Número 7
Dezembro 2016

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR

Ludus

Jogos

Jogos matemáticos na educação pré-escolar: uma categorização e os princípios matemáticos do RAAAPIDOO e do DOBBLE

Alda Carvalho, Carlos Santos, Ricardo Teixeira
ISEL-CEMAPRE, CEAFEL, NICA-UAc
acarvalho@adm.isel.pt,cmfsantos@fc.ul.pt,ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *Neste artigo apresenta-se uma categorização para jogos matemáticos suscetíveis de serem utilizados na educação pré-escolar. Além disso, analisam-se exaustivamente dois jogos de observação e inspeção visual – o Raaapidoo e o Dobble. Estes jogos são baseados em interessantes conceitos matemáticos.*

Palavras-chave: jogos matemáticos, educação pré-escolar, jogos de observação, Raaapidoo, Dobble.

Formas de ler este artigo

Os leitores que apenas tenham interesse pelos jogos apresentados neste artigo, sem o fundamento matemático que suporta a sua construção, devem saltar as secções "O RAAAPIDOO e o sistema de numeração binário" e "O DOBBLE, geometrias finitas e o plano projetivo". Os leitores que estejam razoavelmente à vontade com tópicos matemáticos elementares, como o sistema de numeração binário, mas que não estejam familiarizados com tópicos mais avançados, poderão saltar a secção "O DOBBLE, geometrias finitas e o plano projetivo". Os leitores à vontade com tópicos matemáticos mais avançados, que queiram conhecer a arquitetura de cada um dos dois jogos apresentados, deverão ler o artigo na íntegra. Em qualquer dos três casos, o texto é autocontido.

O jogo na educação pré-escolar

Não é fácil definir "jogo" de uma maneira formal e delimitada. Ao contrário de conceitos como justiça/injustiça, beleza/fealdade e verdade/mentira, o jogo não admite propriamente algo que se possa considerar contrário. Apesar disso, o lugar do jogo é intocável, importante, totalmente necessário na cultura e ascensão humana, tanto pessoal como civilizacional.

O historiador holandês Johan Huiziga (1872-1945), no seu *Homo Ludens: o jogo como elemento da cultura* [5], aponta algumas ideias interessantes:

1. O jogo é uma atividade livre, conscientemente exterior à "vida normal", um aspeto "não sério" da vida, mas que, ao mesmo tempo, é desenrolado com seriedade, absorvendo intensa e completamente o jogador.

2. O jogo desenrola-se dentro de uma zona própria de tempo e de espaço, de forma ordeira, de acordo com "as regras".

Huiziga não apresentou este resumo separado em dois pontos, como aqui se elenca. Optámos por o fazer, na medida em que a compreensão do que é o jogo em idade pré-escolar depende da magnitude de importância que se dá a cada um deles.

Em relação ao primeiro ponto, a ideia fundamental é a de que o jogo se baseia numa forma de "imaginar"a realidade. De certa maneira, o jogo assume uma qualidade de ação bem definida, distinta da vida "normal". Apesar de jogarem na mais profunda seriedade, todas as crianças sabem muito bem que só estão a "fazer de conta", ou que era "só a brincar". Huiziga exemplifica a ideia com uma maravilhosa frase de uma criança: "Pai, não beije a máquina, ou as carruagens vão pensar que não é a sério.". Apesar de se poder pensar que o jogo é uma atividade inferior, em oposição a outras atividades mais sérias, esse pensamento é um erro tremendo. Mesmo que seja "só a fingir", o jogo desenrola-se com grande seriedade, com absorção, com devoção que redunda em êxtase, permitindo à criança representar, abstrair, poder ser o que não é, compreendendo o comportamento humano. Trata-se de uma absoluta necessidade para o seu desenvolvimento.

Relativamente ao segundo ponto, e ainda seguindo Huiziga, o jogo é delimitado no tempo e no espaço – "Um jogo começa e, num dado momento, acaba. Enquanto se desenrola, tudo é movimento, troca, alternância, sucessão, associação, separação. Pode ser repetido a qualquer momento. Todos os jogos se realizam dentro de um território previamente marcado, material ou idealmente, de forma deliberada ou por inevitabilidade. No interior do terreno de jogo reina uma ordem absoluta e peculiar. Estamos aqui perante outra característica muito positiva do jogo: o jogo cria ordem, o jogo é ordem. Todos os jogos têm as suas regras. São elas que determinam o que é que vale no mundo temporário circunscrito pelo jogo. Na realidade, logo que existe transgressão das regras, todo o mundo se desmorona. O jogo acaba."

O que distingue a ideia de jogo na educação pré-escolar e a ideia de jogo para pessoas com idade mais avançada é a "dose" de importância dada aos pontos 1 e 2. Em idade pré-escolar, o ponto 1 é simplesmente importantíssimo. A criança representa, "faz de conta", "fala por pessoas, objetos, animais", manipula coisas, desenha e pinta, observa avidamente. A "manipulação e imaginação" da realidade é a chave para uma boa compreensão do jogo infantil. A importância está quase toda aí, havendo um maior relaxamento quanto ao ponto 2, mais relacionado com a estrutura do jogo.

A pessoa mais adulta compete, quer ganhar, demonstrando a sua superioridade face ao seu adversário. Tende a aderir a um certo "combate de egos". Dentro da imaginação da realidade que o jogo é, a criança mais velha/adolescente/adulto coloca o seu ego e espírito competitivo na arena. Isso é raro na educação pré-escolar; uma criança de 4 anos sente cobiça pelo brinquedo alheio, sente inveja pelos mimos dados ao seu irmão, mas é mais raro ter mau perder ou querer ganhar a toda a linha ao seu amigo. A criança em idade pré-escolar adere maravilhosamente à representação, ao figurativo, à manipulação, à imaginação. Já não adere tanto a regras firmes, com um propósito muito vincado, ou a uma vitória/derrota bem delineadas. Por esse motivo, vemos que em algumas línguas há palavras diferentes para coisas que podem ser realmente diferentes; por exemplo, "brincar" e "jogar" em português. Noutras línguas, utilizam-se palavras com uma maior amplitude, podendo referir tanto o "jogo infantil" como o "jogo adulto"; por exemplo, *to play* em inglês. No entanto, mesmo em Portugal, qualquer educador sabe que o verbo "jogar" tem um significado muito peculiar em contexto pré-escolar.

Apesar do que foi dito, não se pense que as crianças pequenas não estabelecem as suas regras. Isso é falso. Basta observar atentamente um pátio de uma instituição educativa e poder-se-á intuir um conjunto de regras, territórios, *timings* e toda uma panóplia de fatores estabelecedores de normas. As crianças combinam entre si essas regras de uma forma altamente dinâmica e apaixonante. Uma criança que não compreende nem adere a essas lógicas é, na linguagem de Huiziga, um "desmancha-prazeres". Ser desmancha-prazeres não é o mesmo que ser batoteiro. Este finge jogar o jogo e, apesar de tudo, respeita o círculo mágico – em bom rigor, em idade pré-escolar, não há batoteiros. É curioso verificar que há mais tolerância para com o batoteiro do que para com o desmancha-prazeres, uma vez que este destrói o próprio jogo. Uma criança, desde muito pequena, sobre um desmancha-prazeres, pode dizer "Ele não sabe brincar". E ouvir isso é o que mais fere o seu coração.

Como categorizar jogos para a educação pré-escolar?

Royo distingue material estruturado de jogo [7]. Materiais como os DONS DE FRÖEBEL, o CUISENAIRE, o TANGRAM ou os BLOCOS LÓGICOS exibem uma estrutura impecável e são feitos de peças sem teor concreto/figurativo. Precisamente por estarem mais ligados ao ponto 2 das diretivas de Huiziga, deixam de ser catalogados como jogo no contexto pré-escolar. Quanto aos materiais estruturados, cabe ao educador decidir o tipo de atividades a fazer com eles. Dada a sua estrutura, permitem uma série de soluções educativas muito interessantes, algumas contextualizadas, outras sob a forma de jogos. No entanto, são materiais que funcionam como uma espécie de "baralho", sem um objetivo ou regras estanques, a não ser as que os educadores lhes quiserem dar [2, 3].

Ao querermos dar um objetivo e regras bem definidas a um material, conferindo-lhe o estatuto de "jogo para a educação pré-escolar", estas devem ser muito simples, suscetíveis de serem ditas numa frase, quase passíveis de serem intuídas sem ter de se dizer nada. Não nos devemos esquecer que o foco está no ponto 1 de Huiziga e não no ponto 2. Precisamente por isso, o ponto 1 deve ser tratado com muito cuidado. Há sete normativas básicas a ter em conta.

1. De preferência, o jogo deve ser **contextualizado**. Pode seguir uma história, ou permitir que se conte uma história. Deve entrar no imaginário infantil, tendo bons aspetos figurativos, de preferência bonitos, coloridos, surpreendentes e com notas de humor. A contextualização é essencial em ambiente pré-escolar.

2. O jogo deve explorar o **divertimento** em primeiro lugar, realçando os aspetos educativos só em segundo lugar. É perfeitamente possível ter os dois mundos, mas só se as coisas forem pensadas segundo esta ordem.

3. De preferência, o jogo deve ter uma dimensão **manipulável**, agradável ao toque, de acordo com a motricidade típica das crianças desta faixa etária.

4. Preferencialmente, um jogo deve ser de fácil **verificação**. A criança deve perceber imediatamente que conseguiu o seu propósito, deve poder reconstituir o jogo. O jogo pode até ser autocorretivo, permitindo que seja utilizado com exito sem a presença de adultos.

5. O jogo deve ser cuidado quanto à **segurança**. As crianças atiram coisas umas às outras!

6. O jogo não deve enfastiar de forma rápida, dando também prazer quando for **repetido**. Isto liga com a preocupação que se deve ter quanto à sua combinatória, garantindo que este seja **variado**.

7. Dado que se deve querer um jogo que possa ser usado muitas vezes, há que pensar em aspetos que garantam a sua **durabilidade**, fortemente relacionados com a qualidade e escolha dos materiais. Outra alternativa, especialmente útil em contexto pré-escolar, é a possibilidade de **fazer** o jogo de forma fácil – mesmo que este se estrague, é facilmente substituído, ou mesmo alterado.

Tendo sido tratados os aspetos genéricos, analisemos agora os jogos quanto ao seu tipo. Mais do que uma classificação estanque, é preferível listar algumas características especialmente importantes, podendo um mesmo jogo ter mais do que uma. Estas características relacionam-se muito bem com o ponto 1 de Huiziga. É curioso observar que as empresas de jogos infantis utilizam, de forma quase uniforme, a categorização que se segue, dando força ao que estamos a dizer no plano teórico. Para exemplificar as várias características, utilizaremos quase sempre jogos da empresa *SmartGames*. Não por fins publicitários, mas por ser realmente uma empresa muito competente dentro do seu âmbito[1].

A. Orientação e motricidade

Ao manipular objetos, a criança pode ser confrontada com o objetivo de os colocar numa posição precisa. Por vezes, aparecem noções espaciais estáticas (de localização), "à frente", "atrás", "entre", "ao lado", "em cima", "em baixo", "dentro", "fora", "perto", "longe" "esquerda", "direita"[2].

[1] Os autores deste artigo assistiram a uma conferência dada por um dos seus representantes no *Board Games Studies Colloquium XIV* em Bruges (2011), onde puderam constatar o seu extremo profissionalismo.

[2] A noção de lateralidade esquerda-direita pode ser trabalhada a partir dos 4 anos.

Um exemplo interessante de um jogo com estas características é o BUNNY BOO [11]. Nesse jogo, a criança é convidada a posicionar um simpático coelho e algumas peças para que fiquem exatamente como numa figura que lhe é mostrada (Figura 1).

Figura 1: BUNNY BOO.

Outro exemplo é o CAMELOT JR [12]. Nesse jogo, a criança tem de estabelecer um caminho com peças, de forma a permitir um encontro entre um príncipe e uma princesa (Figura 2).

Figura 2: CAMELOT JR.

Trata-se de um exemplo que trabalha outras coisas que serão referidas mais à frente, como a capacidade de estabelecer caminhos. Ainda assim, a orientação espacial está muito presente, como se pode constatar na ligação da Figura 3.

Figura 3: `https://www.youtube.com/watch?v=BHRnMC424eU`

B. Sobreposição

Sobrepor exatamente ou justapor é uma atividade importante a ser incentivada em idade pré-escolar. Além de desenvolver a motricidade fina, relaciona-se com conceitos geométricos e de medição. Um exemplo de um jogo de sobreposição é o COLOUR CODE [13]. A criança deve sobrepor um conjunto de peças de maneira a formar uma imagem (Figura 4).

Figura 4: COLOUR CODE.

Apesar de uma estrutura cuidada, o COLOUR CODE peca por ser demasiado abstrato. O jogo não "conta uma história", não apela à representação.

Talvez por esse motivo, a mesma empresa criou outros jogos de sobreposição para colmatar essa lacuna. Um exemplo é o three little piggies [14]. Nesse jogo, a criança deve sobrepor peças de forma a colocar (ou não) os porquinhos dentro das casas. Se o lobo estiver presente, os porquinhos devem esconder-se no interior das suas casas (ver Figura 5, parte direita). Caso o lobo não esteja presente, os porquinhos devem ficar a brincar fora das suas casas. Um exemplo contextualizado por excelência, algo que "conta uma história". Naturalmente, o jogo também tem elementos de orientação e motricidade.

Figura 5: three little piggies.

C. Construção e estabelecimento de caminhos

Já vimos no exemplo do camelot jr um jogo em que a criança procura construir um caminho. Um outro exemplo, altamente contextualizado, é o little red riding hood [14]. Nesse jogo, a criança deve procurar caminhos que permitam ao lobo e à capuchinho chegar à casa da avozinha (Figura 6). Há o delicioso pormenor de o lobo ter de ser mais rápido, de acordo com a história tradicional.

Figura 6: LITTLE RED RIDING HOOD.

D. Encaixe

Desde bebés, as crianças brincam com jogos de encaixe. São muito bons para o desenvolvimento da motricidade, da orientação espacial e da capacidade de interação com objetos tridimensionais. O TRUCKY 3 [16] é um bom exemplo de um jogo de encaixe em que as crianças tentam colocar alguma mercadoria (peças de várias formas) em camiões. Trata-se mais uma vez de um exemplo de um jogo que apela ao imaginário infantil, sendo constituído por bonitos camiões que valem, por si só, como bons brinquedos (Figura 7).

Figura 7: TRUCKY 3.

E. Reconhecimento de silhuetas e padrões

O reconhecimento de formas, contornos e orientações está intimamente ligado ao desenvolvimento geométrico. Um jogo de silhueta típico é o DAY AND NIGHT [17]. Numa primeira fase, "durante o dia", a criança tenta organizar uma posição de peças de acordo com uma figura dada. Tudo tem de estar de acordo com orientações, posicionamentos e tamanhos corretos; trata-se de uma fase de orientação e motricidade. Numa segunda fase, "durante a noite", a criança tenta fazer o mesmo, tendo apenas acesso à silhueta. Aí, o contorno e a forma é tudo o que importa (Figura 8).

Figura 8: DAY AND NIGHT.

A identificação de padrões também faz parte do trabalho a fazer na educação pré-escolar. O MAGNETO DRESS UP! [18] é um jogo que apresnta uma combinatória muito interessante. As crianças são convidadas a juntar partes de roupa para vestir personagens. Isso pode ser feito num pequeno livro com as páginas "às tiras" ou com peças magnéticas numa placa (Figura 9).

Figura 9: MAGNETO DRESS UP!.

Pode ver-se um vídeo relativo a este jogo na ligação da Figura 10.

Figura 10: `https://youtu.be/X7fXj3LxkUk`

F. Transformação e dinamismo

Hervé Tullet (1958-), autor francês de histórias infantis, tem uma série de propostas muito interessantes. Os seus livros são *autoreferenciais*, sendo mais jogos do que livros. Um exemplo muito interessante chama-se VAMOS JOGAR? [9]. Nesse livro, as crianças "atuam" sobre as páginas, "provocando" coisas nas páginas seguintes (Figura 11). Esse dinamismo e constatação de uma transformação é, naturalmente, muito benéfico para o desenvolvimento infantil.

Figura 11: VAMOS JOGAR?.

G. Observação e memória

O JOGO DA MEMÓRIA é, regra geral, um dos primeiros jogos que uma criança aprende. Inicialmente, distribui-se um conjunto de cartões, com as imagens viradas para baixo. Os cartões são dispostos de forma aleatória em linhas e colunas. Uma jogada consiste em virar um cartão e, depois, outro. Todos os jogadores veem as imagens que foram viradas. Se elas forem iguais, retira-se esse par da mesa, ganha-se um ponto, e joga-se outra vez. Se as duas imagens não forem iguais, acabou a jogada, colocando-se os cartões novamente nos seus lugares, com as imagens viradas para baixo. Quem fizer mais pontos (mais pares) ganha. Naturalmente, este jogo

estimula a utilização da memória, no sentido em que a criança tem de fixar as posições das imagens, à medida que elas vão sendo reveladas.

Figura 12: JOGO DA MEMÓRIA.

H. Concentração e inspeção visual

Nos jogos de concentração e inspeção visual, as crianças são convidadas a identificar diferenças, semelhanças ou associações. Tipicamente, devem concentrar-se e focar a sua atenção, de forma a conseguirem isso antes das crianças (ou adultos) com quem estão a jogar. Exemplificaremos esta categoria com os jogos RAAAPIDOO e DOBBLE, que serão objeto de análise nas secções que se seguem.

O RAAAPIDOO e o DOBBLE

O RAAAPIDOO é um jogo de concentração e inspeção visual desenhado por Ignasi Adut e produzido pela Educa Borras [19].

Figura 13: RAAAPIDOO.

O raaapidoo utiliza 32 imagens tropicais (Figura 14).

Figura 14: Imagens tropicais do raaapidoo.

O material de jogo consiste em 5 placas. Cada uma das 5 placas tem 16 imagens tropicais num dos lados e outras 16 imagens no outro. Cada placa tem as 32 imagens tropicais, sem repetições (ver Figura 16).

Antes de se fazer uma jogada, um dos jogadores baralha as 5 placas; quer isto dizer, vira-as muitas vezes de forma aleatória. Em seguida, atira as placas para cima de uma mesa. Ganha a jogada aquele que conseguir descobrir a imagem tropical que está nas 5 faces que ficam voltadas para cima. O jogo comercializado traz consigo pequenos quadradinhos com as 32 imagens (Figura 14). Quando um jogador encontra uma imagem, recolhe o quadradinho correspondente. Se, ao ganhar uma jogada, o quadradinho correspondente for pertença de outro jogador, este fica sem ele. Numa das variantes mais comuns, ganha o primeiro jogador que conseguir ter 5 quadradinhos. A Figura 15 mostra uma posição possível: o que há em comum nas 5 placas?

Figura 15: O que há em comum nas 5 placas?

O jogo é concebido de forma a satisfazer a admirável propriedade de cada posição ter uma e apenas uma imagem comum às cinco placas. Cada baralhar pode dar origem a 32 posições diferentes, todas equiprováveis. A cada posição corresponde uma das 32 imagens. Analisaremos a matemática subjacente a este facto na próxima secção.

Frente Verso

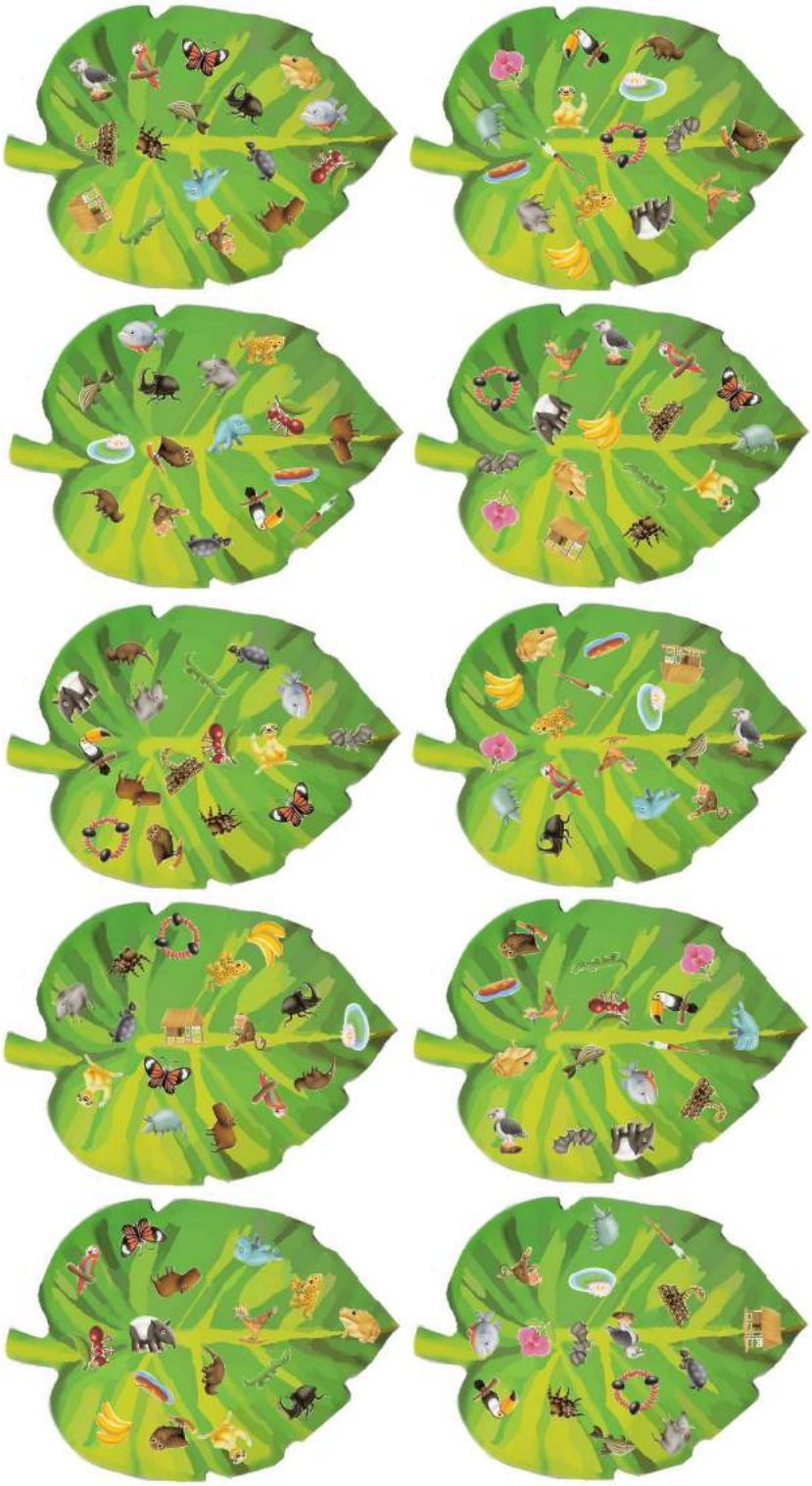

Figura 16: Placas do RAAAPIDOO.

Imagine que uma criança entra numa sala e vê animais que voam para um lado e animais que vivem debaixo de água para outro. O educador pergunta "Por que estão separados assim?". Nesse caso, é solicitado um critério definidor de uma classificação.

É sabido que o trabalho sobre propriedades e critérios é um dos mais importantes a serem feitos na fase pré-escolar [8]. Há uma série de categorizações típicas: animais de várias espécies, vestuário, profissões, etc. Todo o vocabulário que é aprendido é estruturante. Uma das coisas boas do RAAAPIDOO é o facto de permitir que se façam novas versões, variando o contexto de fundo. Por exemplo, se quisermos abordar o espaço, eis 32 imagens possíveis: Sol, estrela, Lua, cometa, Terra, disco voador, cápsula, astronauta, E.T., marciano, telescópio, eclipse, satélite, antena, gravidade, Saturno, robô, vai-e-vem, laser, carro lunar, cratera, meteorito, Ursa maior, galáxia, macaco astronauta, estação espacial, Marte, bandeira lunar, nave, pegada lunar, sistema solar, Júpiter. Outro exemplo, se quisermos explorar os elementos: fogo, gelo, sombra, água, montanha, terra, rocha, arco-íris, neve, onda, cascata, planeta Terra, vento, vulcão, deserto, furacão, tremor-de-terra, lago, chuva, granizo, pôr-do-Sol, trovão, nevoeiro, praia, nascer-do-Sol, noite, primavera, verão, outono, inverno, fumo, quinta. A única coisa que o leitor tem de fazer é substituir cada uma das imagens da Figura 16 pela nova imagem que quer usar; por exemplo, aranha por Sol, piranha por estrela, etc.

Naturalmente, as possibilidades são ilimitadas. Inclusivamente, é interessante fazer o jogo com as crianças, na medida em que se pode discutir uma categoria, fazendo os vários desenhos para ela. A empresa Educa Borras, ciente desta possibilidade, fez mais duas versões, uma relacionada com dinossauros e outra com criaturas marinhas (Figura 17).

Figura 17: RAAAPIDOO: outras versões.

O DOBBLE é um jogo de concentração e inspeção visual desenhado por Denis Blanchot e produzido pela Asmodee [20].

Figura 18: DOBBLE.

O DOBBLE utiliza 57 imagens diferentes. O material de jogo consiste em 55 cartões. Cada um dos cartões tem 8 imagens, sem repetições.

Antes de se começar um jogo, baralha-se o conjunto dos 55 cartões e faz-se um monte com eles, sem imagens à vista. Para se realizar uma jogada, alguém tira dois cartões do monte ao mesmo tempo, mostrando a todos os jogadores as suas imagens. Ganha um ponto aquele que conseguir descobrir a imagem que está nos dois cartões retirados do monte. Pode jogar-se até finalizar o monte ou até à obtenção de um certo número de pontos combinado à partida. A Figura 19 mostra uma posição possível: o que há em comum nos 2 cartões?

Figura 19: O que há em comum nos 2 cartões?

O jogo é concebido de forma a que cada posição tenha uma e apenas uma imagem comum aos dois cartões. Analisaremos a matemática subjacente a este facto mais à frente. A Figura 27 mostra todos os cartões. Mais uma vez, é possível fazer-se novas versões deste jogo, variando o contexto.

O RAAAPIDOO e o sistema de numeração binário

A humanidade utiliza o sistema de numeração posicional decimal. Um número como 3452 utiliza a ideia de agrupamento para construir uma escrita mista. O número exposto corresponde a 3 milhares, 4 centenas, 5 dezenas e 2 unidades. O sistema diz-se posicional por incluir uma de duas regras fundamentais:

O valor dos símbolos depende da posição por si ocupada.

Sendo assim, esta dependência da posição é a causa do carácter misto da escrita (e uma dor de cabeça nas primeiras aprendizagens). A ideia de agrupamento está por trás da palavra decimal e diz respeito à segunda regra fundamental:

São precisas dez unidades fundamentais de uma ordem numérica para compor uma unidade fundamental da ordem numérica imediatamente superior.

O que isto significa é que é preciso agrupar 10 unidades para compor 1 dezena, 10 dezenas para compor 1 centena, 10 centenas para compor 1 milhar, etc. O "dez" está na base da palavra "decimal" e relaciona-se com o facto de termos dez dedos em duas mãos.

Se a segunda regra fundamental fosse

São precisas duas unidades fundamentais de uma ordem numérica para compor uma unidade fundamental da ordem numérica imediatamente superior.

estaríamos perante o sistema de numeração posicional "binário". Em vez das ordens numéricas das unidades, das dezenas, das centenas, dos milhares, etc. (potências de 10), ficaríamos com as ordens numéricas das unidades, dos dois, dos quatros, dos oitos, etc. Um número como 1011 deixaria de representar 1 unidade, 1 dezena e 1 milhar (ou seja, mil e onze) e passaria a representar 1 unidade, 1 dois e 1 oito (ou seja, onze).

O sistema binário tem a interessante propriedade de só ter dois estados em cada ordem numérica e, por esse facto, só necessitar de dois símbolos (0 e 1). Uma ordem numérica ou "está ocupada" ou "não está ocupada". Esse facto está na base de muitos truques de cartas [6, 4] e, de forma muito semelhante, está na base da construção do jogo RAAAPIDOO.

Quando uma placa cai na mesa, também só tem dois estados – ou está com a frente para cima, ou com o verso para cima. Sendo assim, associando o estado de cada uma das placas a uma ordem numérica, e identificando o 0 com o verso e o 1 com a frente, cada conjunto de 5 placas corresponderá a um número entre 00000 e 11111. Na númeração posicional decimal, 00000 é zero e 11111 é trinta e um; por esse facto, cada uma das imagens tropicais deve ser associada a um número entre 0 e 31, inclusive. Por exemplo, se a piranha estiver associada ao número 28, pelo facto de a sua representação binária ser 11100, esta deve ser colocada na frente das placas 3, 4 e 5 (dígito 1) e no verso das placas 1 e 2 (dígito 0). Cada representação binária associada a uma imagem fornece a "chave" para a sua arrumação nas placas do jogo. O esquema completo é apresentado nas tabelas das páginas seguintes.

Símbolo	Binário	Placa 5	Placa 4	Placa 3	Placa 2	Placa 1
	00000	Verso	Verso	Verso	Verso	Verso
	00001	Verso	Verso	Verso	Verso	Frente
	00010	Verso	Verso	Verso	Frente	Verso
	00011	Verso	Verso	Verso	Frente	Frente
	00100	Verso	Verso	Frente	Verso	Verso
	00101	Verso	Verso	Frente	Verso	Frente
	00110	Verso	Verso	Frente	Frente	Verso
	00111	Verso	Verso	Frente	Frente	Frente
	01000	Verso	Frente	Verso	Verso	Verso
	01001	Verso	Frente	Verso	Verso	Frente
	01010	Verso	Frente	Verso	Frente	Verso
	01011	Verso	Frente	Verso	Frente	Frente
	01100	Verso	Frente	Frente	Verso	Verso
	01101	Verso	Frente	Frente	Verso	Frente
	01110	Verso	Frente	Frente	Frente	Verso
	01111	Verso	Frente	Frente	Frente	Frente

Símbolo	Binário	Placa 5	Placa 4	Placa 3	Placa 2	Placa 1
	10000	Frente	Verso	Verso	Verso	Verso
	10001	Frente	Verso	Verso	Verso	Frente
	10010	Frente	Verso	Verso	Frente	Verso
	10011	Frente	Verso	Verso	Frente	Frente
	10100	Frente	Verso	Frente	Verso	Verso
	10101	Frente	Verso	Frente	Verso	Frente
	10110	Frente	Verso	Frente	Frente	Verso
	10111	Frente	Verso	Frente	Frente	Frente
	11000	Frente	Frente	Verso	Verso	Verso
	11001	Frente	Frente	Verso	Verso	Frente
	11010	Frente	Frente	Verso	Frente	Verso
	11011	Frente	Frente	Verso	Frente	Frente
	11100	Frente	Frente	Frente	Verso	Verso
	11101	Frente	Frente	Frente	Verso	Frente
	11110	Frente	Frente	Frente	Frente	Verso
	11111	Frente	Frente	Frente	Frente	Frente

O DOBBLE, geometrias finitas e o plano projetivo

A arquitetura do DOBBLE baseia-se no seguinte resultado:

É possível colocar $N+1$ imagens distintas em cada um de N^2+N+1 cartões, usando N^2+N+1 imagens, de tal forma que cada par de cartões só tem uma imagem em comum.

Para $N = 2$, temos 3 imagens em cada um de 7 cartões, escolhidas de um conjunto de 7 imagens. Para $N = 3$, temos 4 imagens em cada um de 13 cartões, escolhidas de um conjunto de 13 imagens. Para $N = 7$, temos 8 imagens em cada um de 57 cartões, escolhidas de um conjunto de 57 imagens.

A compreensão do dito resultado baseia-se em conceitos matemáticos mais elaborados. É sabido que *par*+*par*=*par*, *ímpar*+*ímpar*=*par* e *par*+*ímpar*=*ímpar*. Também é sabido que *par*×*par*=*par*, *ímpar*×*ímpar*=*ímpar* e *par*×*ímpar*=*par*. Associando 0 a *par* e 1 a *ímpar*, temos a estrutura algébrica de $\mathbb{Z}_2$:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

O produto cartesiano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ pode ser "colocado sobre" $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como se ilustra na Figura 20. Repare-se que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ só tem 4 pontos, destacados no interior do quadrado verde. São eles $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Pontos como $(2,0)$, $(4,0)$, $(2,2)$, etc., estão identificados com $(0,0)$, correspondendo a (*par*,*par*) – cor azul. Sendo assim, cada cor é, na realidade, *um único ponto*.

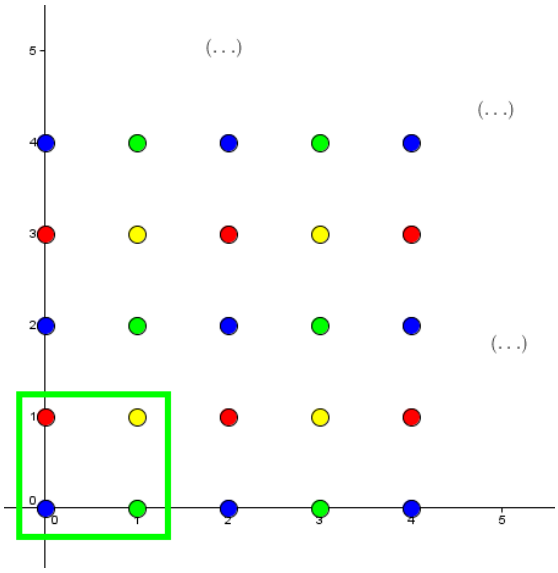

Figura 20: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Se considerarmos as retas definidas por cada par de pontos, temos uma *geometria finita*. Alguns matemáticos analisaram o DOBBLE à luz deste tipo de geometrias

(ver, por exmplo, [1]). Aqui, vamos expandir a explicação e acrescentar desenhos adequados, inclusivamente para o caso $N = 7$, ligado à construção do DOBBLE.

Para saber que tipo de retas há em $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, fora as retas verticais $x = 0$ e $x = 1$, há também as retas do tipo $y = ax + b$ resultantes da substituição de a e b por 0 ou por 1. Não nos podemos esquecer que a álgebra é a de $\mathbb{Z}_2$ – por exemplo, se substituirmos x por 1 em $y = x + 1$, obtemos $y = 0$. Sendo assim, $(1, 0)$ pertence a essa reta; o "verde" pertence a essa reta. Veja-se o conjunto das retas possíveis na Figura 21.

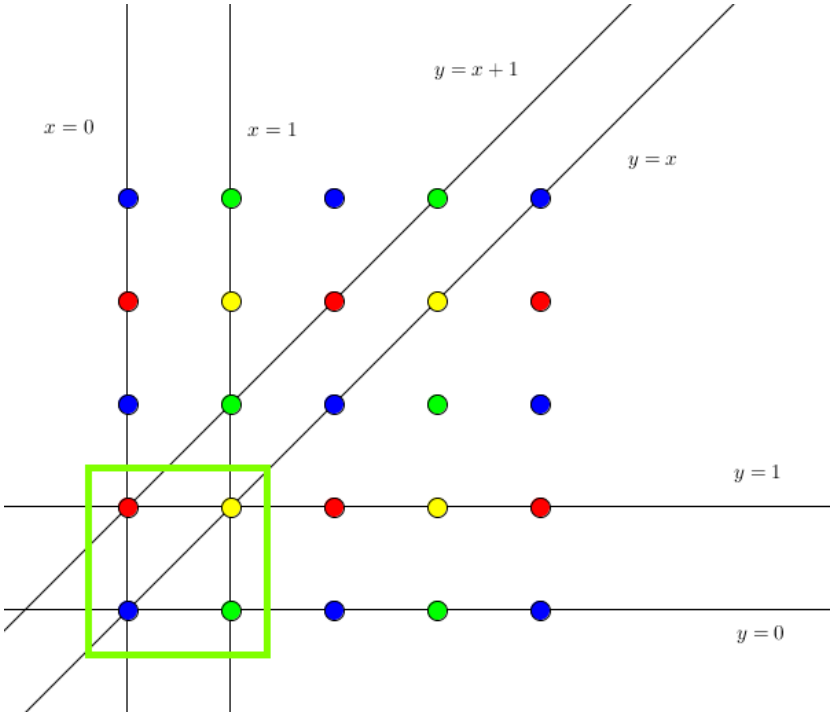

Figura 21: Geometria finita (mod(2)).

Estamos prontos para abordar a fantástica ideia subjacente à construção do DOBBLE. Se associarmos uma imagem a cada reta, os pontos serão os cartões e a imagem comum a dois cartões será a imagem associada à reta por si definida (Figura 22).

No entanto, falta ainda a cereja no cimo do bolo. É conhecido do universo das artes e da teoria da perspetiva que retas paralelas se encontram num "ponto infinito". A Figura 23 mostra uma perspetiva com dois pontos de fuga. É também sabido que os pontos infinito pertencem à linha do horizonte.

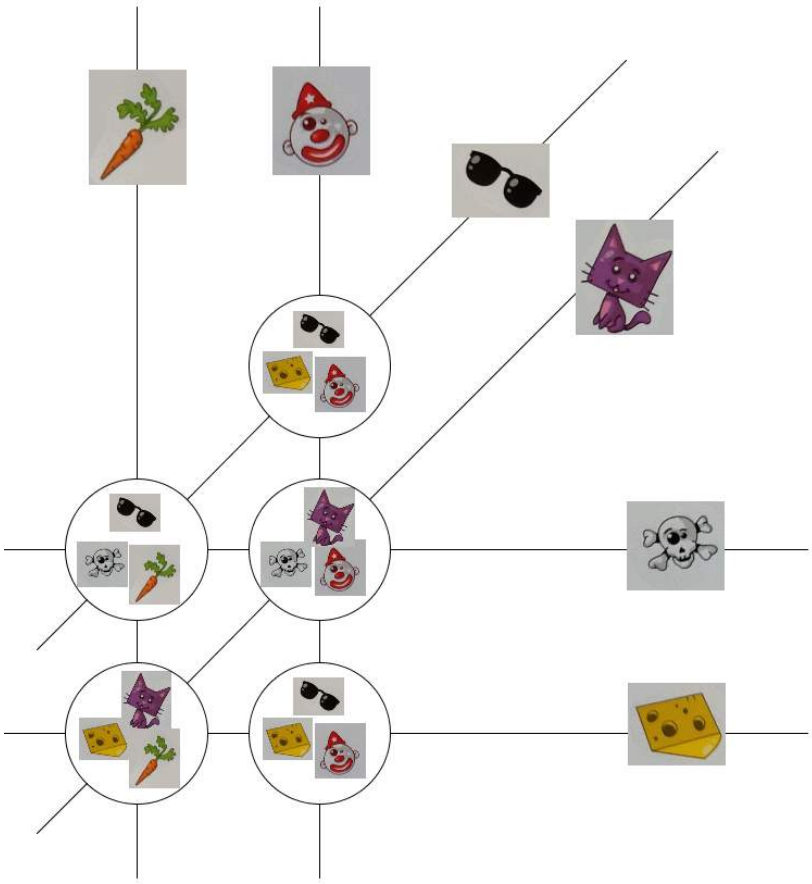

Figura 22: Mini–DOBBLE (quase).

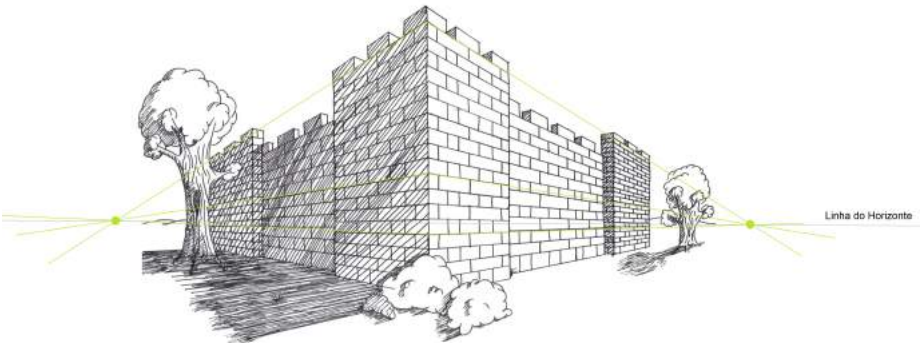

Figura 23: Perspetiva com dois pontos de fuga.

O que se faz para construir o mini–DOBBLE correspondente a $N = 2$ consiste em adicionar um ponto infinito por cada feixe de retas paralelas, bem como a linha do horizonte. Em linguagem mais técnica, considera-se o plano projetivo da geometria finita de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. A Figura 24 ilustra esse procedimento; a Lua ficou identificada com a linha do horizonte.

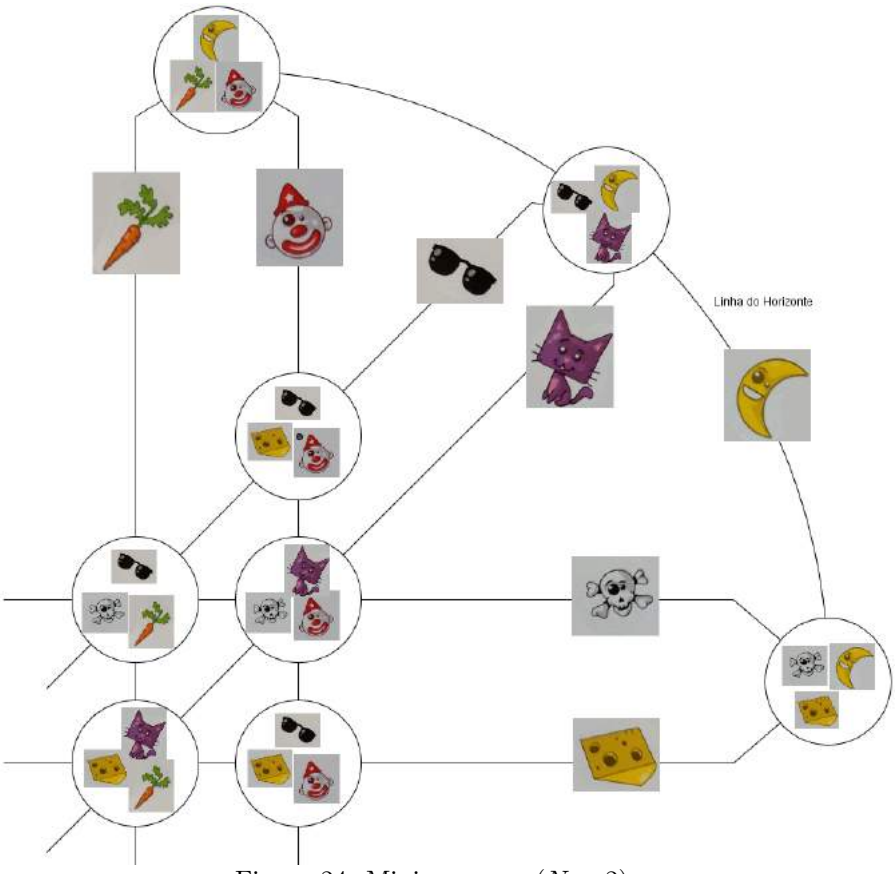

Figura 24: Mini–DOBBLE ($N = 2$).

No mini–DOBBLE correspondente a $N = 2$ há 7 retas (7 imagens) e 7 pontos (7 cartões). Cada cartão tem 3 imagens. É comum ilustrar este caso recorrendo ao clássico *Plano de Fano*. Repare-se que cada reta contém 3 pontos e cada ponto pertence a 3 retas (Figura 25).

Em geral, uma vez que há tantos pontos quanto retas, a contagem é fácil. Se pensarmos exclusivamente em $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$, há $N \times N = N^2$ pontos. Considerando o plano projetivo, há mais um ponto infinito por cada feixe de retas paralelas. Se, em $y = ax + b$, substituirmos a por $0, \ldots, N-1$, temos N feixes de retas paralelas que dão origem a N pontos infinito. Finalmente, há o feixe de retas verticais do tipo $x = b$, que dá origem a mais 1 ponto infinito. Daí, a existência de $N^2 + N + 1$ pontos e de $N^2 + N + 1$ retas.

Na Figura 26 mostra-se o plano projetivo relativo a $N = 3$. Nesse caso, temos 13 cartões e 13 imagens, 4 imagens por cartão. O caso do DOBBLE comercializado corresponde a $N = 7$. Nesse caso, o plano projetivo tem 57 pontos e 57 retas. Por algum motivo, a empresa Asmodee decidiu apenas fazer 55 cartões (talvez para ter um número ímpar de pares). Sendo assim, a versão comercializada tem 57 imagens e 55 cartões, 8 imagens por cartão (Figura 27)[3].

[3]Na versão dos autores, correspondente à Figura 27, faltam os cartões (cubo de gelo, homem bolacha, dinossauro, cato, ponto de interrogação, folha de árvore, boneco de neve, malmequer) e o (martelo, caveira, cão, óculos, âncora, sentido proíbido, raio, alvo).

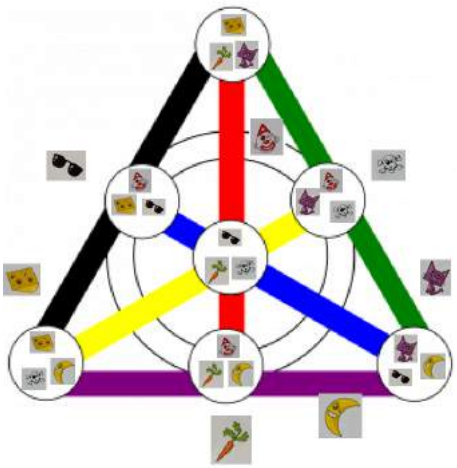

Figura 25: Mini–DOBBLE e o Plano de Fano.

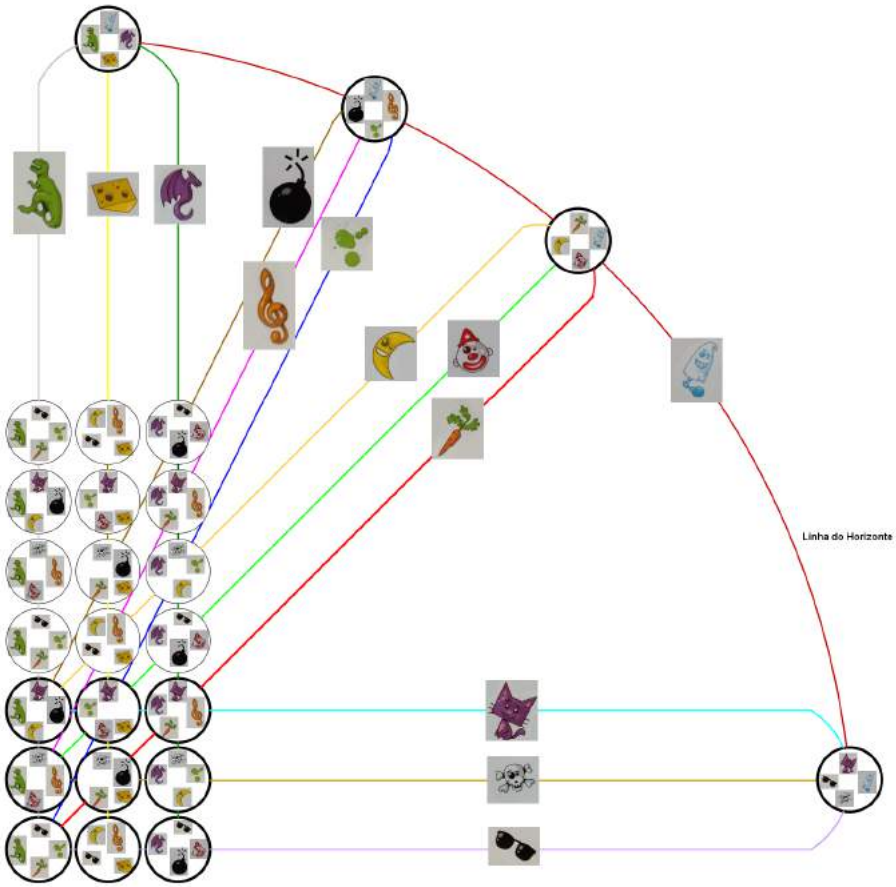

Figura 26: Mini–DOBBLE ($N = 3$).

Figura 27: DOBBLE ($N = 7$).

Uma proposta

Dado que este artigo foi escrito em época natalícia, segue-se uma proposta de RAAAPIDOO de Natal (Figura 28). A lista escolhida foi a seguinte: Pai Natal, árvore de Natal, sinos, menino Jesus, bolo-rei, reis magos, meia, pinha, gorro de Natal, anjinho, prenda, estrela de Belém, boneco de neve, bola de Natal, trenó, rena, perú, luzes de Natal, lareira, família, crianças, 25 de dezembro, amor, chocolates, música natalícia, floco de neve, chaminé, presépio, bolo, vela natalícia, rabanada, Maria e José.

Agradecemos à Leonor (9 anos) e à Raquel (5 anos) a preciosa ajuda na escolha da lista.

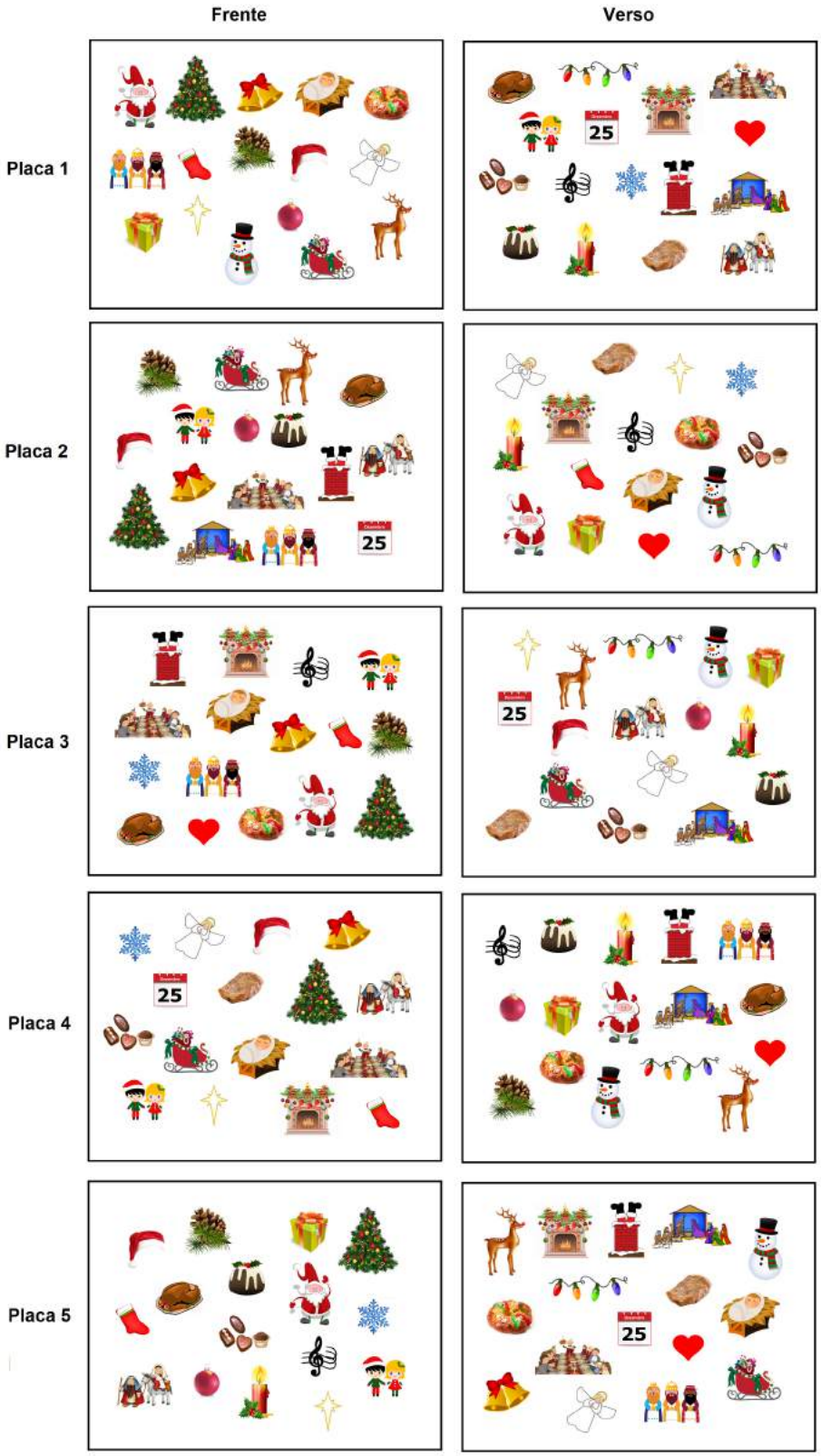

Figura 28: RAAAPIDOO de Natal.

Referências

[1] Bourrigan, M. "Dobble et la géométrie finie", *Images des Mathématiques*, 2014. http://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.html?lang=fr

[2] Caldeira, M. F. *Aprender a matemática de uma forma lúdica*, Escola Superior de Educação João de Deus, 2009.

[3] Carvalho, A., Santos, C., Silva, J. N. "Materiais didáticos para a educação matemática no pré-escolar", *Investigar em Educação Matemática: Diálogos e Conjunções numa Perspetiva Interdisciplinar*, Ana Paula Garrão, Margarida Raposo Dias, Ricardo Cunha Teixeira (Coordenadores), Letras Lavadas Edições, pp. 183–240, 2015.

[4] Freitas, P., Hirth, T., Silva, A., Silva, J. N. *Matemagia*, Ludus, 2016.

[5] Huizinga, J. *Homo Ludens: o jogo como elemento da cultura* (publicado pela primeira vez em 1938), Grupo Almedina, 2003.

[6] Mulcahy, C. *Mathematical Card Magic: Fifty-Two New Effects*, A. K. Peters/CRC Press, 2013.

[7] Royo, P. *Aspectos didácticos de las matemáticas*, Ática, 1996.

[8] Santos, C., Teixeira, R. C. "Propriedades e Critérios no Pré-Escolar", *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 3, 3–16, 2014. http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/122

[9] Tullet, H. *Vamos Jogar?*, Presença, 2016.

[10] http://www.smartgames.eu/ (*SmartGames*)

Jogos:

[11] http://www.smartgames.eu/en/smartgames/bunny-boo (BUNNY BOO)

[12] http://www.smartgames.eu/en/smartgames/camelot-jr (CAMELOT JR)

[13] http://www.smartgames.eu/en/smartgames/colour-code (COLOUR CODE)

[14] http://www.smartgames.eu/en/smartgames/three-little-piggies (THREE LITTLE PIGGIES)

[15] http://www.smartgames.eu/en/smartgames/little-red-riding-hood-deluxe (LITTLE RED RIDING HOOD)

[16] http://www.smartgames.eu/en/smartgames/trucky-3 (TRUCKY 3)

[17] http://www.smartgames.eu/en/smartgames/day-and-night (DAY AND NIGHT)

[18] http://www.imaginarium.pt/jogo-de-moda-para-criar-personagens--magneto-dress-up-73438.htm (MAGNETO DRESS UP!)

[19] https://boardgamegeek.com/boardgame/87471/raaapidoo
(RAAAPIDOO)

[20] https://boardgamegeek.com/boardgame/125048/dobble-kostenlose-demoversion
(DOBBLE)