Frações (Parte I)

Carlos Pereira dos Santos, Ricardo Cunha Teixeira
Centro de Análise Funcional, Estruturas Lineares e Aplicações da Universidade de Lisboa,
Núcleo Interdisciplinar da Criança e do Adolescente da Universidade dos Açores
cmfsantos@fc.ul.pt, ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Número 5
Dezembro 2015
AEME
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR
Ludus

Frações (Parte I)

Carlos Pereira dos Santos, Ricardo Cunha Teixeira
Centro de Análise Funcional, Estruturas Lineares e Aplicações da Universidade de Lisboa
Núcleo Interdisciplinar da Criança e do Adolescente da Universidade dos Açores
cmfsantos@fc.ul.pt, ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *A temática das frações é provavelmente o assunto mais delicado no que diz respeito ao ensino da matemática inicial. Por terem múltiplas aplicações, contextos e sentidos, as frações pedem um ensino altamente especializado e esmerado. Há que modelar de forma cuidadosa o conceito de fração, fasear e ordenar os nós conceptuais ao longo dos anos e dosear o caráter abstrato/concreto dos exemplos e atividades. Muito se testou, teorizou e escreveu sobre esta temática. Este trabalho consiste num resumo alargado sobre o ensino das frações, documentado em literatura especializada e ilustrado através de exemplos concretos retirados de manuais do* Singapore Math*, um dos mais cotados métodos de ensino do mundo.*

Palavras-chave: Dízimas, escalas, frações, frações equivalentes, numerais mistos, números racionais, operações aritméticas, percentagens, proporções, razões, regra de três simples, resolução de problemas, *Singapore Math*.

1 Introdução

Em [1], o matemático israelita Ron Aharoni cita um texto do séc.XV para argumentar que as frações já foram matéria do ensino superior. Independentemente da discussão histórica sobre o assunto, o autor quis passar a mensagem de que a temática das frações é consideravelmente sofisticada. De facto, esta temática constitui um dos assuntos mais melindrosos no que diz respeito ao ensino da matemática inicial. Uma das razões para tal é a necessidade constante de contextualização. Quando dizemos $\frac{2}{3}$, estamos frequentemente a mencionar duas terças partes de alguma coisa. Basta que numa mesma frase se mencionem duas frações relativas a todos diferentes para se lançar o caos: "$\frac{2}{3}$ de quê?", "$\frac{5}{7}$ de quê?". Quando dizemos "a relação é de 2 para 3", estamos novamente a relacionar grandezas, não sendo possível perceber quais são se dissermos apenas $\frac{2}{3}$. As frações são abstratas, sendo *relativas* a algo.

Outro problema que as frações levantam diz respeito à álgebra que envolvem. Pensemos nos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Se adicionarmos dois números naturais, obtemos novamente um número natural. No entanto, se quisermos fazer uma compra de 100 euros e só tivermos 80, podemos propor pagar com o que temos e ficar a dever. Como $80 - 100 = -20$, utilizamos os números negativos para exprimir essa dívida. Foi necessário estender o conjunto dos naturais. Passamos a lidar com os números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, pelo que *temos de aprender a operar com eles* (e.g., adicionar, subtrair, multiplicar e dividir). Imaginemos, agora, que temos um bolo e queremos dividi-lo igualmente com um amigo. *Os números inteiros já não chegam.* A melhor forma de descrever o que cada um recebe recebe é dizer "meio bolo", ou seja, $\frac{1}{2}$ bolo. E, mais uma vez, tendo sido feita nova extensão, precisamos de saber operar com estes objetos a que chamamos *frações*. É um péssimo sintoma vermos os jovens a transformar o elegante objeto $\frac{1}{2}$, a melhor forma de referir metade, em $0,5$. Isto porque $0,5$ é apenas mais uma forma de referir cinco décimos, ou seja, $\frac{5}{10}$. Transformou-se algo minimalista e irredutível numa representação menos elegante da mesma quantidade. Este sintoma revela que o jovem não está à vontade com as frações, tendo tendência para pensar em termos de representações decimais. Na maioria dos casos, não é esse o procedimento certeiro. Não devemos fugir da álgebra que as frações envolvem, mas sim aprendê-la. E a nossa cultura matemática aumenta de forma muito vincada ao fazer isso.

Segundo David Sousa, autor do livro *How the brain learns Mathematics* [14], estudos realizados no âmbito das Neurociências Cognitivas têm revelado resultados intrigantes, que apontam para a existência de uma reta numérica mental que nos ajuda a comparar números, sendo que a rapidez com que comparamos dois números depende não só da distância entre eles como também da sua ordem de grandeza (ver Figura 1). É, portanto, mais rápido decidir que $73 > 34$ do que $73 > 72$ e que $3 > 2$ do que $73 > 72$.

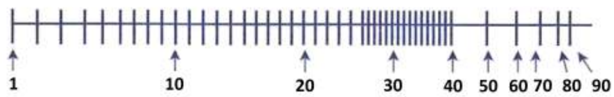

Figura 1: Reta numérica mental.

Qual a importância desta descoberta? Percebemos que a reta numérica mental oferece uma intuição limitada sobre os números, estando apenas contemplados os números naturais. Este facto pode explicar a falta de intuição quando lidamos, por exemplo, com números negativos e com frações, que não correspondem a qualquer categoria natural no nosso cérebro. Para os compreender, é necessário construir modelos mentais adequados.

Os primeiros contactos com as frações sucedem normalmente com 6 ou 7 anos de idade. A partir daí, o seu tratamento deve ser cuidadosamente faseado. Isto porque um dos motivos para a temática ser melindrosa é o facto de as frações encerrarem múltiplas utilizações e contextualizações. Uma pequena lista ordenada é a seguinte:

1. O que é uma fração? Fração como relação todo-partes.
2. Representações distintas da mesma quantidade. Frações equivalentes.
3. Mesma natureza e mesmo denominador. Adição e subtração de frações.
4. Fração como multiplicador e multiplicando. O que é a multiplicação de frações?
5. Medir e repartir. Noção de inverso e divisão de frações.
6. Quantas unidades há numa fração? Numeração mista.
7. Como se relacionam as frações com o sistema de numeração decimal?
8. Relacionar dois valores de uma mesma grandeza. Fração como razão.
9. Fração para relacionar grandezas diferentes.
10. Igualdade de relações. Frações ao serviço das proporções e regra de três simples.
11. Como se relacionam as frações com as percentagens?
12. Como se relacionam as frações com as escalas?
13. Resolução de problemas envolvendo frações.

Discutiremos os diferentes tópicos desta lista em dois textos separados. No entanto, estes conteúdos devem ser encarados de forma sequencial e articulada. Uma boa revisão da literatura sobre o tema das frações pode ser encontrada em [4].

2 O que é uma fração? Fração como relação todo-partes

Tal como a generalidade das representações numéricas, as frações têm múltiplos sentidos e aplicações. No entanto, a sua utilização para indicar um certo número de partes iguais, provenientes da divisão de um dado todo, deve ser o primeiro sentido a ser abordado. A noção de *todo* ou *unidade*[1] é central para uma boa compreensão do conceito de fração e traz, a si associada, a ideia fundamental de *representação* ([3] constitui uma boa referência complementar). A primeira mensagem sobre frações a transmitir a uma criança está ilustrada na Figura 2.

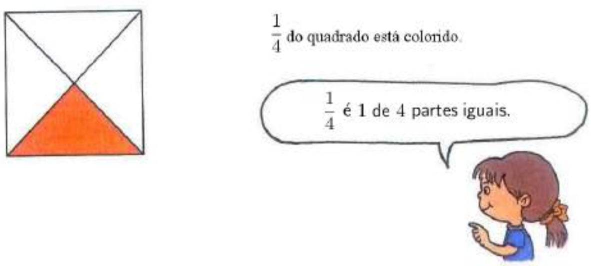

Figura 2: O que é uma fração? [8]

[1] Ao contrário de outros autores, optamos prioritariamente por “todo” em vez de “unidade” para podermos utilizar o termo “unidade” noutros contextos. Por exemplo, $\frac{4}{5}$ representa uma quantidade expressa em quintos. O “quinto”, por si só, pode ser encarado como sendo a unidade em que a fração está expressa.

Uma fração interpretada no sentido da relação todo-partes encerra em si duas informações:

- Em quantas partes iguais é dividido o todo (denominador);
- Quantas dessas partes constituem a quantidade em causa (numerador).

O número de partes iguais em que o todo é dividido traduz a natureza da unidade em que a fração é expressa: podem ser meios, podem ser terços, podem ser quartos, etc. Na medida em que é algo qualitativo, precisa de ser denominado (meios, terços, ...). Daí o nome "denominador" – denomina uma natureza. Por outro lado, ao estipularmos a quantidade de meios, terços, ..., estamos perante um juízo quantitativo. Daí o "numerador" indicar quantas partes temos. Esta mensagem deve ser transmitida às crianças da forma mais eficaz possível. Os papéis do numerador e do denominador devem ser desvendados através de frases simples como, por exemplo, a que se segue:

"$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$ são **2** de **5** partes iguais que formam o todo."

Numa frase como esta está tudo dito. Em quantas partes iguais se divide o todo? Cinco. Quantas dessas partes temos? Duas. Eis o denominador e o numerador.

Neste processo inicial, há um conceito importante a ser desmistificado: a forma do todo ou das partes não é relevante. O que é relevante é haver um todo e este ser dividido em partes iguais. Por isso, é importante explorar o tema segundo múltiplas perspetivas. Na Figura 3 temos dois todos diferentes: um deles é uma pizza, o outro é um quadrado. Não é por essa diferença que $\frac{1}{2}$ deixa de estar representado em ambos os exemplos. Nas duas situações apresentadas, quer a pizza como o quadrado foram divididos em duas partes iguais.

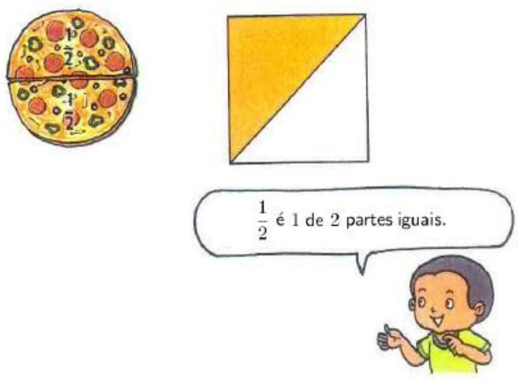

Figura 3: Todos diferentes [8].

Na Figura 4 temos dois exemplos relativos a um todo idêntico (um quadrado). Em ambos está representado $\frac{1}{4}$, *mas com formas diferentes.* Facilmente se intui que não é a forma das partes que interessa. São quatro partes, são iguais e juntas formam o todo; isso sim, interessa.

Figura 4: Partes diferentes [8].

Estas ideias sobre numerador e denominador são simples, mas não deixam de ser fundamentais. Deve haver alguma prática associada, tal como se ilustra na Figura 5.

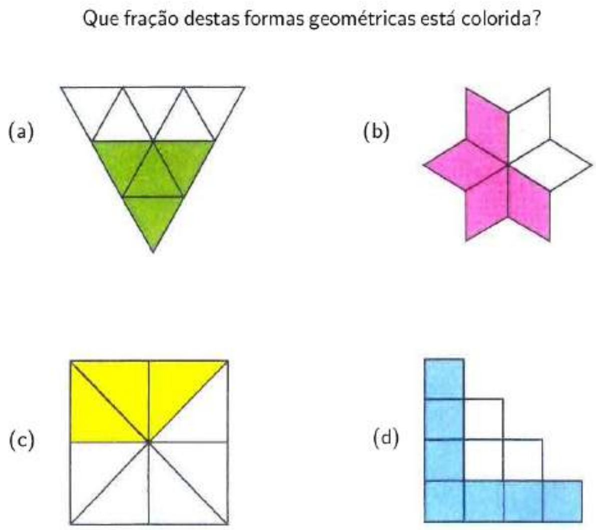

Figura 5: Exemplos variados [8].

Também são aconselháveis alguns exercícios que obriguem as crianças a pensar se as partes são ou não são iguais. Por exemplo, relativamente à alínea (a) da Figura 6, a criança deverá responder "O todo foi dividido em duas partes, mas as partes não são iguais. A zona azul é muito menor do que a branca, pelo que não corresponde a $\frac{1}{2}$.".

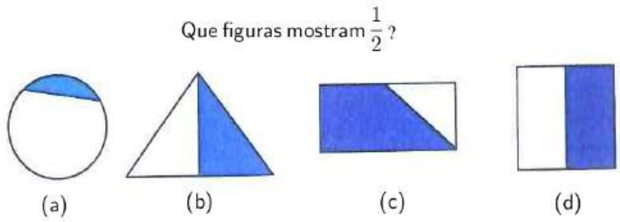

Figura 6: Partes iguais ou desiguais? [8]

É de realçar também a importância de se explorar o tema das frações seguindo a abordagem Concreto>Pictórico>Abstrato (CPA), que remonta aos trabalhos do psicólogo americano Jerome Bruner [5]. Nos primeiros anos de escolaridade, todos os temas devem ser introduzidos partindo do concreto. Nesse sentido, é importante utilizar objetos do dia a dia ou fotografias desses objetos (e.g., pizzas, bolos, tabletes de chocolate, ...). A utilização de materiais manipuláveis também é recomendável, desde as barras *Cuisenaire* (Figura 7) aos blocos padrão (Figura 8), passando por simples legos (Figura 9).

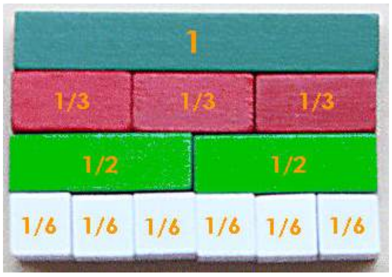

Figura 7: Explorar as frações com as barras *Cuisenaire* [11].

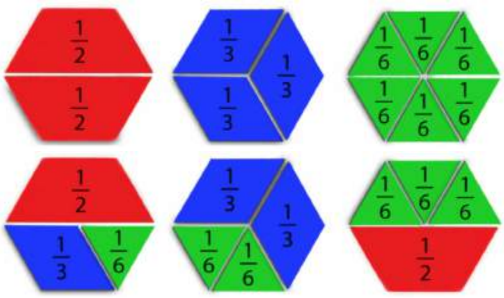

Figura 8: Explorar as frações com os blocos padrão [6].

O aluno deve perceber que a matemática pode ser usada para interagir com o meio que o rodeia e para resolver problemas da vida real. Por seu turno, os

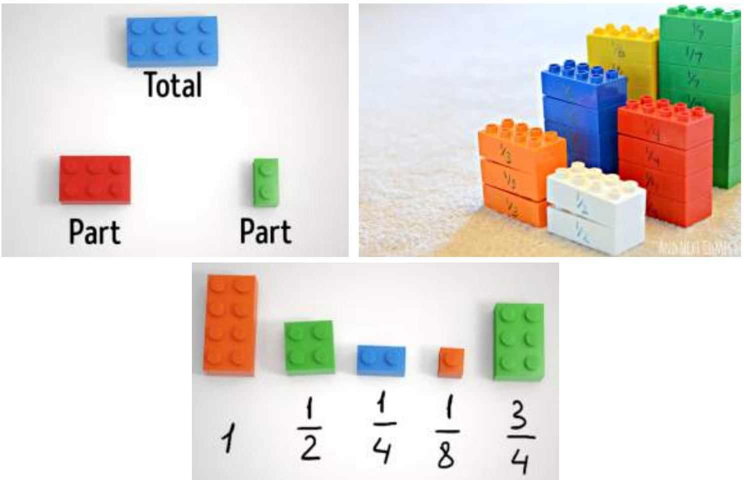

Figura 9: Explorar as frações com legos [12, 16].

exemplos pictóricos constituem representações de materiais concretos que ajudam os alunos a visualizarem conceitos matemáticos (e.g., um círculo dividido em partes iguais, um retângulo dividido em partes iguais, ...). Já no âmbito do abstrato, o trabalho formal com os símbolos permite mostrar aos alunos que existe uma maneira mais rápida e eficaz de representar um determinado conceito (e.g., $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, ...). O significado de cada símbolo deve estar firmemente enraizado em experiências com objetos reais. A passagem do concreto ao abstrato pode ser consideravelmente delicada para a criança. Trata-se de todo um caminho a ser percorrido de forma faseada, passo a passo.

Como já exemplificamos, as partes que compõem o todo não têm que ser obrigatoriamente sectores circulares de um círculo. Mas podemos ir mais longe de modo a trabalhar o tema das frações segundo múltiplas perspetivas. David Sousa [14] apresenta um exemplo que não se baseia nos tradicionais modelos geométricos. A ideia passa por propor uma caça ao tesouro, que se baseia na descoberta de palavras-chave que conduzem ao tesouro. Por exemplo, supondo que o tesouro está escondido perto da cadeira do professor, a palavra CADEIRA pode ser descoberta ao resolver o seguinte enigma: "Para descobrires a palavra secreta, precisas dos primeiros $\frac{2}{4}$ de CASA, dos primeiros $\frac{3}{6}$ de DEITAR e dos últimos $\frac{2}{8}$ de TERCEIRA". Este exemplo tem a vantagem de também se poder trabalhar a divisão silábica.

Nesta fase inicial de aprendizagem, duas ideias adicionais podem ser tratadas: *comparações simples* e *o ato de completar o todo*. Uma das comparações simples é bastante direta, dizendo respeito a naturezas idênticas. O que é maior $\frac{4}{7}$ ou $\frac{3}{7}$? Estando ambas as frações expressas na mesma natureza (sétimos), evidentemente que quatro é maior do que três. A comparação simples mais interessante não é tão direta e está expressa na Figura 10.

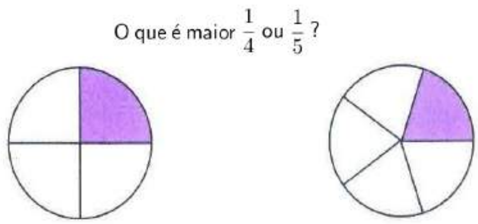

Figura 10: Comparações [8].

Neste caso, a natureza é distinta (no exemplo, um quarto e um quinto). E a comparação pode parecer paradoxal a uma criança, uma vez que 5 é maior do que 4, mas $\frac{1}{5}$ é menor do que $\frac{1}{4}$. Com uma situação concreta, o conceito pode ser clarificado: "Tendo dois bolos iguais, um para ser dividido igualmente por quatro amigos e o outro para ser dividido igualmente por cinco amigos, em qual dos grupos se come mais, no primeiro ou no segundo?" Para captar a atenção da criança para uma determinada tarefa matemática deve-se procurar uma ligação emocional com o tema a explorar. Não só conseguimos captar a sua atenção como também estimulamos a criança a aplicar a matemática em situações concretas do dia a dia. As abordagens "Hoje vamos estudar frações." e "Vamos dividir esta pizza! Preferem $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ da pizza?" são completamente distintas. Segundo David Sousa [14], se um professor não conseguir responder à pergunta "Por que razão precisamos de saber isto?", de uma maneira que faça sentido e tenha significado para os seus alunos, então terá que repensar necessariamente aquilo que está a ensinar.

O ato de *completar o todo* também deve ser incentivado nesta primeira fase. Pense o leitor quantas vezes na vida teve um raciocínio do tipo "Já tenho três quartos do pretendido; ainda falta o outro quarto.". A Figura 11 ilustra esse tipo de pensamento.

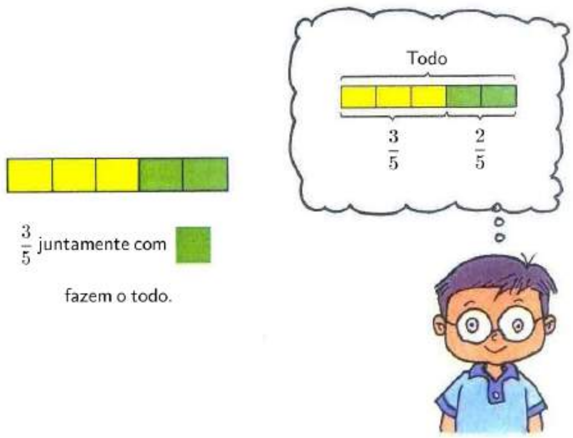

Figura 11: Completar o todo [8].

Exercícios envolvendo sombreados e pinturas podem ser propostos de forma gradual. Em relação a cada um dos três casos da Figura 12, a criança é convidada a descobrir que fração do todo corresponde à parte sombreada. Nestes casos, a tarefa já não é de todo evidente. Isso porque já não há uma correspondência direta entre o sombreado e um número de partes iguais que subdividem o todo.

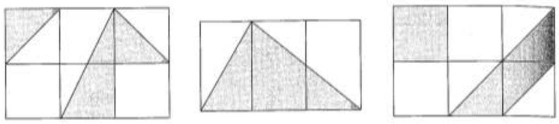

Figura 12: Exercícios mais sofisticados.

Por exemplo, considerando o caso da esquerda, a chave consiste em perceber que, na coluna do meio, a zona sombreada corresponde a um quadrado, na medida em que dois quadrados são divididos em duas partes iguais. Sendo assim, se usarmos meio quadrado para dividir o retângulo completo em doze partes iguais, o que se tem é $\frac{4}{12}$.

3 Representações distintas da mesma quantidade. Frações equivalentes

Antes de tratar da álgebra relacionada com as frações (adição, subtração, multiplicação e divisão), é imprescindível abordar a noção de *equivalência de frações* ([18], para mais informação). A Figura 13 ilustra o conceito.

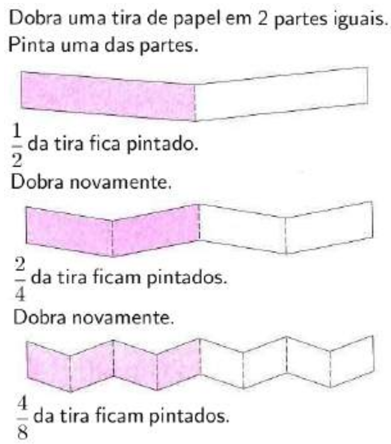

Figura 13: Frações equivalentes [9].

A dobragem da tira de papel expõe um facto simples: a mesma porção de fita pode ser representada através de formas diferentes ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, ...). A multiplicidade de representações para uma mesma quantidade baseia-se na mudança do número de partes iguais em que se subdivide o todo. Observe-se a Figura 14.

À esquerda, um bolo tem cinco fatias: quatro com cobertura de chocolate e uma com cobertura de baunilha. Naturalmente, a fração de bolo coberto com chocolate é $\frac{4}{5}$. À direita, está representado *exatamente o mesmo bolo*. Nesta segunda imagem, todas as fatias foram cortadas, ficando divididas em duas iguais. Passou a haver dez fatias em vez de cinco. Observando a imagem da direita, a fração de bolo coberto com chocolate é bem descrita por $\frac{8}{10}$. É claro que a *quantidade de bolo coberta com chocolate é exatamente a mesma*, consequentemente, $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$.

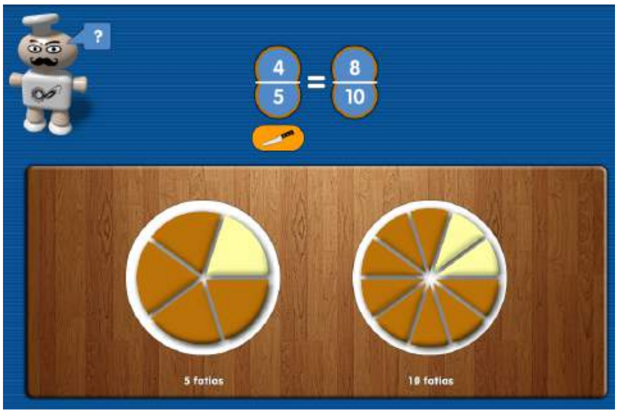

Figura 14: Frações equivalentes [2].

Analisando a situação do ponto de vista algébrico, a passagem de $\frac{4}{5}$ para $\frac{8}{10}$ obtém-se multiplicando o numerador e o denominador da primeira fração pelo mesmo valor, neste caso, 2. A multiplicação do denominador por 2 acontece porque passamos a ter o dobro das fatias, ou seja, o número de partes iguais duplica. Por outro lado, a multiplicação do numerador por 2 sucede porque a quantidade de fatias cobertas com chocolate também passa a ser o dobro. Todas as fatias passam a ser mais finas exatamente da mesma maneira, em particular, as de chocolate. Pode ver-se uma ilustração dinâmica do conceito na Figura 15.

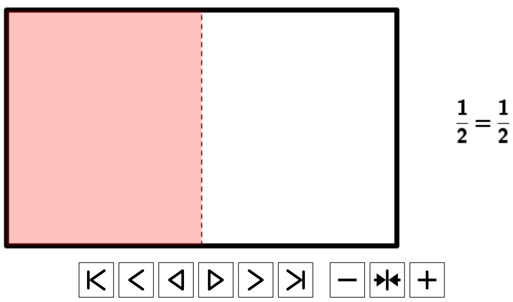

Figura 15: Frações equivalentes: uma ilustração dinâmica.

Nas primeiras aprendizagens sobre frações, é fundamental trabalhar o tema segundo múltiplas perspetivas. Em particular, é importante *diversificar a natureza do todo*. Se estipularmos que uma moeda de 1 euro é o todo temos o seguinte:

- a moeda de 50 cêntimos é $\frac{1}{2}$ euro – são precisas 2 para obter o todo;
- a moeda de 20 cêntimos é $\frac{1}{5}$ euro – são precisas 5 para obter o todo;
- a moeda de 10 cêntimos é $\frac{1}{10}$ euro – são precisas 10 para obter o todo;
- a moeda de 5 cêntimos é $\frac{1}{20}$ euro – são precisas 20 para obter o todo;
- a moeda de 2 cêntimos é $\frac{1}{50}$ euro – são precisas 50 para obter o todo;
- a moeda de 1 cêntimo é $\frac{1}{100}$ euro – são precisas 100 para obter o todo.

A Figura 16 ilustra a equivalência de frações com recurso ao sistema monetário. Este tipo de exemplo é especialmente interessante, na medida em que uma mesma quantia pode ser organizada através de trocos de maior ou menor valor. Na realidade, é exatamente essa a alma do conceito: uma mesma quantidade pode ser expressa com recurso a submúltiplos da unidade, maiores ou menores.

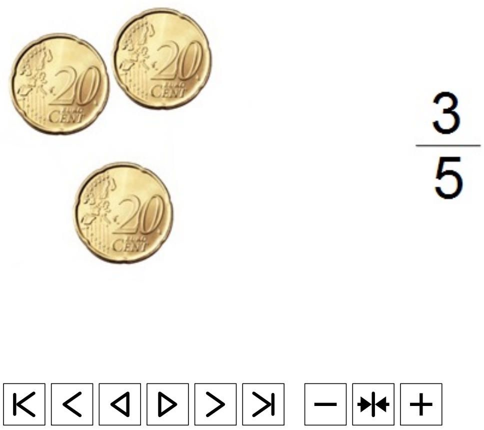

Figura 16: Frações equivalentes: uma ilustração monetária.

A equivalência de frações corresponde à simples divisão ou multiplicação do numerador e do denominador por um mesmo número diferente de zero. Devem ser propostos exercícios relacionados, tal como se mostra nas Figuras 17 e 18.

Todas as frações podem ser expressas através de uma *representação irredutível* em que o numerador e o denominador não podem ser divididos por um mesmo número natural diferente de 1 (o numerador e o denominador dizem-se *primos entre si*). Exemplos de frações irredutíveis são $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{10}{21}$, etc. Frações redutíveis como $\frac{24}{36}$ podem ser trasformadas numa fração irredutível num único passo dividindo numerador e denominador pelo maior número natural possível que o

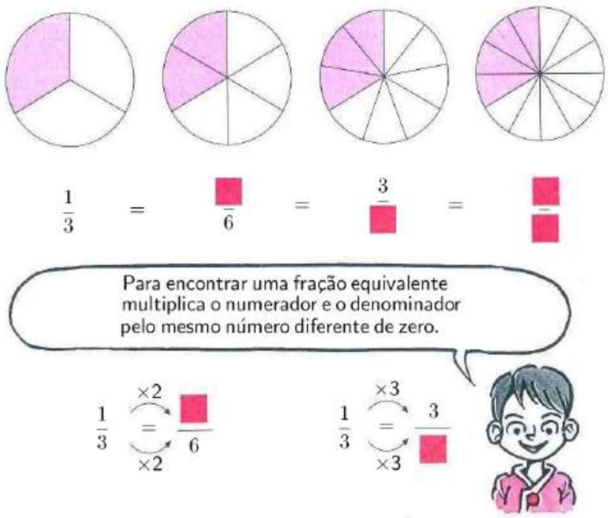

Figura 17: Frações equivalentes: ampliação do denominador [8].

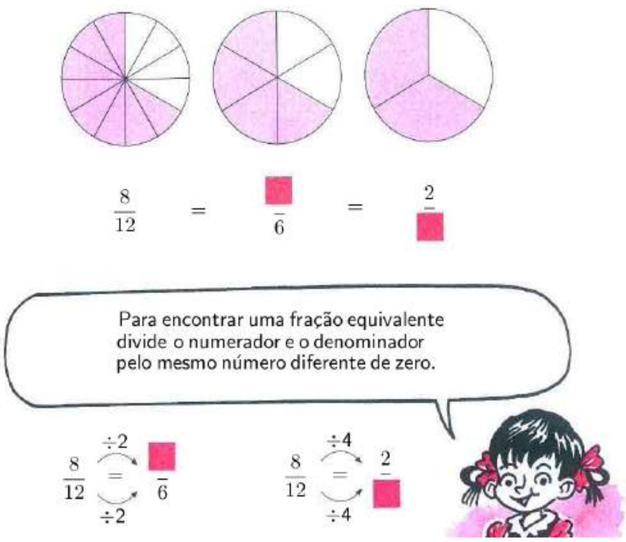

Figura 18: Frações equivalentes: redução do denominador [9].

permita (diz-se *máximo divisor comum*). Como o máximo divisor comum de 24 e 36 é o 12, pode dividir-se o numerador e o denominador de $\frac{24}{36}$ por 12, obtendo-se a fração irredutível $\frac{2}{3}$.

É perfeitamente possível tratar a equivalência de frações antes de abordar a questão das frações irredutíveis, máximo divisor comum de dois números, etc. O cotadíssimo método de ensino da matemática inicial utilizado em Singapura, *Singapore Math*, é um exemplo desta abordagem. Embora tratando a temática junto de crianças do terceiro ano de escolaridade (8 anos de idade) através de esquemas e exercícios como os das Figuras 17 e 18, opta por não aprofundar o assunto da irredutibilidade de frações na sua globalidade logo nessa fase. No entanto, importa frisar que exercícios como

$$\frac{2}{6} = \frac{?}{9}$$

podem e devem ser propostos. Estes casos são mais difíceis, uma vez que não há um factor multiplicativo inteiro que permita passar de $\frac{2}{6}$ para $\frac{3}{9}$ (não há nenhum natural que multiplicado por 6 resulte em 9). No entanto, $\frac{2}{6}$ é igual a $\frac{1}{3}$ $(\div 2)$ e $\frac{1}{3}$ é igual a $\frac{3}{9}$ $(\times 3)$. Esta análise está ao alcance de crianças do terceiro ano de escolaridade.

4 Mesma natureza e mesmo denominador. Adição e subtração de frações

Imagine o leitor que pergunta a uma criança de 5/6 anos "Quanto é três gatos mais duas rosas?". Mesmo que a resposta seja cinco, há claramente um problema de *lógica*. A pergunta seguinte pode ser "Cinco quê?". Naturalmente que não são nem cinco gatos nem cinco rosas. Quanto muito, seriam cinco *seres vivos*, na medida em que tanto os gatos como as rosas são seres vivos. Há uma espécie de lei fundamental nas adições e nas subtrações que é a necessidade de uma *natureza comum* para os objetos a contar de modo a que estas operações tenham lógica e façam sentido. Considere-se, na Figura 19, um exemplo que pode ser trabalhado ainda no contexto da educação pré-escolar. É solicitada uma história a uma criança, para ser usada ao serviço da aprendizagem da adição. Algo do tipo: "Estavam 7 formigas a comer um queijo. Chegaram mais 2 formigas. No final, ficaram 9 formigas a comer o queijo". Repare-se que os três números da igualdade $7 + 2 = 9$, o 7, o 2 e o 9, correspondem a quantidades de formigas. Tudo são formigas, a *natureza comum* dos objetos neste exemplo é evidente.

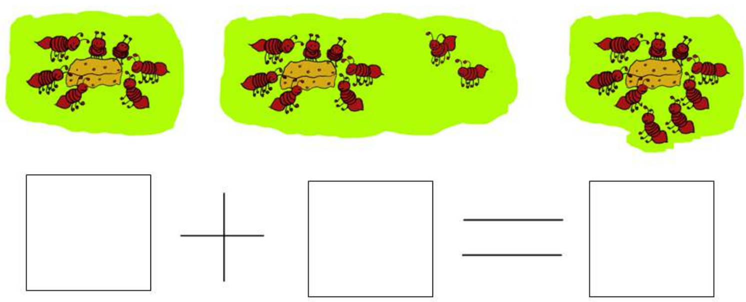

Figura 19: Uma adição simples.

Considere-se, agora, a Figura 20. É solicitada à criança uma frase que associe a imagem à igualdade $2 + 3 =?$ (a utilização de exercícios *figura+expressão matemática*, envolvendo uma figura e uma expressão matemática é uma imagem de marca do *Singapore Math*). Neste exemplo, a criança tem de *combi-*

nar os objetos. Ou seja, é deixada à criança a tarefa de encontrar uma natureza comum para os objetos a contar de modo a que a frase tenha lógica. Neste exemplo, a escolha pode recair sobre o facto de ambos serem *frutos*: "Temos 2 maçãs e 3 laranjas. Quantos *frutos* temos no total?". Debates sobre a natureza comum que os objetos devem ter de modo a que as adições e subtrações façam sentido são um daqueles pormenores importantes no âmbito das boas práticas didáticas. Isto porque o assunto é a alma da adição e subtração de frações, do famoso "vírgula debaixo de vírgula", da manipulação algébrica de expressões com incógnitas, entre outros exemplos. É algo absolutamente basilar para uma boa evolução do conhecimento matemático.

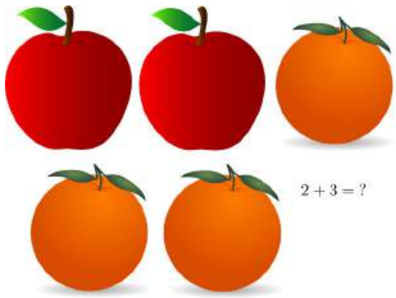

Figura 20: Combinar diferentes objetos.

Imagine que tem no bolso meio euro juntamente com vinte cêntimos. É prática intuitiva das pessoas pensar em cêntimos: "Tenho setenta cêntimos". A razão para tal corresponde à necessidade da procura por uma natureza comum: primeiro estipula-se uma natureza comum, que estabelece a *unidade em que se efetua a adição* e, em seguida, pensa-se na quantia tendo em conta essa unidade. Repare-se que também se podia pensar na quantia como sendo sete décimos de euro. Este pensamento só não acontece na prática porque estamos habituados a pensar nos décimos de euro como sendo moedas de dez cêntimos, ou seja, pensamos num décimo em centésimos. Este pensamento traduz-se no cálculo:

$$\text{Meio euro} + \text{vinte centésimos de euro} = \frac{1}{2}€ + \frac{20}{100}€ = \frac{50}{100}€ + \frac{20}{100}€ = \frac{70}{100}€.$$

A determinação de um denominador comum corresponde muito simplesmente a encontrar uma natureza comum para os termos em causa na adição ou na subtração (no exemplo dado foram os centésimos).

A Figura 21 ilustra uma primeira abordagem à adição de frações junto de crianças do 4.° ano de escolaridade. Ainda não há uma sistematização quanto ao processo para a determinação do denominador comum, mas sim uma *explicação sobre a necessidade dessa prática.* O professor deverá dizer frases como "Vamos colocar tudo em quartos para podermos adicionar. Um meio corresponde a quantos quartos?".

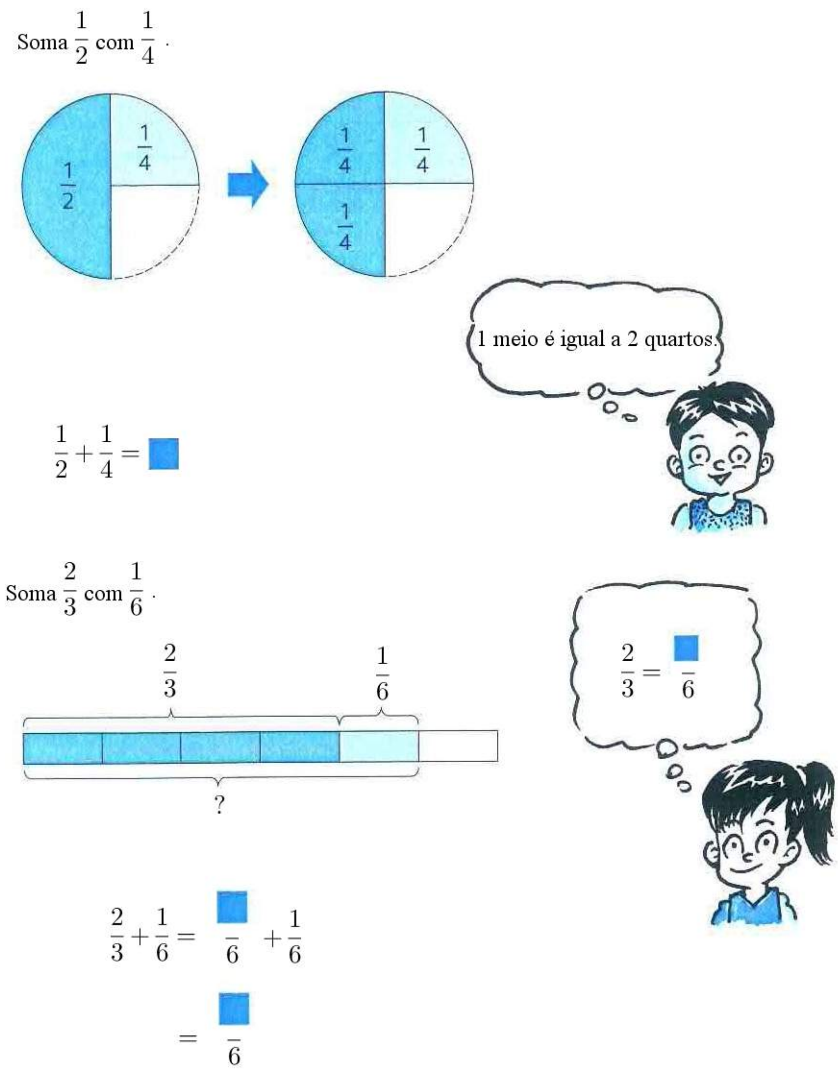

Figura 21: Adição de frações [10].

A Figura 22 constitui um exemplo do mesmo tipo quanto à subtração.

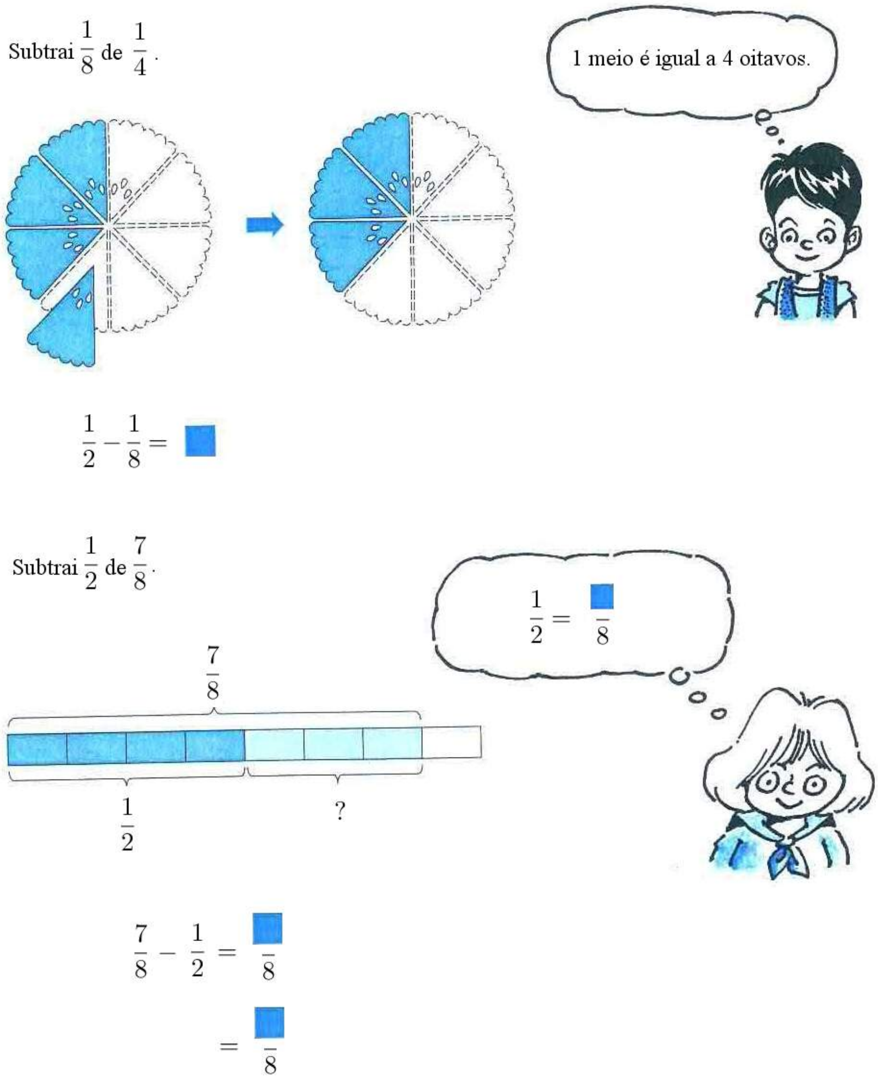

Figura 22: Subtração de frações [10].

Levanta-se a questão de *como determinar o denominador comum de forma expedita.* Por exemplo, considere o cálculo $\frac{3}{8}+\frac{1}{6}$. Há um mecanismo simples que consiste em considerar uma fração equivalente a cada parcela da soma, *utilizando como factor multiplicativo o denominador da outra parcela.* Isso fará aparecer um denominador comum igual ao produto dos denominadores originais (neste caso, 48).

$\times 6$ $\times 8$

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=\frac{18}{48}+\frac{8}{48}=\frac{26}{48}$$

$\times 6$ $\times 8$

Frequentemente, este método não dá origem ao menor denominador comum possível. Uma vez que o *mínimo múltiplo comum* de 8 e 6 é 24, a dita soma pode ser feita com recurso a esse denominador. É claro que $\frac{26}{48}$ e $\frac{13}{24}$ são equivalentes.

$\times 3$ $\times 4$

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{6}=\frac{9}{24}+\frac{4}{24}=\frac{13}{24}$$

$\times 3$ $\times 4$

Tal como no caso da equivalência de frações, a temática da adição e subtração de frações com denominadores diferentes pode ser tratada junto de crianças a partir do 4.° ano de escolaridade (9 anos de idade) através de esquemas, sem aprofundar totalmente o assunto relativo ao mínimo múltiplo comum de dois números (mais uma vez, o *Singapore Math* é um exemplo dessa abordagem). No entanto, qualquer que seja o método, a noção de equivalência de frações deve vir *antes* das operações, uma vez que a *determinação da natureza comum recorre ao conceito de equivalência.*

Sendo esta uma fase de aprendizagem que já não é a inicial, convém referir que há vários modelos relativos a frações e não apenas os pictóricos contínuos que costumam ser utilizados na fase inicial. Em [4], encontra-se um resumo de uma classificação desses modelos. Na Figura 23, apresentam-se quatro:

(a) *modelo contínuo* (o todo é um único retângulo);

(b) *modelo discreto* (o todo é um *conjunto* de doze laranjas);

(c) *modelo linear* (caso particular de um modelo contínuo proposto com frequência no currículo português e fortemente defendido por Hung-Hsi Wu, matemático da Universidade da Califórnia, especialista na temática [19]);

(d) *modelo discreto* com componente mista (o todo é um conjunto de seis pares de laranjas com diferentes tamanhos).

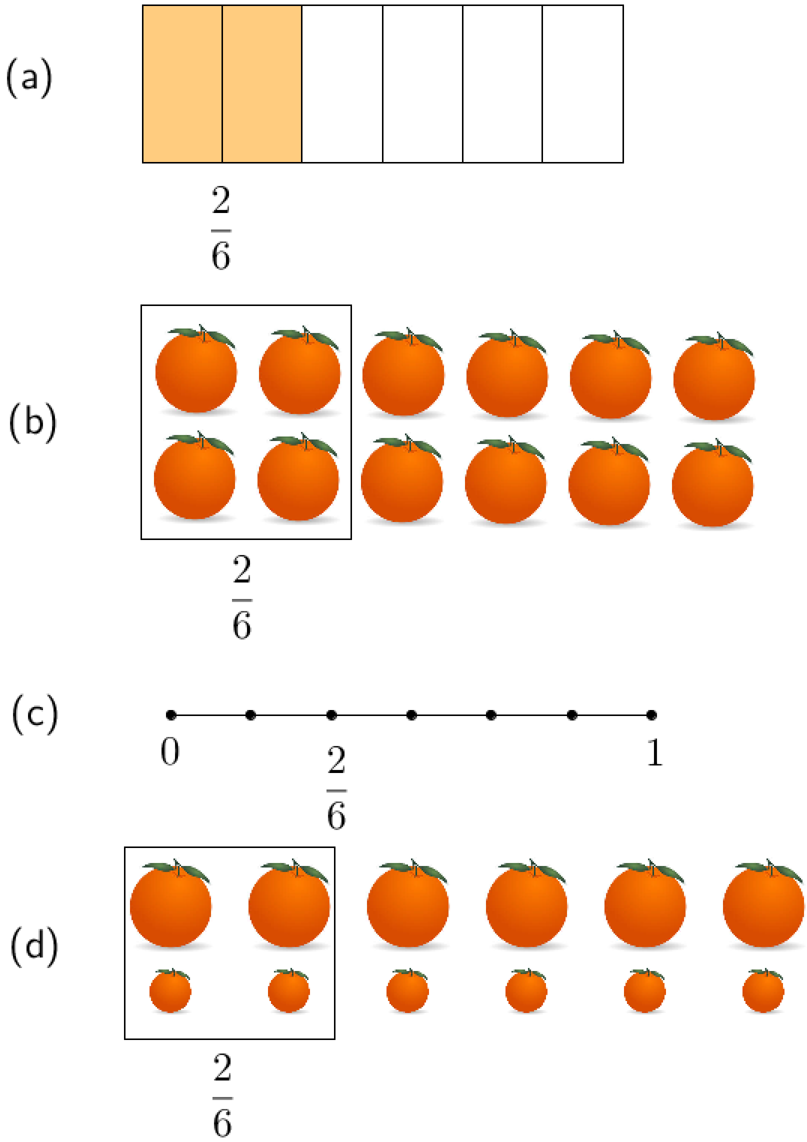

Figura 23: Modelos de representação das frações.

Um exemplo dinâmico de uma adição, esquematizado através de um modelo contínuo (retirado de [15]), é apresentado na Figura 24.

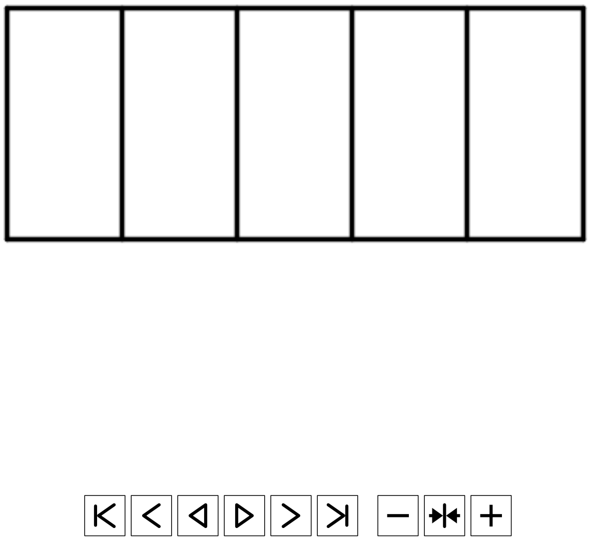

Figura 24: Adição de frações: uma ilustração dinâmica.

Esta aprendizagem esquemática sobre adições e subtrações é fundamental para alicerçar uma boa compreensão. A Figura 25 mostra uma boa atividade realizada por um aluno (retirado de [17]).

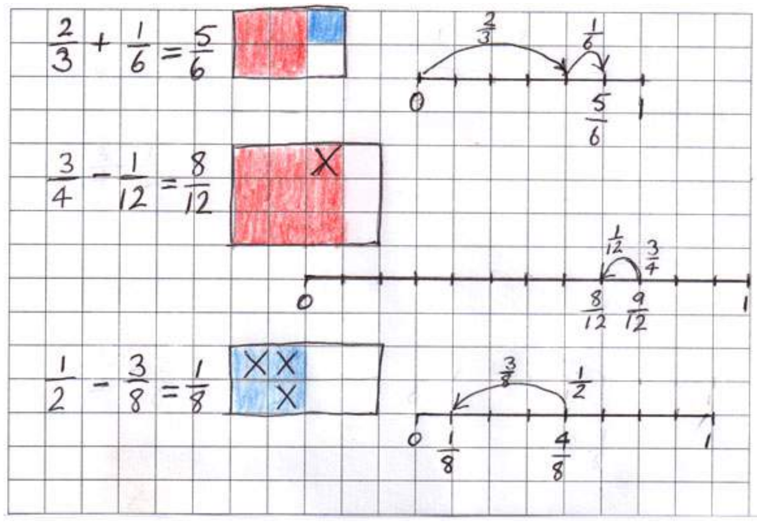

Figura 25: Atividade envolvendo dois modelos distintos.

5 Fração como multiplicador e multiplicando. O que é a multiplicação de frações?

Na capa de um livro sobre tabuadas da multiplicação, que preferimos deixar sob anonimato, apareceu a interessantíssima imagem exposta na Figura 26.

Figura 26: Tudo o que não deve ser feito.

O interesse do exemplo está no facto de mostrar *tudo o que não se deve fazer*. Se Jerome Bruner [5], um dos pais do construtivismo, defensor de um esmerado cuidado com a passagem do concreto ao abstrato (abordagem CPA), visse um exemplo destes, soltaria certamente esgares de horror! A imagem, ao utilizar morangos para dar um exemplo para concretizar a igualdade $2 \times 2 = 4$, vai contra o conceito mais fundamental da multiplicação no sentido aditivo.

Nas aplicações práticas da multiplicação no sentido aditivo, ao contrário do que se passa com as adições e subtrações, os fatores não têm a mesma natureza: um desempenha o papel de multiplicador e o outro de multiplicando.

As magníficas imagens expostas na Figura 27 constituem um bom exemplo.

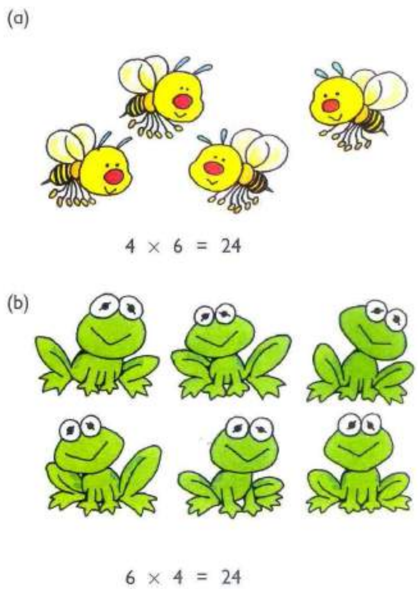

Figura 27: Multiplicador e multiplicando [7].

Esta atividade, do tipo *figura+expressão matemática*, constitui um excelente exemplo do que se deve fazer. Olhando para as abelhas, a criança tem de encontrar sentido para a igualdade $4 \times 6 = 24$. Trata-se de contar as *patas*: há quatro repetições (quatro abelhas) de conjuntos de seis patas (cada abelha tem seis patas). No total, há 4×6 patas $= 24$ patas. Observe-se que dos três números que compõem a igualdade (4, 6, 24), apenas o 6 e o 24 são patas. O 4 *não* é uma quantidade de patas, mas sim o *número de repetições*. O 4 tem um papel *operador*, sendo denominado de *multiplicador*. Da mesma forma que um explicador *ministra* a sua explicação ao explicando, que uma máquina replicadora *atua* sobre o ente replicado e que uma fotocopiadora *copia* o material a ser fotocopiado, também o *multiplicador* indica quantas vezes se repete o *multiplicando*. O primeiro tem informação sobre o *número de repetições* e o segundo, o seu alvo, constitui o material a ser repetido. Por isso, é completamente errado escrever 4 patas $\times$ 6 patas $=$ 24 patas. Isto parece um detalhe, mas é absolutamente fundamental para uma boa compreensão do que se segue.

Na Figura 28, apresenta-se um exemplo mediático, que circulou recentemente nas redes sociais. Face ao que se vê na imagem, houve muita contestação por esse mundo fora, uma vez que a professora queria que o aluno respondesse $3+3+3+3+3$ e não $5+5+5$. Por esse motivo, puniu a resposta da criança. A "zanga" atingiu níveis consideráveis e o assunto foi discutido tanto pelo cidadão comum como por especialistas. No entanto, entendemos que as críticas não foram colocadas de forma certeira. A nosso ver, a questão principal consiste no facto de *o exercício estar mal elaborado*. Do ponto de vista algébrico, é claro que 3×5 é igual a 5×3 (a contestação veio naturalmente do facto de a multiplicação ser comutativa). Sendo assim, para cumprir o objetivo de convidar o aluno a diferenciar os papéis de multiplicador e multiplicando, faltou uma coisa fundamental: contextualizar o exercício com uma situação da vida real.

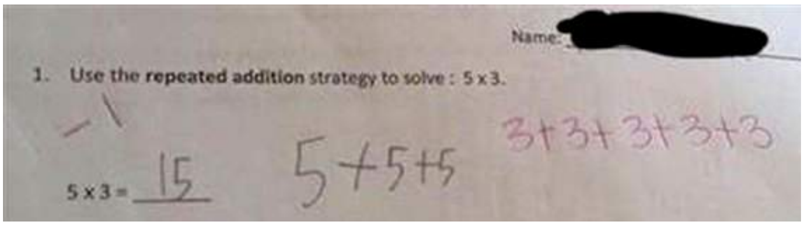

Figura 28: Um exemplo mediático.

A Figura 27 constitui um bom exemplo de dois exercícios bem feitos com o mesmo propósito. Em ambas as alíneas, é apresentada uma situação concreta lado a lado com uma igualdade (envolvendo uma expressão numérica com uma multiplicação). O aluno é convidado a explicar como se relaciona a abstração com a concretização. Em relação a estes exemplos, há uma clara interpretação sobre o que pode ser o multiplicador; por exemplo, no caso dos sapos, há 4 patas repetidas 6 vezes e, por esse facto, damos o papel de multiplicador ao 6. Os papéis de multiplicador e multiplicando não são uma questão de lateralidade, como no caso do exemplo mediático. Em 6×4, 6 não é multiplicador por estar à esquerda; isso não faz sentido algum. Perante os cálculos 6×4 e 4×6 em abstrato, não temos uma forma clara de atribuir o papel de multiplicador a um dos fatores, a não ser por intermédio de uma *convenção* que se possa estabelecer. No entanto, estando perante situações concretas, esse papel já vem da lógica trazida por essas situações. É claro que, na língua portuguesa, dizemos mais vezes “Tenho 3 vezes dois bolos.” do que “Tenho dois bolos 3 vezes.”. Devido a esse facto, há uma tendência para se dizer que o fator da esquerda é o multiplicador. No entanto, a razão linguística não é, de todo, o conceito vital. O fundamental é que, nas situações práticas, há algo que se repete e, quando as traduzimos em linguagem matemática, há uma informação sobre o número de repetições traduzida através de um número. A única forma de saber o que se repete e quantas vezes é repetido é partir de situações da vida real. Numa expressão algébrica abstrata, a questão não se coloca fora da nossa capacidade para definir coisas e estabelecer convenções (que, por sinal, é uma ótima e bem sucedida capacidade humana). Perante a questão “No cálculo 3×5, qual é o multiplicador e qual é o multiplicando?”, a boa resposta é “Não sei. Qual é a situação concreta em que se está a aplicar o cálculo?”. É por isto que a professora não devia ter punido o aluno. A origem do problema esteve, como acontece tantas vezes, numa conceção errada da questão a formular.

Relacionado com o tema dos papéis de multiplicador e multiplicando, está o modelo retangular da multiplicação. Este modelo constitui uma boa ajuda para a compreensão da multiplicação de frações. Considere-se a Figura 29.

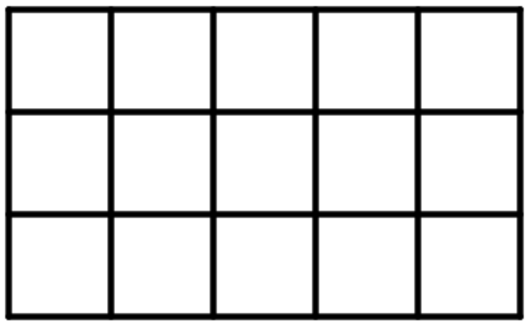

Figura 29: Multiplicação no sentido aditivo: modelo retangular.

Uma das ferramentas que as crianças do 1.° ciclo têm de aprender é a possibilidade de utilização da multiplicação no sentido aditivo para determinar o número de quadradinhos arrumados numa disposição retangular. *Não se trata de uma regra*, mas sim de uma aplicação da multiplicação. Há duas abordagens fundamentais, correspondentes a um raciocínio por linhas ou por colunas. Em relação ao primeiro, um possível diálogo pode ser o seguinte: “Quantas linhas há?”–“Três”; “Quantos quadradinhos há em cada linha?”–“Cinco”; “Nesse caso, há cinco quadradinhos que se repetem três vezes, 3×5 quadradinhos $= 15$ quadradinhos”. Quanto ao segundo: “Quantas colunas há?”–“Cinco”; “Quantos quadradinhos há em cada coluna?”–“Três”; “Nesse caso, há três quadradinhos que se repetem cinco vezes, 5×3 quadradinhos $= 15$ quadradinhos”. No primeiro caso, o número de repetições foi associado ao número de linhas, sendo este o multiplicador. No segundo, o número de repetições foi associado ao número de colunas, sendo este o multiplicador. Como bónus, a situação ilustra a propriedade comutativa da multiplicação.

Estamos, agora, em condições de explorar a multiplicação envolvendo frações. Tal como acontece com os números naturais, nas situações práticas de multiplicação no sentido aditivo, os fatores desempenham papéis diferentes. Como é de esperar, uma fração tanto pode desempenhar o papel de multiplicador como de multiplicando. No entanto, há um conceito adicional a ser compreendido.

Enquanto que, com números naturais, o multiplicador assume apenas o papel de replicador (contém a informação sobre o número de repetições), com frações passa a haver um novo papel que consiste em fazer "partes de". Quando dizemos "a terça parte de $\circledast$*", estamos a falar de* $\frac{1}{3} \times \circledast$*; quando dizemos "metade de* $\circledast$*", estamos a falar de* $\frac{1}{2} \times \circledast$*. Mais, o multiplicador pode conter em si mesmo uma dupla informação relativa a "repetições" e a "partes de". Por exemplo, quando dizemos "duas terças partes de* $\circledast$*", estamos a falar de* $\frac{2}{3} \times \circledast$ *e isso significa que temos duas repetições da terça parte de* $\circledast$*. Mais uma vez, o numerador quantifica e o denominador qualifica.*

Não se pode perceber a multiplicação de frações sem compreender este conceito. Na multiplicação não há a exigência de uma natureza comum, pura e simplesmente porque os fatores desempenham papéis diferentes ao serviço de uma operação aritmética que tem um objetivo diferente do da adição ou subtração. É por isso que não é exigida a determinação de um denominador comum. No caso da multiplicação no sentido aditivo, as melhores metáforas para o multiplicador são "fotocopiadora" e "faca". A primeira replica e a segunda parte. A mistura das duas constitui a ação de uma fração como multiplicador. Observe-se novamente a Figura 27: os cálculos 4×6 e 6×4 aparecem diferentemente nos exemplos das abelhas e dos sapos para mostrar 4 como multiplicador e 6 como multiplicador. No caso das frações, é exatamente igual. Podemos ter $3 \times \frac{1}{2}$ bolo (3 cópias de metade de um bolo) ou $\frac{1}{2} \times 3$ bolos (metade de uma quantidade de três bolos). Em ambos os casos, o resultado é três meios de bolo, mas as imagens são diferentes, como é ilustrado na Figura 30.

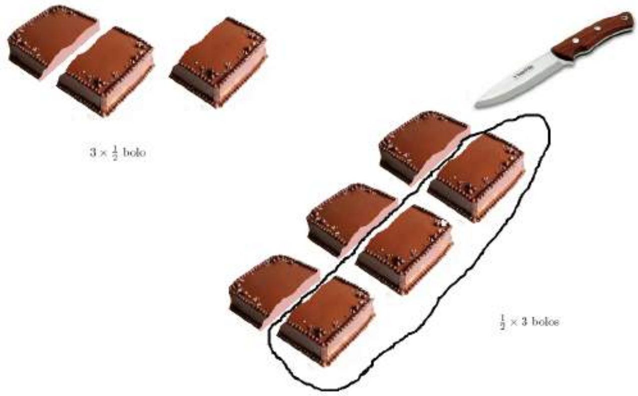

Figura 30: Fração como multiplicando VS fração como multiplicador.

Para proporcionar um entendimento conceptual da multiplicação de frações, aconselhamos a abordagem do *Singapore Math* que, basicamente, divide o assunto em três casos, tratando os dois primeiros no 1.° ciclo e o terceiro no 2.° ciclo. Estes casos podem ser compreendidos a dois níveis (o ideal é alcançar ambos): *procedimental*, que consiste em saber fazer (saber executar) e *conceptual*, que consiste em saber profundamente o que se faz (explicar o motivo porque se faz assim). É curioso constatar que, ao nível procedimental, a multiplicação de frações é mais fácil do que a adição e subtração mas, ao nível conceptual, é o contrário.

Caso 1: número natural $\times$ fração
número natural como multiplicador e fração como multiplicando

Este é claramente o caso mais fácil. Corresponde a situações como $4\times\frac{2}{3}$ bolo ou, por extenso, o "quádruplo de dois terços de bolo". Repare o leitor que se a expressão fosse o "quádruplo de dois coelhos" ou o "quádruplo de dois berlindes", as respostas automáticas seriam "oito coelhos" ou "oito berlindes". É claro que no caso de o "quádruplo de dois terços de bolo" a resposta também é natural e é "8 terços de bolo". Aliás, outro exemplo do mesmo tipo pode ser analisado do lado esquerdo da Figura 30. A razão de ser o caso mais fácil consiste no facto de o denominador indicar apenas a unidade (terços de bolo) e o resto da tarefa ser quantitativa, correspondendo simplesmente à multiplicação aditiva de números naturais (4×2). É claro que $n\times\frac{a}{b}\circledast$ resulta em $\frac{n\times a}{b}\circledast$, uma vez que se trata de $n\times a$ unidades em que a unidade é a b-ésima parte de $\circledast$. O que quer que seja $\circledast$ (e.g., bolos, coelhos, naves espaciais), basta efetuar $\frac{n\times a}{b}$. É interessantíssimo verificar que muitas pessoas adultas transformam um cálculo como $3\times\frac{2}{5}$ em $\frac{3}{1}\times\frac{2}{5}$. Isso é um sintoma revelador de que algo já está a correr mal; significa que a pessoa aprendeu um procedimento e já está a perder a visão conceptual do assunto.

Caso 2: fração $\times$ número natural
fração como multiplicador e número natural como multiplicando

Este caso já pede uma análise mais cuidada. Imagine que quatro irmãos recebem de herança três sacos, cada um com 20 diamantes. Para dividirem igualmente a riqueza entre si, dá jeito operar $\frac{3}{4}\times 20$ diamantes. A conta $\frac{3}{4}\times 20$ é a que se adapta à situação e pode ser pensada em *dois passos*: a quarta parte de cada saco corresponde a 5 diamantes. Como há 3 sacos, cada irmão deverá receber 3×5 diamantes= 15 diamantes. Este pensamento aponta para o procedimento seguinte:

$$\frac{3}{4}\times 20 \text{ diamantes} = 3\times \text{ a quarta parte de vinte diamantes} =$$
$$= 3\times\frac{20}{4} \text{ diamantes} = 3\times 5 \text{ diamantes} = 15 \text{ diamantes}.$$

Acontece que há uma segunda forma de resolver este problema. Os irmãos podem abrir primeiro os sacos e juntar tudo, ou seja, o total da riqueza é de 3×20 diamantes = 60 diamantes. Em seguida, tiram o seu quinhão, ou seja, a terça parte de 60 diamantes. Este segundo pensamento aponta para o procedimento seguinte:

$$\frac{3}{4}\times 20 \text{ diamantes} = \text{a quarta parte do triplo de vinte diamantes} =$$
$$= \frac{1}{4}\times 3\times 20 \text{ diamantes} = \frac{1}{4}\times 60 \text{ diamantes} = 15 \text{ diamantes}.$$

Basicamente, o que estamos a dizer é que tanto faz efetuar $3 \times \frac{20}{4}$ como $\frac{3\times 20}{4}$. Mais uma vez, parece um pequeno pormenor, mas é um detalhe importante, com reflexo na análise das imagens e na compreensão dos exemplos. A Figura 31 mostra um exemplo retirado dos manuais do *Singapore Math*, ilustrando o primeiro método. A Figura 32 ilustra o segundo método. A exploração destes casos é tratada no 4.° ano de escolaridade.

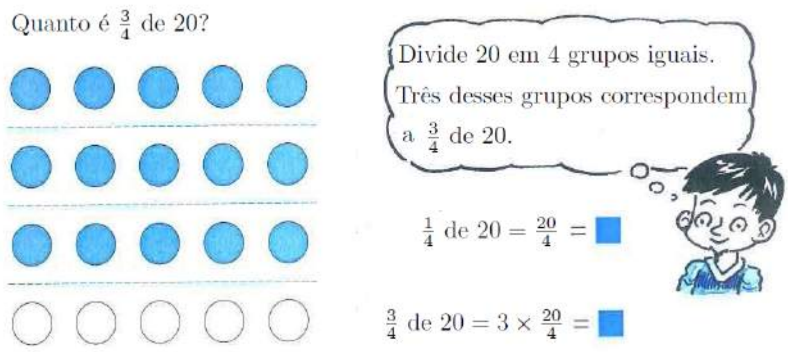

Figura 31: Fração × número natural: primeiro método.

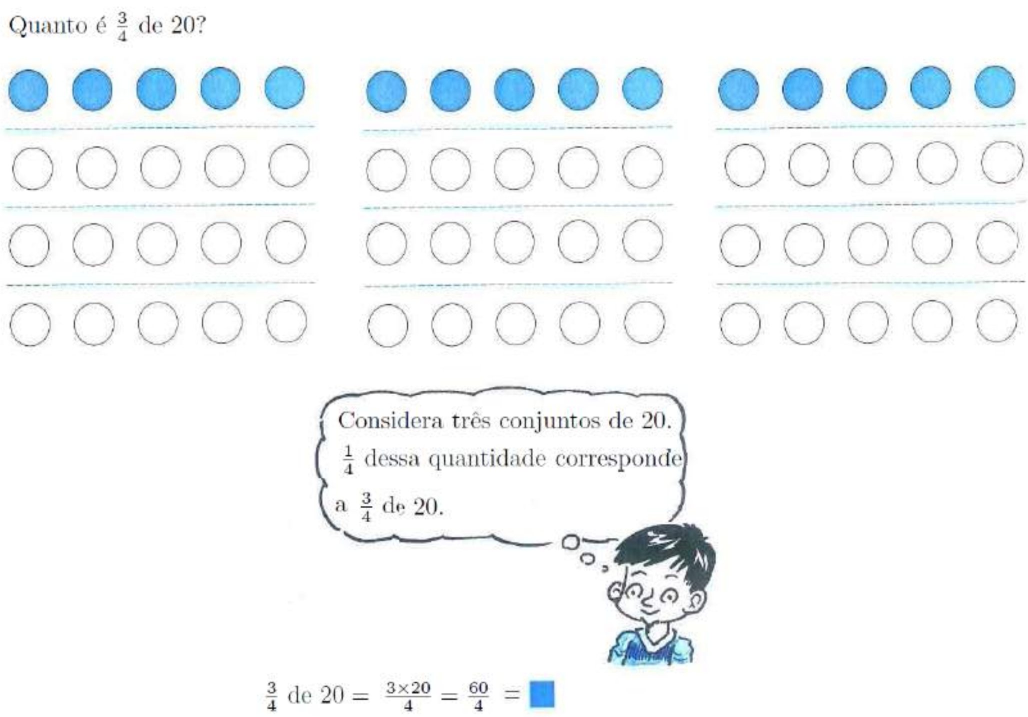

Figura 32: Fração × número natural: segundo método.

CASO 3: FRAÇÃO $\times$ FRAÇÃO

Para abordar o caso geral, é importante responder primeiro a uma pergunta do género "Quanto é um terço de um quinto de bolo?". Ou seja, "Como interpretar o cálculo $\frac{1}{n} \times \frac{1}{m}$?". Considere-se a Figura 33. Em cima, vemos $\frac{1}{5}$ de bolo, uma fatia cortada na vertical. Em baixo, vemos o bolo cortado na horizontal em três partes iguais. Naturalmente, o quadradinho vermelho é um terço de um quinto de bolo. Mas que parte é essa? A resposta é simples! Pelo raciocínio multiplicativo que vimos anteriormente, associado à Figura 29, esse quadradinho vermelho é *uma de* 3×5 *partes iguais que constituem o bolo*. Sendo assim, um terço de um quinto de bolo é um quinze avos de bolo, ou seja, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$. Em geral, $\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{n \times m}$.

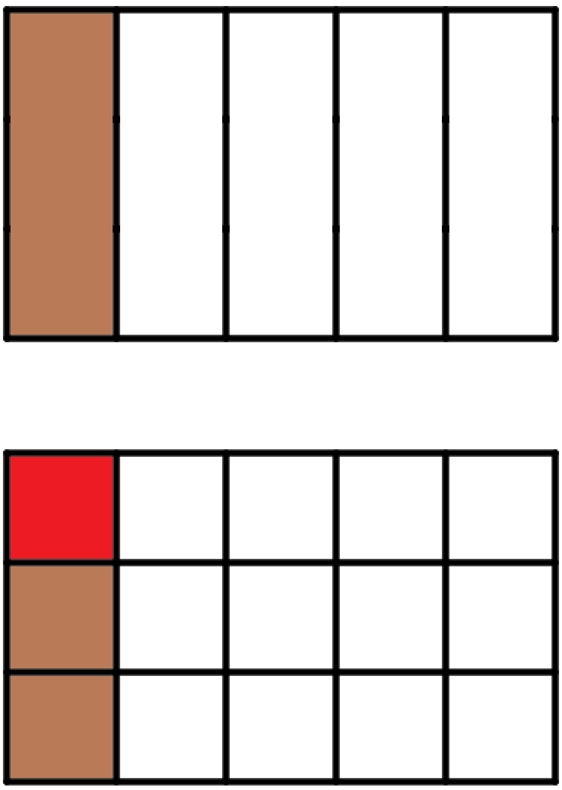

Figura 33: Um terço de um quinto de bolo.

Compreendido este esquema, o caso geral da multiplicação de frações pode ser finalmente interpretado. A Figura 34 constitui uma ilustração dinâmica.

Figura 34: Calcular $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$: uma ilustração dinâmica.

Na Figura 35, retirada de um manual do 5.° ano do *Singapore Math*, ano onde se trata o caso geral, utiliza-se uma tesoura como metáfora para o papel da fração como multiplicador.

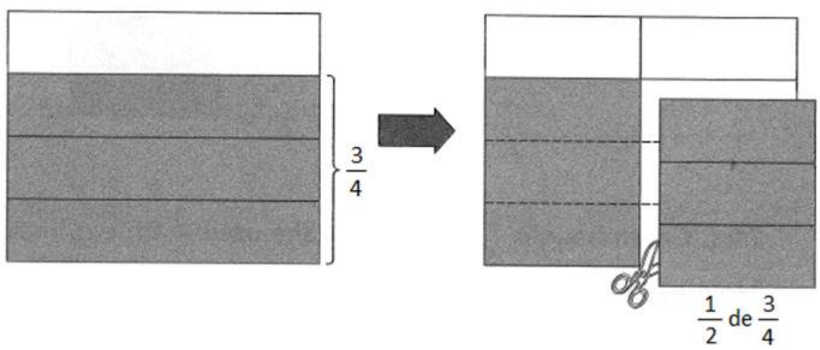

Figura 35: Um meio de três quartos de um retângulo.

6 Medir e repartir. Noção de inverso e divisão de frações

Em [13], no âmbito de um estudo comparativo sino-americano, Liping Ma colocou algumas questões a professores dos primeiros anos. Uma delas foi a seguinte:

Imagine que está a ensinar a divisão de fracções. Para que isto tenha algum significado para as crianças, muitos professores tentam mostrar as aplicações da matemática. Por vezes tentam arranjar situações da vida real ou histórias-problema para mostrar a aplicação de um conteúdo particular. Qual seria uma boa história ou um bom modelo para $\frac{7}{4} \div \frac{1}{2}$?

Esta interessante questão originou um pobre desempenho dos professores americanos, apontando para uma certa incompreensão sobre as aplicações das operações. Para melhor compreender o que se passa com a questão, olhemos novamente para uma representação da multiplicação no sentido aditivo (36).

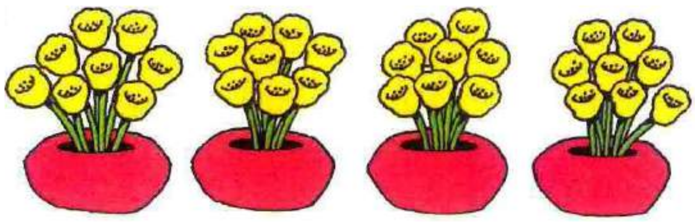

Figura 36: Vasos de flores.

Querendo formular uma questão sobre a multiplicação, é com naturalidade que surge "Tenho 8 flores em cada um dos 4 vasos. Quantas flores tenho no total?". Trata-se de flores e a questão é traduzida por 4×8 flores $= ?$. Quatro é o multiplicador (número de repetições) e oito o multiplicando (um grupo de oito flores). A resposta é "32 *flores*".

Querendo formular questões sobre a divisão, há *duas* hipóteses distintas:

(a) Pode *omitir-se o multiplicando*, perguntando sobre ele. Esse é o cenário da *divisão para repartir* (*divisão por partilha equitativa*) e uma questão natural é "Quero repartir igualmente 32 flores por 4 vasos. Quantas flores devo colocar em cada vaso?". Ora, esta questão parte da igualdade $4 \times ?$ flores $=$ 32 flores e é traduzida pela divisão 32 flores $\div\ 4 = ?$. A resposta é 8 *flores*; a natureza, que são as *flores*, aparece na resposta e a pergunta-chave é "Quanto calha a cada um?".

(b) Pode *omitir-se o multiplicador*, perguntando sobre ele. Esse é o cenário da *divisão para medir* (*divisão por agrupamento*) e uma questão natural é "Com um total de 32 flores, quero fazer vasos com 8 flores. Quantos vasos consigo fazer?". A questão parte da igualdade $? \times 8$ flores $=$ 32 flores e é agora traduzida pela divisão 32 flores $\div$ 8 flores $= ?$. A resposta é 4; a natureza, que são as flores, não aparece na resposta (não faz sentido algum responder 4 flores) e a pergunta-chave é "Quantas vezes cabe?". Trata-se efetivamente de uma medição; utilizando 8 flores como unidade, o que se está a fazer é medir um total de 32 flores, tendo em conta essa unidade; 32 flores correspondem a 4 unidades. Nesta aplicação concreta, faz sentido escrever $\frac{32 \text{ flores}}{8 \text{ flores}}$, indicando que se pretende saber quantas vezes um grupo de 8 flores cabe num grupo de 32 flores. Na medição, tal como nas adições e subtrações, a mesma natureza é vital: medimos comprimentos com comprimentos, áreas com áreas, etc. A resposta é um *número puro*[2].

Repartir	**Medir**
Pretende-se descobrir o multiplicando	Pretende-se descobrir o multiplicador
O resultado exprime-se na natureza dos objetos apresentados no problema (e.g., flores, maçãs, joaninhas, ...).	O resultado é um número puro.
Questão típica: "Quanto calha a cada um?"	Questão típica: "Quantas vezes cabe?"

A situação de multiplicação no sentido aditivo origina duas situações de divisão, conforme o objetivo seja a determinação do multiplicando ou do multiplicador. Naturalmente, esta ideia é vital para uma boa compreensão das divisões que envolvem frações.

Divisão para repartir no contexto das frações: noção de inverso

Estamos habituados a dividir riquezas por muitas pessoas. São comuns problemas como "Cada conjunto de três pessoas recebe 24 euros. Admitindo uma divisão equitativa, quanto recebe cada pessoa?". No entanto, para as crianças (e mesmo para os adultos!), problemas como "Cada *metade de pessoa* recebe 24 euros. Quanto recebe cada pessoa?" já trazem mistério e estupefação. Mas é uma abordagem *legítima*; a Figura 37 ilustra a ideia.

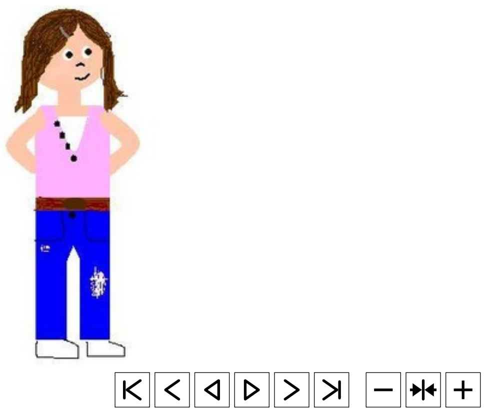

Figura 37: Calcular $24 \div \frac{1}{2}$: uma ilustração dinâmica.

Uma vez que cada pessoa tem duas metades e cada metade recebe 24 euros, a resposta à questão é 48 euros. O cálculo 24 euros $\div \frac{1}{2}$ é transformado na mul-

[2] Um físico cortaria alegremente a palavra "flores" do numerador com a palavra "flores" do denominador, indicando o resultado 4 na sua forma pura. Trata-se de uma mnemónica operatória que se ajusta à ideia de medição e à pergunta "Quantas vezes cabe?".

tiplicação 2×24 euros. Isto porque $\frac{1}{2}$ cabe 2 vezes numa unidade. É isto o *inverso multiplicativo de um número*: o número de vezes que esse número cabe numa unidade. O inverso de $\frac{1}{2}$ é 2.

É fácil explicar que o inverso de $\frac{1}{2}$ é 2, o inverso de $\frac{1}{10}$ é 10 e, assim, sucessivamente. Mas como pensar no inverso de uma fração como $\frac{2}{3}$ ou, em geral, $\frac{n}{m}$? Nesses casos, a explicação tem de ser cuidada e estrutura-se da seguinte forma:

- $\frac{2}{3}$ pode ser pensado como a *terça parte de duas unidades.*
- $\frac{2}{3}$ *cabe três vezes em duas unidades.*
- Logo, $\frac{2}{3}$ *cabe* $\frac{3}{2}$ *de vezes numa unidade.*
- O inverso de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$!

Exatamente da mesma forma, podemos argumentar que o inverso de $\frac{n}{m}$ é $\frac{m}{n}$. A compreensão desta mensagem é muito delicada quando se trata de um aluno do 2.° ciclo. Tem de haver uma esmerada representação da ideia e, mesmo assim, muitos não a perceberão totalmente com essa idade. A Figura 38 é uma obra de arte de esquematização deste conceito matemático.

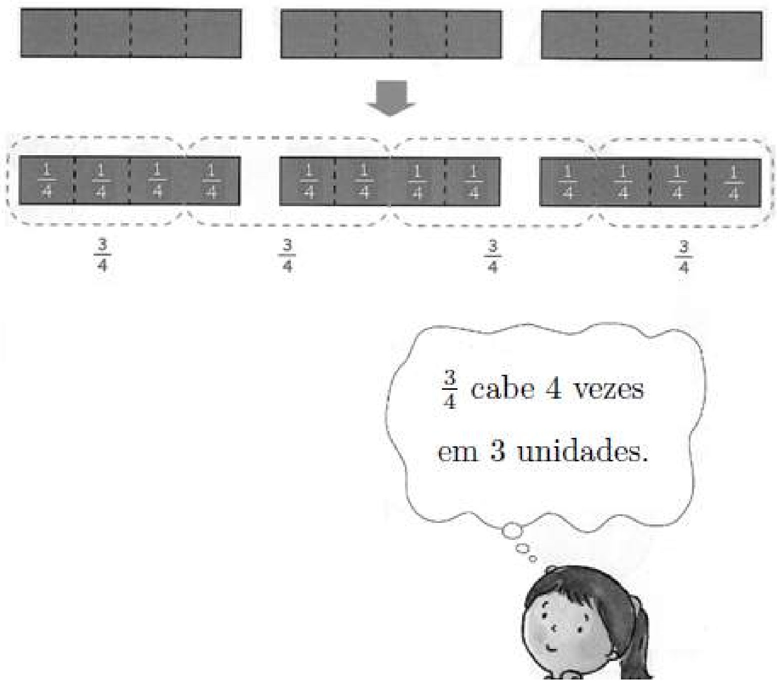

Figura 38: Noção de inverso.

Sendo assim, a divisão pode ser simplesmente transformada numa multiplicação através do conceito de inverso.

Dividir é o mesmo que multiplicar pelo inverso.

$$\tfrac{a}{b} \div \tfrac{c}{d} = \tfrac{d}{c} \times \tfrac{a}{b} = \tfrac{a}{b} \times \tfrac{d}{c}$$

No estudo de Liping Ma, há respostas de professores chineses que são exemplos didáticos de grande qualidade. Eles frisam os conceitos através de *frases simples e certeiras*. Tal como ligámos as operações inversas, 32 flores $\div$ 4 = ? flores e 4 $\times$? flores = 32 flores, podemos e devemos fazer o mesmo no caso das frações:

> "Pretende-se encontrar um número tal que metade dele seja $\frac{7}{4}$, ou seja, dividir por uma fração é encontrar um número, quando uma parte fracionária dele é conhecida."
>
> "Metade de uma corda de saltar mede $\frac{7}{4}$ de metro, qual é o comprimento da corda?"
>
> "Um comboio demora uma hora e três quartos a fazer metade de um percurso. Quanto tempo demora o comboio a fazer o percurso completo?"
>
> "Pagando $\frac{7}{4}$ *Yuan* para comprar $\frac{1}{2}$ de bolo, quanto custa o bolo inteiro?"

Outros professores apontam duas propriedades simples, mas não evidentes para todas as pessoas. A primeira delas é seguinte:

$$(N \div a) \div b = (N \div b) \div a.$$

Trata-se mais uma vez de uma consequência da propriedade comutativa da multiplicação, ilustrada com o exemplo dos cortes no bolo. Tanto faz fazer primeiro a cortes na vertical e em segundo lugar b cortes na horizontal, como fazer primeiro b cortes na horizontal e em segundo lugar a cortes na vertical. O quadradinho a comer no fim será $\frac{1}{ab}$ de bolo em ambos os casos. A segunda propriedade a realçar é a seguinte:

$$N \div (a \div b) = (N \div a) \times b.$$

Esta propriedade decorre de uma ideia semelhante à exposta relativamente à noção de inverso. Se tivermos $24 \div 4$, naturalmente que a resposta é 6. No entanto, se tivermos $24 \div 4$ *terços*, uma vez que há três terços em cada unidade, o resultado é agora 6×3. Com estas duas propriedades, podemos apreciar uma notável resposta de um professor chinês [13].

O Prof. Xie foi o primeiro professor que eu conheci que descreveu um método pouco comum de efetuar a divisão por fracções *sem usar a multiplicação*. Disse-lhe que nunca tinha pensado nisso e pedi-lhe que explicasse como funcionava. Ele disse que era fácil:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{4} \div \frac{1}{2} &= & (1)\\
(7 \div 4) \div (1 \div 2) &= & (2)\\
((7 \div 4) \div 1) \times 2 &= (\textit{Segunda propriedade}) & (3)\\
((7 \div 1) \div 4) \times 2 &= (\textit{Primeira propriedade}) & (4)\\
(7 \div 1) \div (4 \div 2) &= (\textit{Segunda propriedade}) & (5)\\
\frac{7 \div 1}{4 \div 2} & & (6)
\end{aligned}$$

Notavelmente, o que este professor explicou é que se pode efetuar diretamente a divisão:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}.$$

Contudo, o professor observou que esta abordagem apenas é indicada nos cálculos em que quer o numerador como o denominador do dividendo são divisíveis respetivamente pelo numerador e pelo denominador do divisor.

DIVISÃO PARA MEDIR NO CONTEXTO DAS FRAÇÕES

A divisão de frações pode também ser pensada no sentido da medição. Pensemos no cálculo $\frac{5}{2} \div \frac{3}{5}$, concretizando-o numa situação envolvendo dinheiro. Imagine que tem sacos com 3 moedas de 20 cêntimos ($\frac{3}{5}$ de euro) e que quer saber a quantidade de sacos necessária para obter uma quantia correspondente a 5 moedas de 50 cêntimos ($\frac{5}{2}$ de euro). Na prática estamos a medir; queremos saber *quantas vezes* $\frac{3}{5}$ *cabe em* $\frac{5}{2}$.

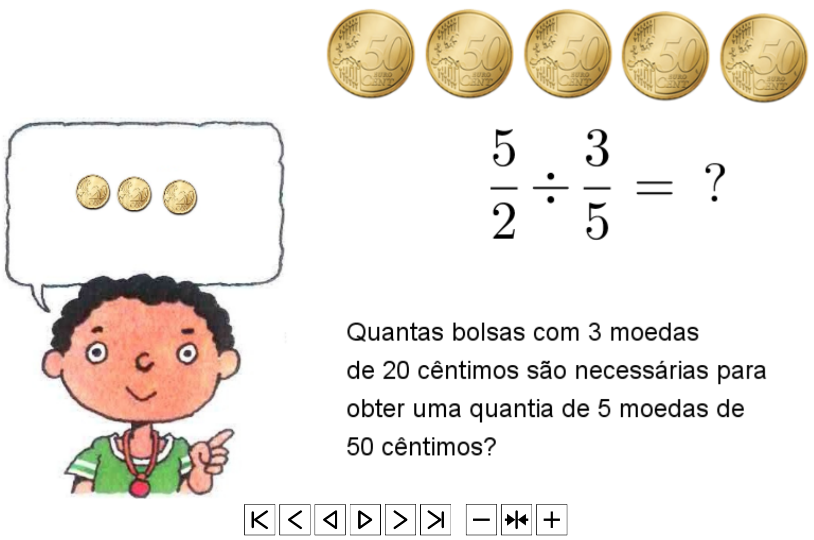

Figura 39: Calcular $\frac{5}{2} \div \frac{3}{5}$: uma ilustração dinâmica.

Se utilizarmos *uma mesma natureza*, isto é, *se encontrarmos um denominador comum* (no caso de dinheiro, um troco comum), a comparação é possível. E, feito isso, *não é preciso pensar nessa natureza* – repare-se que as questões "quantos sacos de dois bolos são necessários para ter seis bolos?" ou "quantos sacos de dois berlindes são necessários para ter seis berlindes?" têm a mesma resposta, três. Não interessa a natureza, o que interessa é *que seja a mesma*. Sendo assim,

$\frac{5}{2}$ de euro são 25 moedas de 10 cêntimos ($\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$);

$\frac{3}{5}$ de euro são 6 moedas de 10 cêntimos ($\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$);

25 décimos a dividir por 6 décimos resulta em $\frac{25}{6}$;

São precisos quatro sacos mais um sexto de um quinto saco.

Encarando a divisão no sentido da medição, a determinação do mesmo denominador é natural e isso constitui mais uma forma de explicar a regra operatória:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} \underbrace{=}_{\text{a mesma natureza é irrelevante}} \frac{ad}{bc}.$$

Também no sentido da medição, podemos ter ótimas respostas à questão de Liping Ma:

> "Se uma equipa de trabalhadores construir $\frac{1}{2}$ km de estrada por dia, quantos dias levarão para construir uma estrada com $\frac{7}{4}$ km de comprimento?"
>
> "Comprei $\frac{7}{4}$ kg de açúcar. Quero colocar esse açúcar em sacos de $\frac{1}{2}$ kg. Quantos sacos são precisos?"

Referências

[1] Aharoni, R. *Aritmética para Pais*, Gradiva, 2008.

[2] Atractor. `www.atractor.pt`

[3] Ball, D. "Halves, pieces and twoths: constructing and using representational contexts in teaching fractions", In Carpenter, T., Fennema, E., Romberg, T. (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 157–196), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, 1993.

[4] Bruce, C., Chang, D., Flynn, T. *Foundations to Learning and Teaching Fractions: Addition and Subtraction*, EduGAINS, Ontario Ministry of Education, 2013. `www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/LNSAttentionFractions.pdf`

[5] Bruner, J. *The process of education*, Harvard University Press, 1960.

[6] Fractions and their uses. `http://hiawatharoom430.weebly.com/puzzling-unit-7.html`

[7] Hong, K. *Primary mathematics Textbook 1B*, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[8] Hong, K. *Primary mathematics Textbook 2B*, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[9] Hong, K. *Primary mathematics Textbook 3B*, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[10] Hong, K. *Primary mathematics Textbook 4A*, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[11] How to teach your child numbers arithmetic mathematics. http://www.abelard.org/sums/teaching_number_arithmetic_mathematics_fractions_decimals_percentages1.php

[12] Learning about fractions with lego. http://www.andnextcomesl.com/2014/10/learning-about-fractions-with-lego.html

[13] Ma, L. *Saber e Ensinar Matemática Elementar*, Gradiva, 2009.

[14] Sousa, D. *How the brain learns Mathematics*, 2nd edition, Corwin, 2015.

[15] Streefland, L. *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*, Mathematics Education Library, 1991.

[16] The simplest way to explain math to kids. https://www.facebook.com/brightside/videos/801672809961464

[17] Top Drawer Teachers. http://topdrawer.aamt.edu.au/Fractions

[18] Wong, M., Evans, D. *Assessing Students' Understanding of Fraction Equivalence*, The Australian Association of Mathematics Teachers (AAMT) Inc., 2011.

[19] Wu, H. Vários artigos e notas curriculares sobre o ensino das frações, disponíveis em https://math.berkeley.edu/~wu