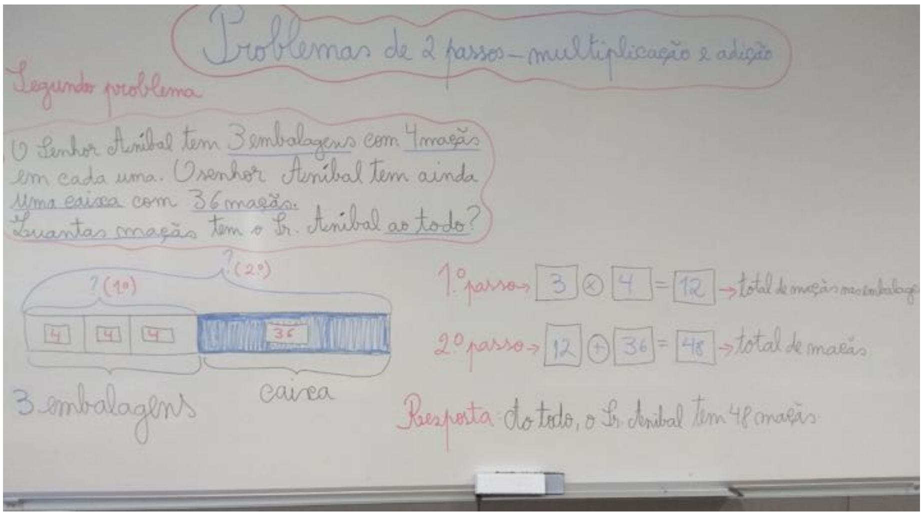

Figura 40: Problema de dois passos, envolvendo uma multiplicação e uma adição; o esquema desenhado é uma combinação do modelo da multiplicação e da divisão (que permite deduzir a expressão $3 \times 4 = 12$) com o modelo todo-partes (que permite chegar à expressão $12 + 36 = 48$).

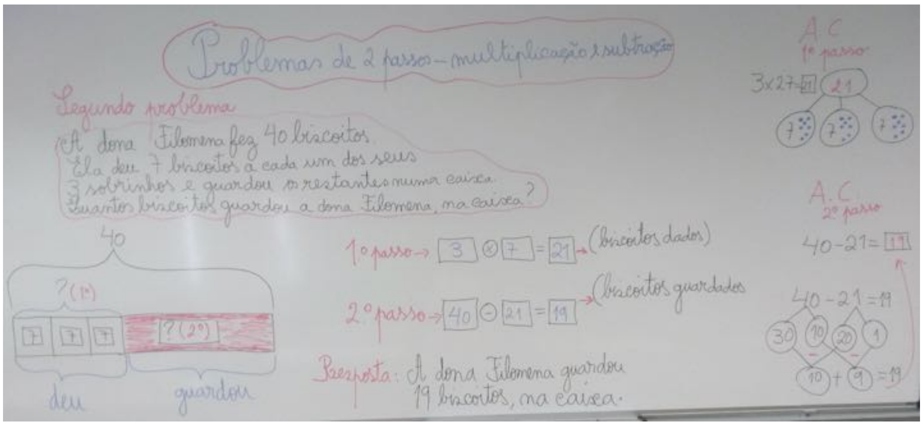

Figura 41: Problema de dois passos, envolvendo uma multiplicação e uma subtração; o esquema desenhado é uma combinação do modelo da multiplicação e da divisão (que permite deduzir a expressão $3 \times 7 = 21$) com o modelo todo-partes (que permite chegar à expressão $40 - 21 = 19$); como auxiliares de cálculo, recorre-se a um esquema todo-partes e a uma teia.

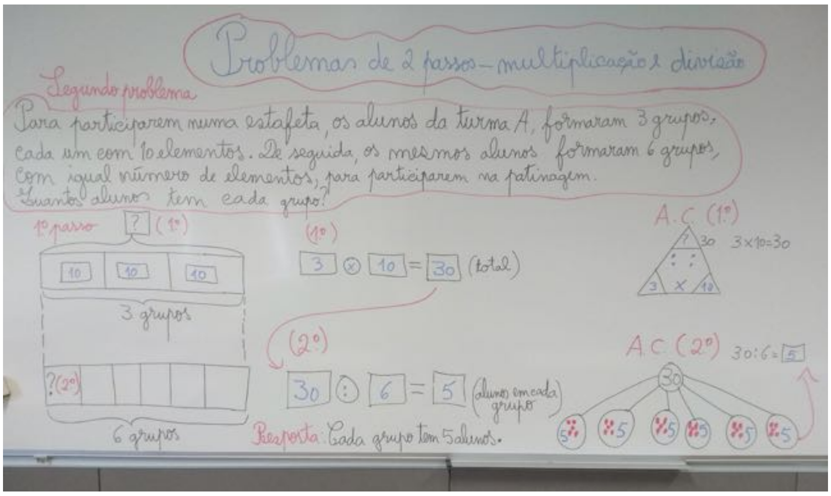

Figura 42: Problema de dois passos, envolvendo uma multiplicação e uma divisão; recorre-se a dois modelos da multiplicação e da divisão: o primeiro para deduzir a expressão $3 \times 10 = 30$, aplicando uma multiplicação, e o segundo para chegar à expressão $30 : 6 = 5$, uma divisão por partilha equitativa em que se desconhece o número de elementos de cada grupo; como auxiliares de cálculo, recorre-se ao triângulo da multiplicação e da divisão e a um esquema todo-partes; repare-se que a combinação de dois modelos da multiplicação e da divisão traduz, basicamente, uma reorganização da quantidade de elementos em cada grupo; na verdade, uma observação atenta ao esquema de barras permite, facilmente, deduzir a resposta do problema, sem ter que recorrer ao 1.º passo.

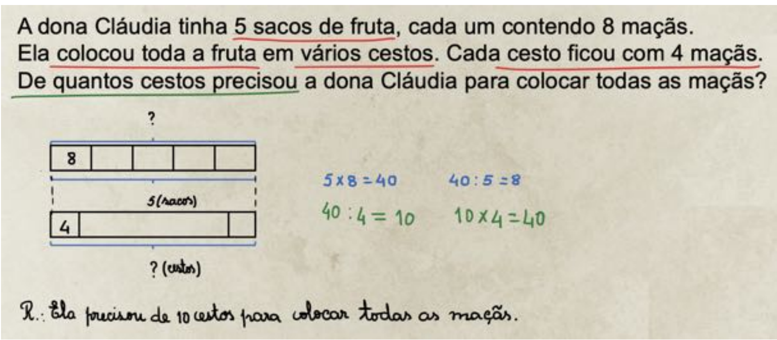

Figura 43: Problema de dois passos, envolvendo uma multiplicação e uma divisão; recorre-se a dois modelos da multiplicação e da divisão: o primeiro para deduzir a expressão $5 \times 8 = 40$, aplicando uma multiplicação, e o segundo para chegar à expressão $40 : 4 = 10$, uma divisão por agrupamento em que se desconhece o número de grupos; repare-se que a combinação de dois modelos da multiplicação e da divisão traduz uma reorganização da quantidade de elementos em cada grupo; além disso, uma observação atenta ao esquema de barras permite deduzir a resposta do problema, sem recorrer ao 1.º passo.

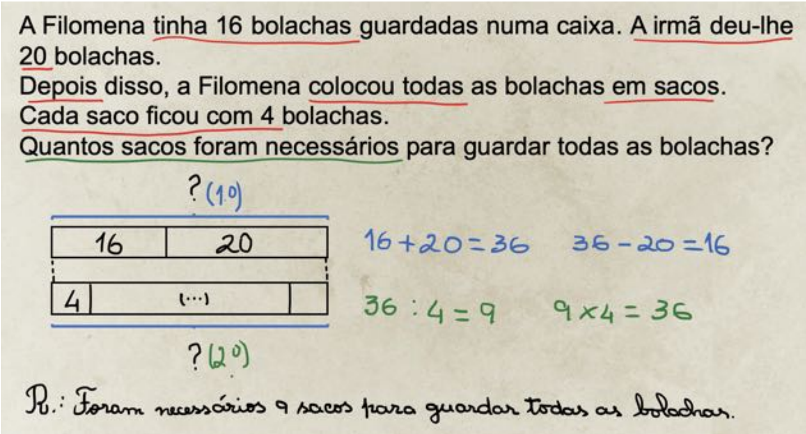

Figura 44: Problema de dois passos, envolvendo uma adição e uma divisão; recorre-se a um modelo todo-partes para deduzir a expressão $16 + 20 = 36$ e a um modelo da multiplicação e da divisão para chegar à expressão $36 : 4 = 9$, uma divisão por agrupamento em que se desconhece o número de grupos; repare-se que a combinação dos dois modelos traduz uma reorganização das partes em que o todo está dividido; no 2.º passo, também se pode aplicar uma divisão por partilha equitativa; no exemplo apresentado, basta substituir as três últimas frases do enunciado por "Depois disso, a Filomena distribuiu todas as bolachas igualmente por 9 sacos. Quantas bolachas ficaram em cada saco?".

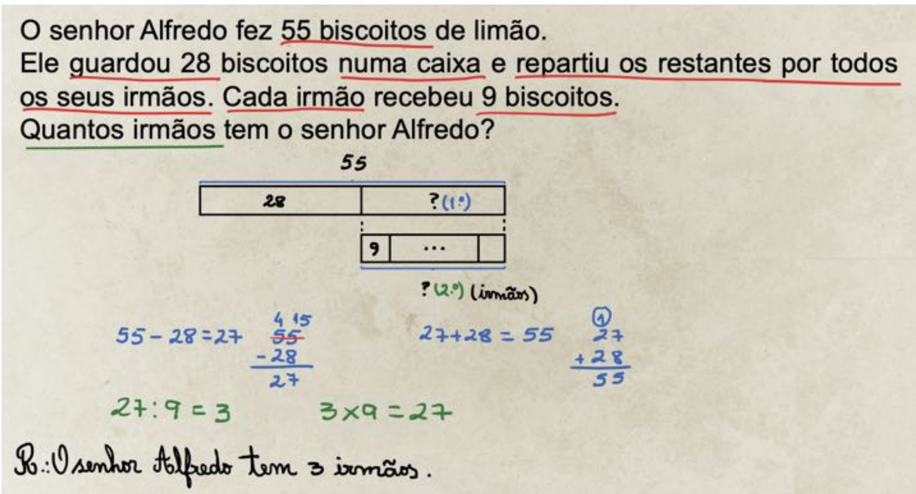

Figura 45: Problema de dois passos, envolvendo uma subtração e uma divisão; recorre-se a um modelo todo-partes para deduzir a expressão $55 - 28 = 27$ e a um modelo da multiplicação e da divisão para chegar à expressão $27 : 9 = 3$, uma divisão por agrupamento em que se desconhece o número de grupos; no 1.º passo, recorre-se ao algoritmo da subtração por decomposição [18], como auxiliar de cálculo, e ao algoritmo da adição [18], para verificação.

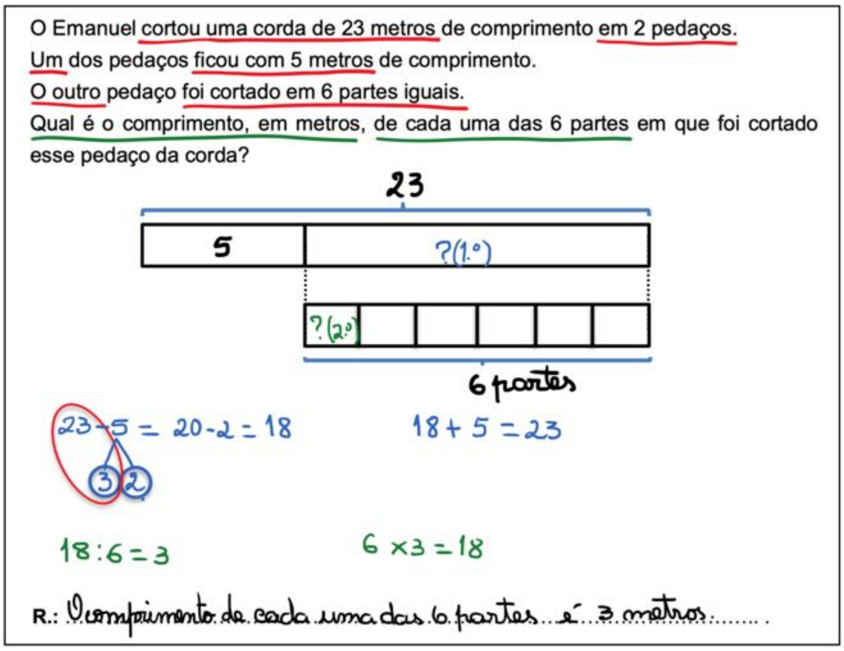

Figura 46: Problema de dois passos, envolvendo uma subtração e uma divisão; recorre-se a um modelo todo-partes para deduzir a expressão $23 - 5 = 18$ e a um modelo da multiplicação e da divisão para chegar à expressão $18 : 6 = 3$, uma divisão por partilha equitativa em que se desconhece o número de elementos de cada grupo; no 1.º passo, recorre-se à estratégia "Retirar as unidades e subtrair o restante às dezenas" [4, 18].

Nas sessões "Matemática Passo a Passo" da temporada 2 do programa "Aprender em Casa" (disponíveis, à data de publicação deste artigo, na RTP Play e no link `http://sites.uac.pt/mea`), as autoras resolvem problemas de dois passos com o modelo de barras (semanas 25 a 33, para os episódios do 2.º ano; semanas 8 a 22, para os episódios do 3.º ano; por volta dos 35 minutos). Os problemas foram adaptados de [13] e de [14].

7. O modelo de barras em problemas de três ou mais passos

Neste último tópico, analisam-se algumas tipologias do modelo de barras para problemas de três ou mais passos (problemas que se resolvem com três ou mais operações). Com o aumento do grau de dificuldade dos problemas, torna-se mais significativo o impacto do modelo de barras como representação pictórica de apoio à resolução de problemas. Contudo, este impacto positivo depende do investimento prévio na aplicação do modelo de barras a problemas mais simples, daí a importância da aposta na resolução de problemas de um e dois passos, com recurso ao modelo de barras, essencialmente ao longo dos 1.º e 2.º anos de escolaridade, bem como na primeira metade do 3.º ano de escolaridade.

Os exemplos que serão objeto de análise continuam a obter-se da combinação das quatro tipologias do modelo de barras para os problemas de um passo, expostas nos tópicos 2 a 5 deste artigo, e são adequados para os 3.º e 4.º anos de escolaridade. Nas Figuras 47 a 61, analisam-se as diferentes tipologias.

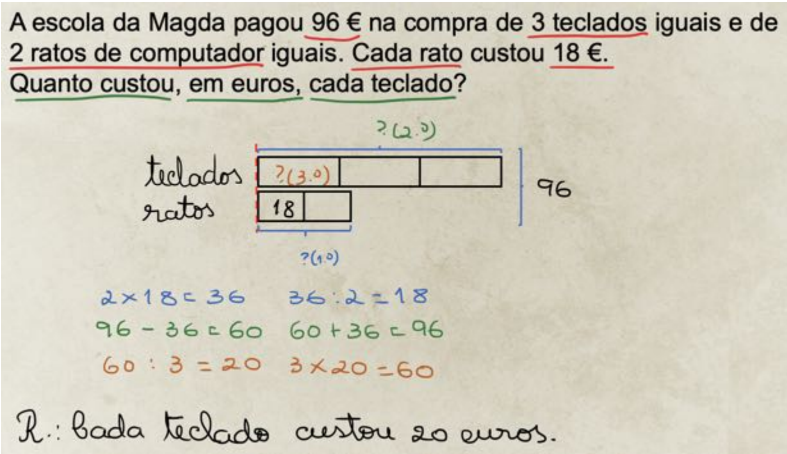

Figura 47: Problema de três passos, envolvendo uma multiplicação, uma subtração e uma divisão; desenham-se duas barras, em que uma representa o custo dos três teclados iguais e a outra o custo dos dois ratos iguais; assinala-se com uma chaveta o custo total da compra; sabe-se, ainda, que cada rato custa 18 euros; primeiro, calcula-se o custo dos dois ratos; depois, subtrai-se esse valor ao custo total, para obter o custo dos três teclados; por fim, divide-se esse valor por três, de modo a determinar o custo de cada teclado.

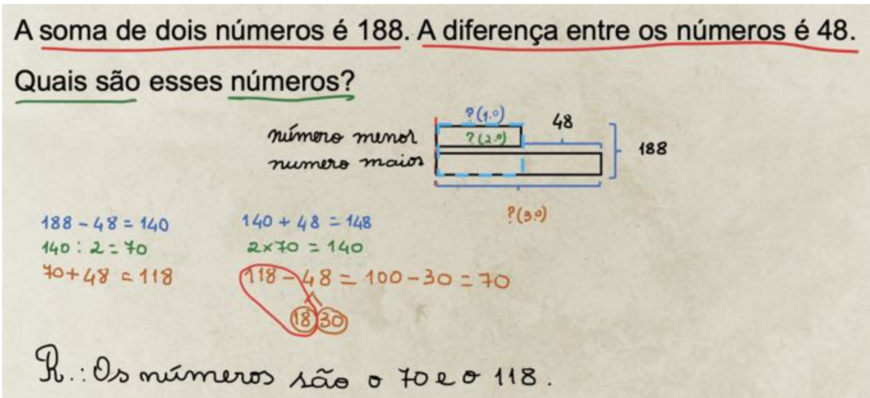

Figura 48: Problema de três passos, envolvendo uma subtração, uma divisão e uma adição; desenham-se duas barras, uma para cada número; regista-se a soma e a diferença desses números; subtrai-se 48 a 188 de modo a obter o dobro do número menor; divide-se por 2, determinando o número menor; adiciona-se 48 ao número menor, obtendo-se o número maior.

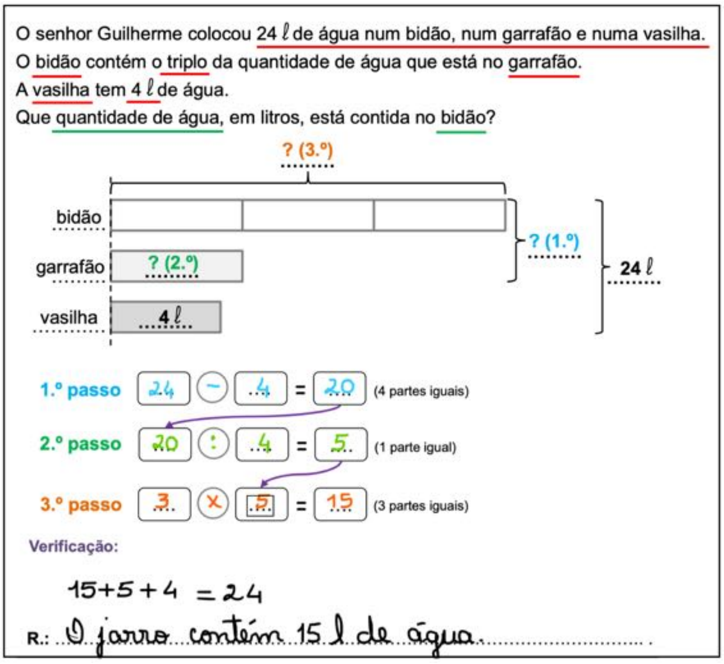

Figura 49: Problema de três passos, envolvendo uma subtração, uma divisão e uma multiplicação; desenha-se uma barra para cada tipo de recipiente, de acordo com os dados do enunciado; retira-se 4 a 24, de modo a obter a quantidade de água conjunta do garrafão e do bidão; divide-se esse valor por 4, para determinar a quantidade de água do garrafão; por fim, calcula-se o triplo do valor obtido no passo anterior, de modo a obter a quantidade de água do bidão.

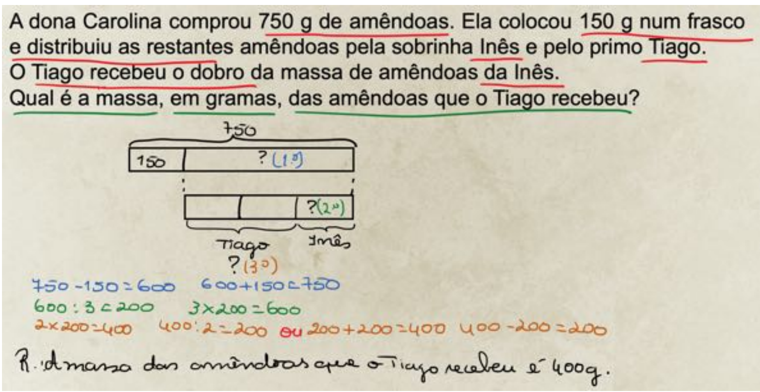

Figura 50: Problema de três passos, envolvendo uma subtração, uma divisão e uma multiplicação (ou uma adição); trata-se de uma variante da tipologia apresentada na Figura 46, com mais um passo; como o Tiago recebeu o dobro da massa que a Inês recebeu, então a massa que foi distribuída pelos familiares da dona Carolina deve ser dividida em três grupos iguais.

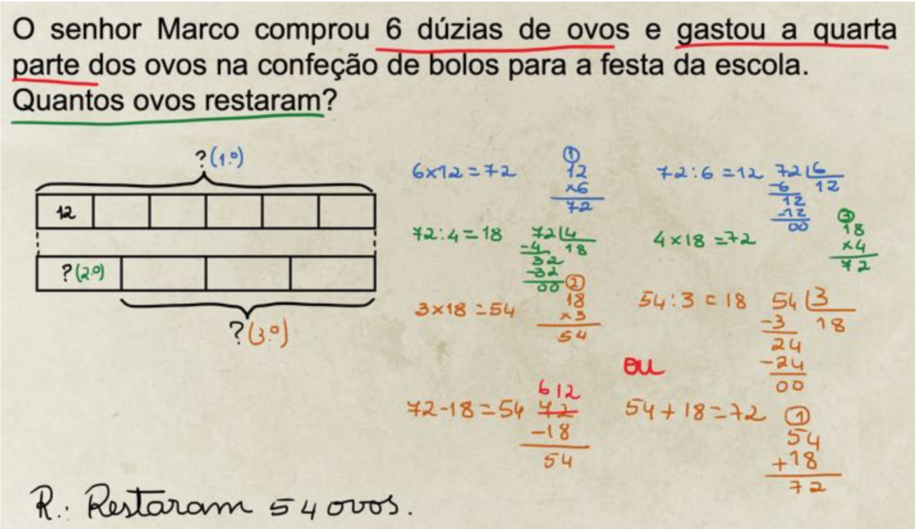

Figura 51: Problema de três passos, envolvendo uma multiplicação, uma divisão e uma multiplicação (ou uma subtração); trata-se de uma variante da tipologia apresentada na Figura 42, com mais um passo; para efetuar os cálculos e para a sua verificação (à direita), recorre-se aos algoritmos das diferentes operações.

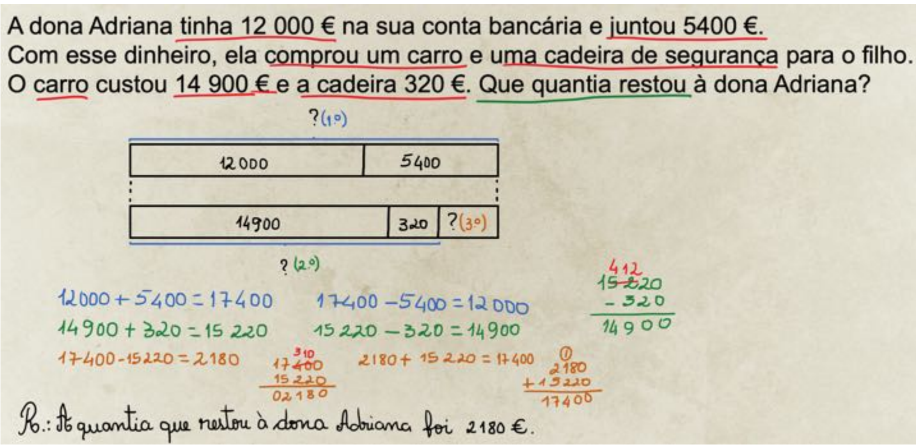

Figura 52: Problema de três passos, envolvendo duas adições e uma subtração; adiciona-se 12 000 e 5400, de modo a obter a quantia total que a dona Adriana tinha à sua disposição; adiciona-se 14 900 e 320, para determinar o custo total dos dois produtos que foram comprados; por fim, subtrai-se o valor obtido no 2.º passo ao do 1.º passo, para encontrar a quantia que restou; em alternativa, podia-se ter aplicado a adição do 1.º passo, seguida de duas subtrações, retirando sucessivamente os valores dos dois produtos comprados, obtendo o mesmo resultado como resposta; recorre-se a dois modelos todo-partes, que representam o mesmo todo organizado em partes diferentes.

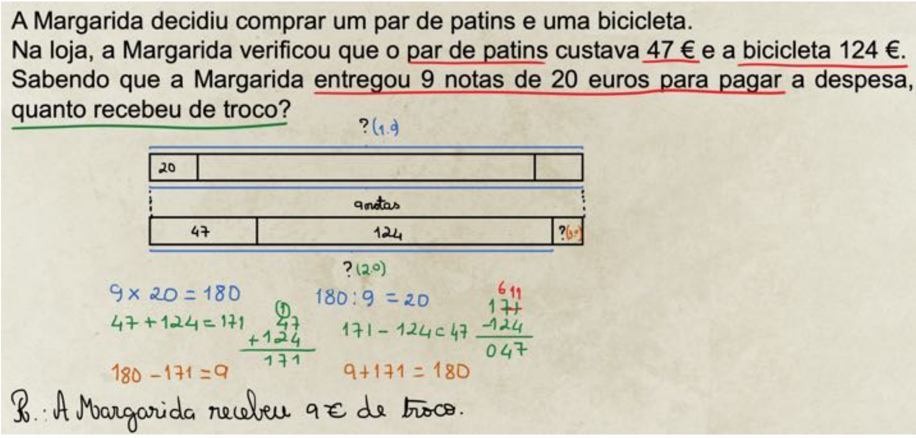

Figura 53: Problema de três passos, envolvendo uma multiplicação, uma adição e uma subtração; multiplica-se 9 por 20, de modo a obter a quantia total que a Margarida tinha à sua disposição; adiciona-se 47 e 124, para determinar o custo total dos dois produtos que foram comprados; por fim, subtrai-se o valor obtido no 2.º passo ao do 1.º passo, para encontrar a quantia que restou; em alternativa, podia-se ter aplicado a multiplicação do 1.º passo, seguida de duas subtrações, retirando sucessivamente os valores dos dois produtos comprados, obtendo o mesmo resultado como resposta; recorre-se a um modelo da multiplicação e da divisão e a um modelo todo-partes, que representam o mesmo todo organizado em partes diferentes.

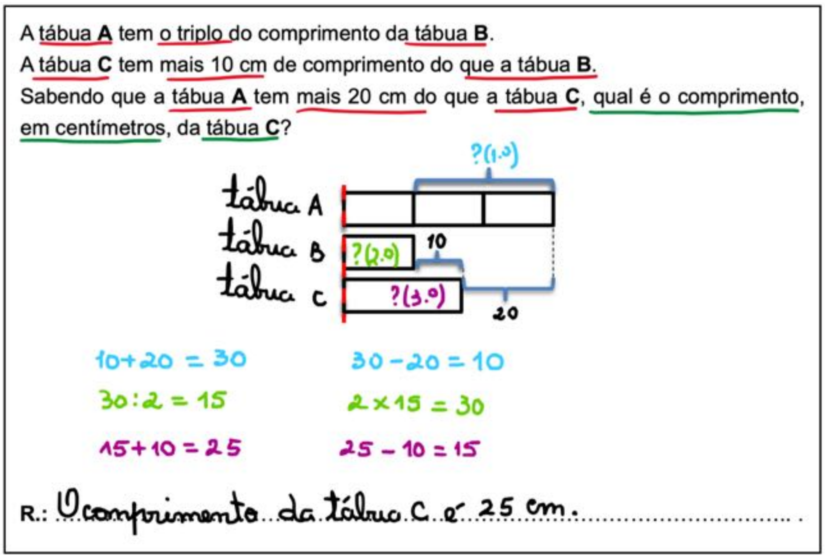

Figura 54: Problema de três passos, envolvendo duas adições e uma divisão; note-se que a combinação dos modelos de comparação com contextos aditivo e multiplicativo é muito útil para uma resolução expedita do problema.

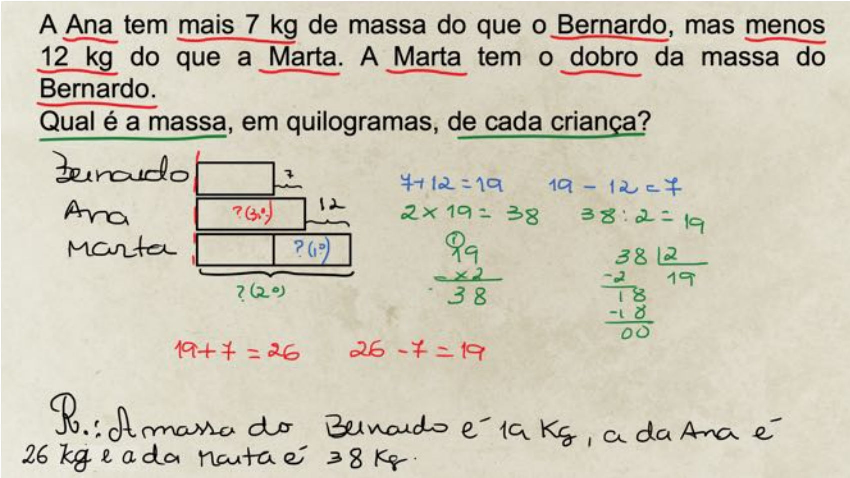

Figura 55: Problema de três passos, com duas adições e uma multiplicação; é de notar que a combinação dos modelos de comparação com contextos aditivo e multiplicativo contribui, de forma decisiva, para uma resolução expedita do problema (em particular, a comparação ficou facilitada ao posicionar a barra da Ana entre as outras duas barras); no 1.º passo, obtém-se a massa do Bernardo; no 2.º passo, obtém-se a massa da Marta; por fim, no 3.º passo, obtém-se a massa da Ana.

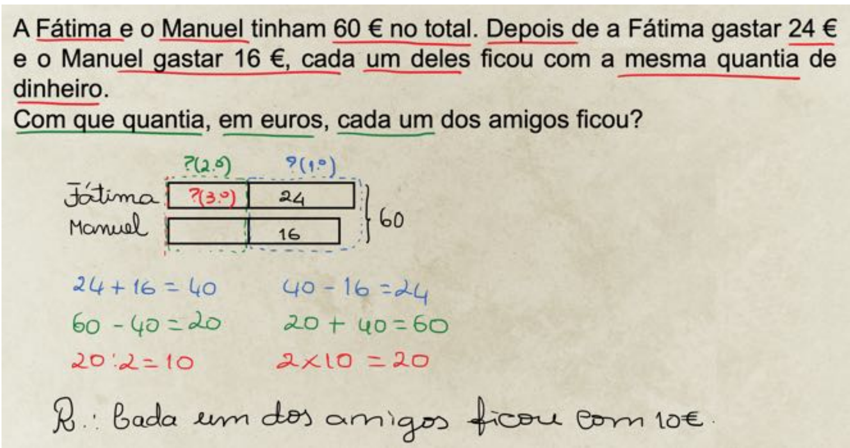

Figura 56: Problema de três passos, envolvendo uma adição, uma subtração e uma divisão; no 1.º passo, obtém-se a soma da quantia gasta pelos dois amigos; no 2.º passo, determina-se o dobro da quantia que cada um ficou no final; por fim, no 3.º passo, encontra-se o valor que dá resposta ao problema; neste exemplo, começou-se a desenhar as barras com base na informação do final da história; para desenhar as barras, é importante focar a atenção, em primeiro lugar, na parte da história com dados decisivos para a construção das barras e consequente resolução do problema.

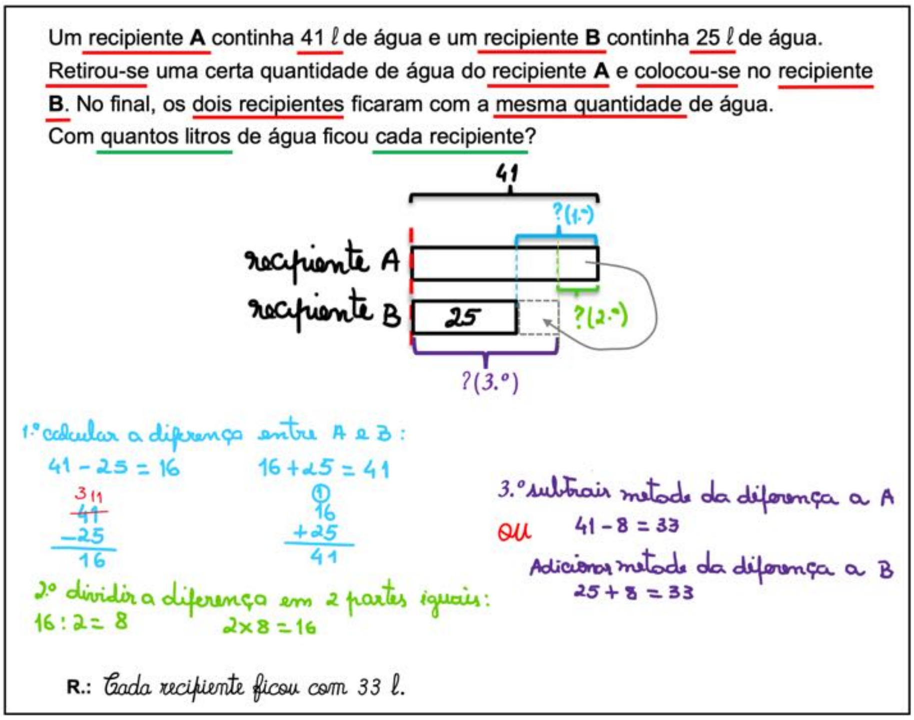

Figura 57: Problema de três passos, envolvendo uma subtração, uma divisão e uma adição ou subtração; ao contrário do exemplo anterior, começou-se a desenhar as barras com base na informação do início da história, isto porque os valores das duas barras são decisivos para a resolução do problema.

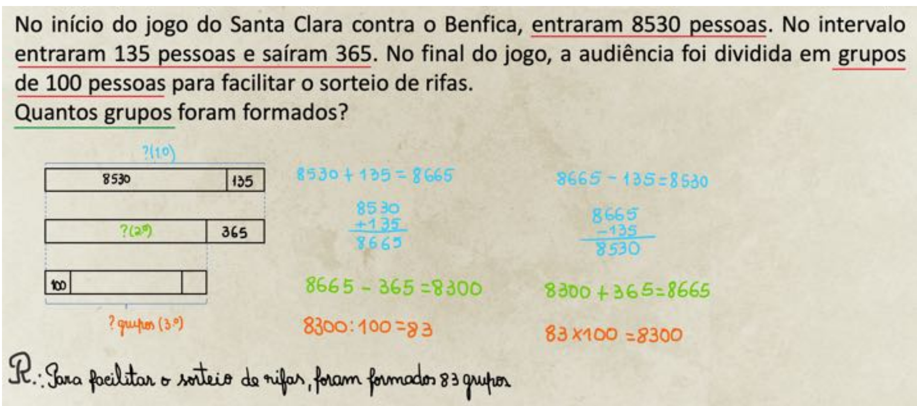

Figura 58: Problema de três passos, envolvendo uma adição, uma subtração e uma divisão; mais uma vez, o esquema de barras ajuda a organizar a informação do enunciado e a identificar os cálculos que devem ser efetuados.

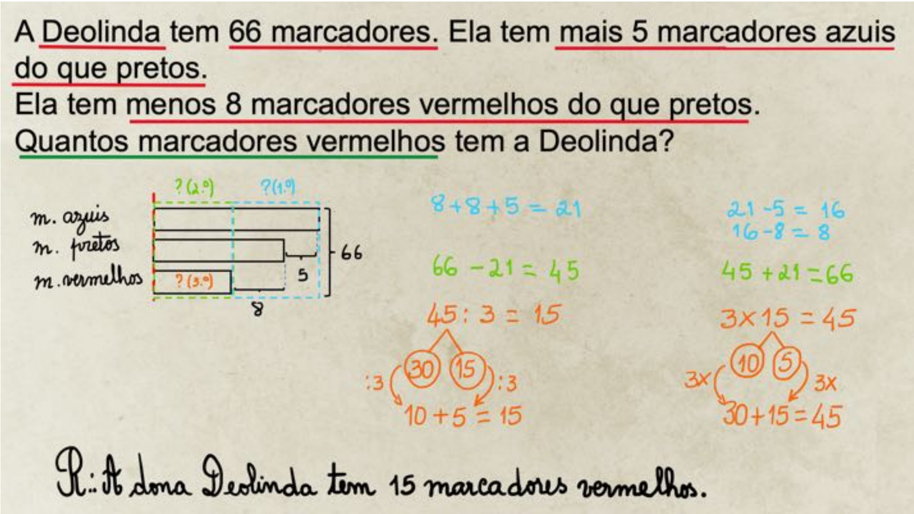

Figura 59: Neste problema, aplica-se o modelo de comparação com contexto aditivo; a comparação ficou facilitada ao posicionar a barra dos marcadores pretos entre as outras duas barras; em primeiro lugar, usam-se duas adições para calcular o número de marcadores da zona marcada a azul; em segundo lugar, recorre-se a uma subtração para calcular o triplo do número de marcadores vermelhos (zona marcada a verde); por fim, aplica-se uma divisão, com recurso a um esquema todo-partes, de modo a dar resposta ao problema; pode-se aumentar o número de passos deste problema, pedindo o número de marcadores pretos ou o número de marcadores azuis.

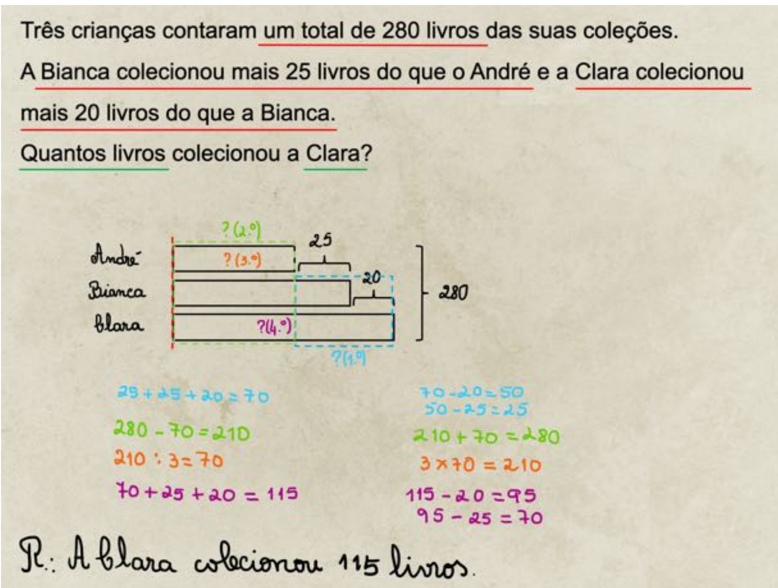

Figura 60: Problema semelhante ao exemplo anterior, mas com mais operações.

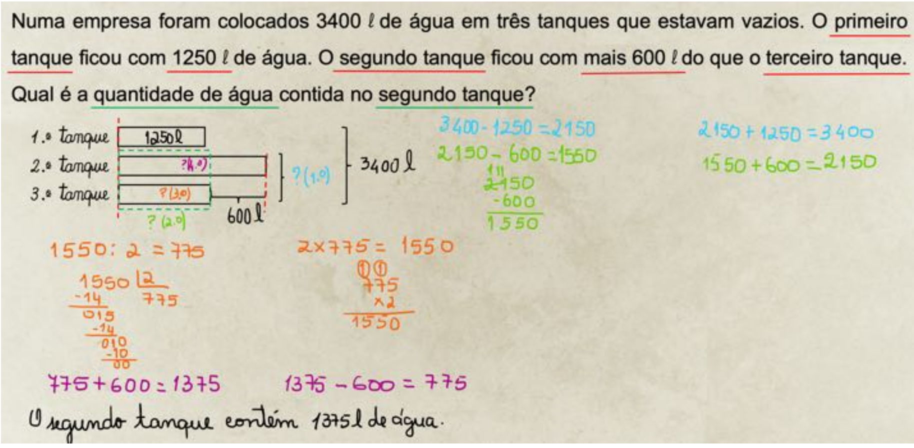

Figura 61: Problema de quatro passos, baseado no modelo de comparação com contexto aditivo; no 1.º passo, usa-se uma subtração para calcular a quantidade de água conjunta dos 2.º e 3.º tanques; no 2.º passo, recorre-se a uma subtração para calcular o dobro da quantidade de água do 3.º tanque; no 3.º passo, divide-se esse valor por 2 para calcular a quantidade de água do 3.º tanque; por fim, no 4.º passo, recorre-se a uma adição para determinar a quantidade de água do 2.º tanque; de notar que se a pergunta fosse dirigida à quantidade de água do 3.º tanque, o problema teria apenas três passos.

Nas Figuras 62 e 63, apresentam-se dois problemas de maior grau de dificuldade.

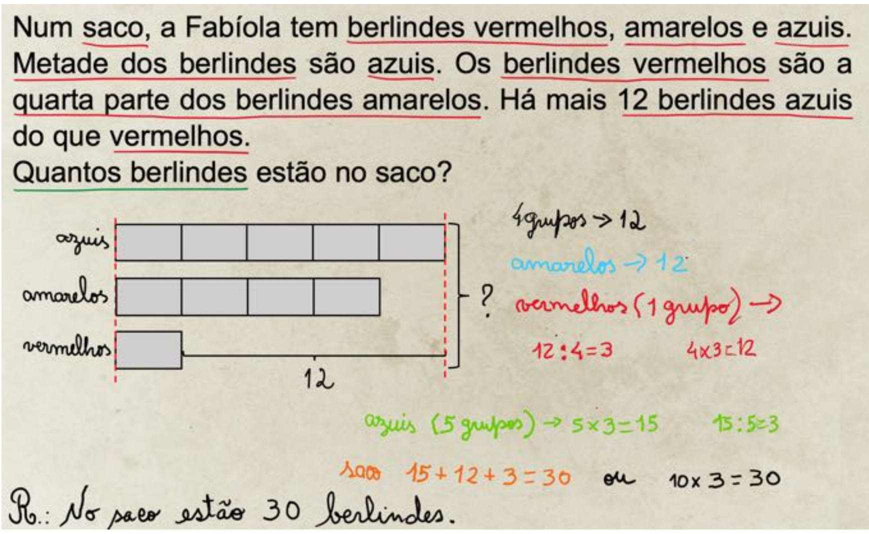

Figura 62: O enunciado fornece apenas um valor numérico: 12; no entanto, a relação entre as três quantidades de berlindes, destacada pelo esquema de barras, é determinante para a resolução deste problema.

Em relação ao problema da Figura 62, uma leitura atenta do enunciado permite concluir que os berlindes vermelhos são os que se encontram em menor quantidade. Então começa-se por desenhar a barra relativa aos berlindes dessa cor. Como os berlindes vermelhos são a quarta parte dos berlindes amarelos, a barra relativa aos berlindes amarelos tem que ser quatro vezes maior do que a barra dos berlindes vermelhos. Por sua vez, como metade dos berlindes são azuis, então a barra correspondente a esses berlindes tem que ter tantas partes/grupos iguais como as que formam as barras dos berlindes das outras duas cores. Por fim, regista-se com uma chaveta o facto de existirem mais 12 berlindes azuis do que vermelhos. Observando o esquema, fica claro que 12 : 4 indica o número de berlindes vermelhos. Os restantes cálculos estão assinalados a verde e a laranja na Figura 62. Em alternativa, pode-se multiplicar diretamente o número de partes/grupos iguais pelo valor obtido na divisão (10×3), resultando um total de 30 berlindes.

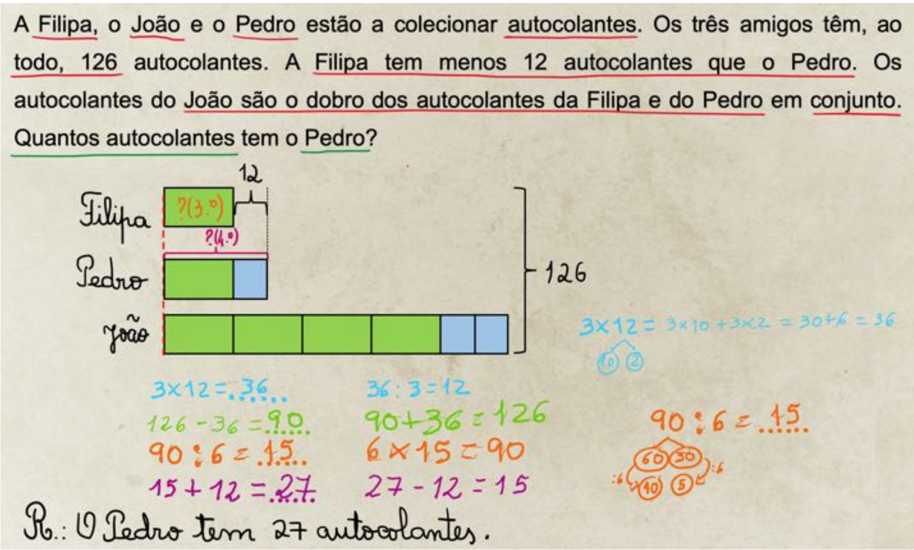

Figura 63: Novamente, a relação entre as três quantidades, neste caso de autocolantes, destacada pelo esquema de barras, é decisiva para a resolução do problema.

O problema da Figura 63 pode ser resolvido em quatro passos: no 1.º passo, calcula-se o número de autocolantes das partes/grupos azuis; no 2.º passo, determina-se o número de autocolantes das 6 partes/grupos verdes; no 3.º passo, divide-se esse valor por 6, obtendo o número de autocolantes da Filipa; por fim, no 4.º passo, adiciona-se 12 ao valor anterior, ficando com a resposta pretendida.

Nas sessões "Matemática Passo a Passo" da temporada 2 do programa "Aprender em Casa" (disponíveis, à data de publicação deste artigo, na RTP Play e no link `http://sites.uac.pt/mea`), as autoras resolvem problemas de três ou mais passos com o modelo de barras (semanas 27 a 31, para os episódios do 3.º ano; semanas 8 a 10, 14 a 18, 24 e 36, para os episódios do 4.º ano; por volta dos 35 minutos). Os problemas foram adaptados de [14] e de [15].

Referências

[1] Alves, A., Viveiros, A., Carvalho, A. *CartoMat: Vamos Jogar e Dar Cartas em Matemática*. Coordenação científica: R. C. Teixeira. Ponta Delgada: Letras Lavadas Edições, 2019.

[2] Carreiro, C., Correia, E., Patrício, J., Santos, C. P., Teixeira, R. C. "A multiplicação e a divisão em imagens: explorações no 2.º ano de escolaridade". *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 11, 5-32, 2018. http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1206

[3] Carreiro, C., Correia, E., Patrício, J., Santos, C. P., Teixeira, R. C. "A introdução do conceito de fração em imagens: explorações no 2.º ano de escolaridade". *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 12, 5-28, 2019. http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1210

[4] Carreiro, C., Correia, E., Patrício, J., Santos, C. P., Teixeira, R. C. "Estratégias de cálculo da adição e subtração baseadas na natureza decimal do sistema de numeração: explorações no 2.º ano de escolaridade". *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 16, 29-71, 2021. http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1231

[5] Carvalho e Silva, J. "O Ensino da Matemática em Singapura". *Educação e Matemática*, 123, 33-36, 2014.

[6] Carvalho e Silva, J. (Coord.), Canavarro, A. P., Albuquerque, C., Mestre, C., Martins, H., Almiro, J., Santos, L., Gabriel, L., Seabra, O., Correia, P. *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática*. Grupo de Trabalho de Matemática [Despacho n.º 12530/2018]. Ministério da Educação, 2019.

[7] D' Arruda, A. I., Pacheco, C., Marques, E. *A Estrela Alegria... e os seus 10 Amigos*. Coordenação científica: R. C. Teixeira. Ilustração: E. Marques. Ponta Delgada: Letras Lavadas Edições, 2019.

[8] Dinis, R., Teixeira, R. C., Pacheco, S. "Os Princípios Orientadores do Método de Singapura e a Aprendizagem da Matemática no 1.º Ciclo do Ensino Básico". *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 13, 5-36, 2019. http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1219

[9] Furtado, A. R., Duarte, J., Medeiros, M. P., Faria, Z., Silva, L., Fonseca, M. H., Sousa, P., Teixeira, R. C. "Recursos didáticos promotores do sentido de número no 1.º Ciclo do Ensino Básico". *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 11, 33-63, 2018. http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1207

[10] Har, Y. B. *Mathematics Bar Modeling: A Problem-solving Tool. From Research to Practice – An effective Singapore Math Strategy*. Teaching to Mastery Mathematics. Singapore: Marshall Cavendish Education, 2011.

[11] Lima, A. M., Santos, C. P., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. "A resolução de problemas no 2.º ano de escolaridade: uma sequência de aprendizagem do modelo de barras". *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 8, 23-82, 2017. http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1180

[12] Lima, A. M., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. *Matemática Passo a Passo: Caderno do aluno para o 1.º ano de escolaridade*. Edição Revista. Letras Lavadas Edições, 2021.

[13] Lima, A. M., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. *Matemática Passo a Passo: Caderno do aluno para o 2.º ano de escolaridade*. Edição Revista. Letras Lavadas Edições, 2021.

[14] Lima, A. M., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. *Matemática Passo a Passo: Caderno do aluno para o 3.º ano de escolaridade*. Edição Revista. Letras Lavadas Edições, 2021.

[15] Lima, A. M., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. *Matemática Passo a Passo: Caderno do aluno para o 4.º ano de escolaridade*. Edição Revista. Letras Lavadas Edições, 2021.

[16] Lima, M., Santos, E. *À descoberta das figuras mistério*. Coordenação científica: R. C. Teixeira. Design das figuras: E. Marques e M. E. Teves. Ponta Delgada: Letras Lavadas Edições, 2017.

[17] Martins, G. d'O. (coord.), Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., Encarnação, M. M., Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R., Rodrigues, S. *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação, 2017.

[18] Martins, H., Silva, L., Areias, M. F., Santos, C. P., Teixeira, R. C. "As cinco estratégias de cálculo da adição e subtração do 1.º ano e o seu impacto nas aprendizagens do 1.º ciclo". *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 15, 19-53, 2020. `http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1227`

[19] Ministry of Education of Singapore. *The Singapore Model Method for Learning Mathematics*. Singapore: Ministry of Education of Singapore – Curriculum Planning & Development Division, 2009.

[20] Ministry of Education of Singapore. *Mathematics Syllabus: Primary One to Six*. Singapore: Ministry of Education of Singapore, 2020. `https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/2021-mathematics-syllabus-primary-1-to-6.pdf?la=en&hash=24C377F2718FE1BC812CB4730CE11FAF42DD0F76`

[21] Ng, S. F., Lee, K. "The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems". *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 282-313, 2009.

[22] Santos, C. P., Teixeira, R. C. "Matemática na Educação Pré-Escolar: Esquemas todo-partes". *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 4, 55-70, 2015.

[23] Silva, C., Cordeniz, C., Areias, M. F., Rainha, F., Martins, H., Silva, L., Teixeira, R. C. "Da localização espacial às figuras planas e aos sólidos geométricos: explorações no 2.º ano de escolaridade". *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 13, 37-68, 2019. `http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1221`

[24] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2003 International Mathematics Report*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement, 2003. http://timss.bc.edu/PDF/t03_download/T03INTLMATRPT.pdf.

[25] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2007 International Mathematics Report*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement, 2007. http://timss.bc.edu/TIMSS2007/PDF/TIMSS2007_InternationalMathematicsReport.pdf.

[26] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement, 2011. http://timss.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_FullBook.pdf.

[27] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement, 2015. http://timss2015.org/timss-2015/mathematics/student-achievement.

[28] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2019 International Results in Mathematics*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement, 2019. https://timss2019.org/reports/achievement.

[29] UNESCO. *Declaração Mundial sobre Educação para Todos: Satisfação das Necessidades Básicas de Aprendizagem*. Jomtien, Tailândia: UNESCO, 1990.

[30] UNESCO. *Educação 2030: Declaração de Incheon*. Incheon, Coreia do Sul: UNESCO, 2015.

[31] Yee, L. P., Hoe, L. N. (Eds.). *Teaching Primary School Mathematics: A Resource Book*. 2nd Edition. Singapore: McGraw-Hill, 2009.