Jornal das Primeiras MATEMÁTICAS

Número 9
Dezembro 2017

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR
Ludus

Frações (Parte II)

Carlos Pereira dos Santos, Ricardo Cunha Teixeira
Centro de Análise Funcional, Estruturas Lineares e Aplicações da Universidade de Lisboa
Núcleo Interdisciplinar da Criança e do Adolescente da Universidade dos Açores
cmfsantos@fc.ul.pt, ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *A temática dos números racionais não negativos é provavelmente o assunto mais delicado no que diz respeito ao ensino da matemática elementar, no 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. Por terem múltiplas aplicações, contextos e sentidos, as frações pedem um ensino altamente especializado e esmerado. Há que promover de forma cuidada a construção de modelos mentais adequados ao conceito de fração, fasear e ordenar os nós conceptuais ao longo dos anos e dosear o caráter abstrato/concreto dos exemplos e atividades. Muito se testou, teorizou e escreveu sobre esta temática. Este trabalho consiste num resumo alargado sobre o ensino das frações, documentado em literatura especializada e ilustrado através de exemplos concretos retirados de manuais do* Singapore Math*, um dos mais cotados métodos de ensino do mundo.*

Palavras-chave: Números racionais não negativos, frações, numerais mistos, frações equivalentes, operações aritméticas, dízimas, percentagens, proporções, razões, regra de três simples, escalas, resolução de problemas, *Singapore Math.*

NOTA PRÉVIA: A introdução que se segue é análoga às notas preliminares que constam na primeira parte deste texto [9]. Optou-se pela sua transcrição, na medida em que estas duas partes devem ser vistas como um corpo único, portador de uma introdução comum.

1 Introdução

Em [1], o matemático israelita Ron Aharoni cita um texto do séc. XV para argumentar que as frações já foram matéria do ensino superior. Independentemente da discussão histórica sobre o assunto, o autor quis passar a mensagem de que a temática das frações é consideravelmente sofisticada. De facto, esta temática constitui um dos assuntos mais melindrosos no que diz respeito ao ensino da matemática inicial. Uma das razões para tal é a necessidade constante de contextualização. Quando se escreve $\frac{2}{3}$, está-se frequentemente a mencionar duas terças partes de alguma coisa. Basta que numa mesma frase se mencionem duas frações relativas a todos diferentes para se lançar o caos: "$\frac{2}{3}$ de quê?", "$\frac{5}{7}$ de quê?". Quando se escreve "a relação é de 2 para 3" está-se novamente a relacionar grandezas, não sendo possível perceber quais são se se disser apenas $\frac{2}{3}$. As frações são abstratas, sendo *relativas* a algo.

Outro problema que as frações levantam diz respeito à álgebra que envolvem. Considere-se o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Se se adicionar dois números naturais, obtém-se novamente um número natural. No entanto, se se quiser fazer uma compra de uma coisa que custa 100 euros, só com 80 euros na carteira, pode-se propor ficar a dever. Como $80 - 100 = -20$, utilizam-se os números negativos para exprimir essa dívida. Foi preciso estender o conjunto dos naturais. Passa-se a lidar com os números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, pelo que *tem de se aprender a operar com eles* (e.g., adicionar, subtrair, multiplicar e dividir). Imagine-se, agora, que alguém tem um bolo e quer dividi-lo igualmente com um amigo. *Os números inteiros já não chegam.* A melhor forma de descrever o que cada um recebe recebe é dizer "meio bolo", ou seja, $\frac{1}{2}$ bolo. E, mais uma vez, tendo sido feita nova extensão, é preciso saber operar com estes objetos chamados *frações*. É um péssimo sintoma ver os jovens a transformar o elegante objeto $\frac{1}{2}$, a melhor forma de referir metade, em 0,5. Isto porque 0,5 é apenas mais uma forma de referir cinco décimos, ou seja, $\frac{5}{10}$. Transformou-se algo minimalista e irredutível numa representação menos elegante da mesma quantidade. Este sintoma revela que o jovem não está à vontade com as frações, tendo tendência para pensar em termos de representações decimais. Na maioria dos casos, não é esse o procedimento certeiro. Não se deve fugir da álgebra que as frações envolvem, mas sim aprendê-la. E a cultura matemática aumenta de forma muito significativa com isso, potenciando inclusive uma eficaz aplicação de muitos conceitos relacionados com as frações na vida do dia a dia.

Segundo David Sousa, autor do livro *How the brain learns Mathematics* [8], estudos realizados no âmbito das Neurociências Cognitivas têm revelado resultados intrigantes, que apontam para a existência de uma reta numérica mental que nos ajuda a comparar números, sendo que a rapidez com que comparamos dois números depende não só da distância entre eles como também da sua ordem de grandeza (ver Figura 1). É, portanto, mais rápido decidir que $73 > 34$ do que $73 > 72$ e que $3 > 2$ do que $73 > 72$.

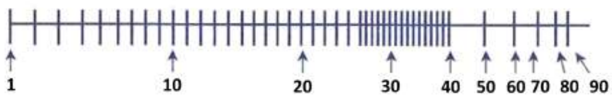


Figura 1: Reta numérica mental.

Qual a importância desta descoberta? Percebe-se que a reta numérica mental oferece uma intuição limitada sobre os números, estando apenas contemplados os números naturais. Este facto pode explicar a falta de intuição quando se lida, por exemplo, com números negativos ou com frações, que não correspondem a qualquer categoria natural no cérebro. Para os compreender, é necessário construir modelos mentais adequados.

Os primeiros contactos com as frações sucedem normalmente com 6 ou 7 anos de idade. A partir daí, o seu tratamento deve ser cuidadosamente faseado. Isto porque um dos motivos para a temática ser melindrosa é o facto de as frações encerrarem múltiplas utilizações e contextualizações. Uma pequena lista ordenada é a seguinte:

1. O que é uma fração? Fração como relação todo-partes.
2. Representações distintas da mesma quantidade. Frações equivalentes.
3. Mesma natureza e mesmo denominador. Adição e subtração de frações.
4. Fração como multiplicador e multiplicando. O que é a multiplicação de frações?
5. Medir e repartir. Noção de inverso e divisão de frações.
6. Quantas unidades há numa fração? Numeração mista.
7. Como se relacionam as frações com o sistema de numeração decimal?
8. Relacionar dois valores de uma mesma grandeza. Fração como razão.
9. Fração para relacionar grandezas diferentes.
10. Igualdade de relações. Frações ao serviço das proporções e regra de três simples.
11. Como se relacionam as frações com as percentagens?
12. Como se relacionam as frações com as escalas?
13. Resolução de problemas envolvendo frações.

Neste artigo, que constitui a segunda de três partes de um texto único, analizar-se-ão os pontos 6–9 desta lista (os pontos 1–5 foram explorados na primeira parte deste texto [9]; a análise dos restantes pontos será apresentada na terceira parte a publicar brevemente). Uma boa revisão da literatura sobre a temática das frações pode ser encontrada em [2].

2 Quantas unidades há numa fração? Numeração mista

Há a ideia muito presente (e verdadeira) de que uma fração é um objeto matemático criado para representar quantidades comensuráveis inferiores a uma unidade. Como mencionado anteriormente, $\frac{1}{2}$ é claramente a melhor forma de representar “uma de duas partes iguais que formam um todo ou uma unidade”. Ainda assim, também para quantidades comensuráveis que excedem a unidade, as frações podem ser igualmente eficazes. Qual é a melhor forma de representar $\frac{17}{2}$? Em relação a este exemplo, uma fração continua a ser a melhor solução, na medida em que $\frac{17}{2}$ excede 8 unidades, mas é inferior a 9 unidades (em numeração decimal, seria $8,5$). Dessa forma, mais do que ser ou não inferior a uma unidade, uma fração é especialmente indicada para quantidades comensuráveis que não correspondem a um número inteiro de unidades.

Considere-se, a título de exemplo, a Figura 2 [5].

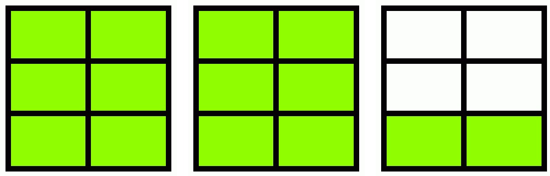


Figura 2: Uma quantidade não correspondente a um número inteiro de unidades.

Tomando como todo ou unidade um dos três retângulos maiores da imagem, trata-se de uma esquematização de uma quantidade que pode ser representada por $\frac{14}{6}$ ou por *duas unidades mais dois sextos*. Repare-se que, optando por $\frac{14}{6}$, há a vantagem de se falar exclusivamente em sextos e há a desvantagem de não se ter um acesso tão intuitivo à ordem de grandeza da quantidade. Optando por falar em *duas unidades mais dois sextos* tem-se um acesso direto à ordem de grandeza da quantidade mas, ao mesmo tempo, de forma mista, usam-se unidades e sextos numa mesma frase. Como é habitual, neste e noutros tópicos da didática da matemática elementar, o mais importante é perceber os prós e os contras de cada possível exploração.

No contexto dos números racionais não negativos, uma fração própria é uma fração inferior a 1. Uma fração imprópria é, como o nome indica, uma fração que não é própria, ou seja, superior ou igual a 1. Constitui uma enorme vantagem, em termos de avaliação de ordem de grandeza, a utilização de numerais mistos, ou seja, de somas entre um certo número inteiro de unidades e uma fração própria:

$$\frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}.$$

Na expressão acima apresentada, $8\frac{1}{2}$ representa *oito unidades mais um meio*. Sendo uma vantagem esta intuição sobre a ordem de grandeza de uma fração, por que razão, ocasionalmente, alguns currículos a excluem (nomeadamente o português)? A resposta não é aparentemente simples; uma das possíveis explicações reside no facto de a ausência de sinal ser comummente associada à multiplicação. Por exemplo, na expressão "$3(4+5)$", a ausência de sinal entre o "3" e o "(" deve ser pensada como sendo uma multiplicação. Acontece que em $8\frac{1}{2}$ a ausência de sinal entre o "8" e o "$\frac{1}{2}$" *deve ser pensada como sendo uma adição*. Muitos autores defendem que se trata de uma confusão evitável, sendo preferível em termos didáticos não explorar os numerais mistos.

Há uma outra resposta mais interessante. Usando numerais mistos, surge o problema da conversão. Como converter frações impróprias em numerais mistos e numerais mistos em frações impróprias? A Figura 3 [3] ilustra o primeiro caso.

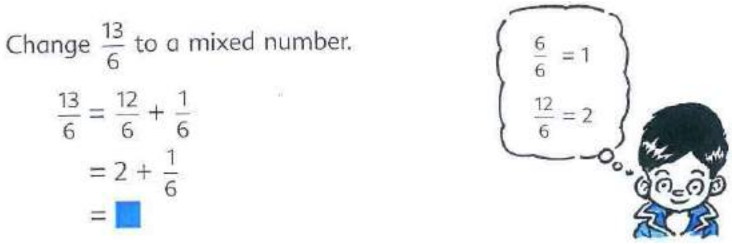


Figura 3: Conversão da fração imprópria $\frac{13}{6}$ no numeral misto $2\frac{1}{6}$.

Naturalmente, sendo $\frac{6}{6}$ uma unidade, há duas unidades $\left(\frac{12}{6}\right)$ em $\frac{13}{6}$. Três unidades $\left(\frac{18}{6}\right)$ já seriam unidades a mais. É claro que o que está aqui em causa é a divisão inteira de 13 por 6. Essa é a razão mais substancial para se desconfiar da utilização de numerais mistos: a “forte ligação” que se estabelece entre as frações e a divisão. Como se viu, há diferentes formas de se olhar para uma fração e, em muitos casos, esse olhar não passa por efetuar uma divisão. Não se deve querer que os nossos estudantes, ao esbarrar com uma fração, tenham uma atração imediata para levar a cabo uma divisão. Por outro lado, é evidente que há uma relação entre a divisão e as frações, especialmente útil para se avaliar a ordem de grandeza em termos de número de unidades. Não se pode, nem deve, fugir a isso. Ron Aharoni [1] refere mesmo que

> Um erro comum no ensino das frações por todo o mundo e em todos os livros escolares é a sua separação do ensino da divisão. As frações são normalmente apresentadas como matéria totalmente nova. Porquê?

De facto, a relação entre as frações e a divisão parece ser simplesmente mais um tópico a tratar relativamente às frações em geral. Optando por esse ponto de vista, os numerais mistos constituem algo extremamente importante. Na Figura 4 [5], apresenta-se um exercício típico.

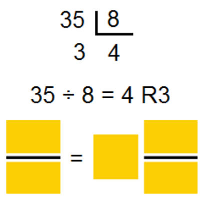


Figura 4: Relação entre a divisão inteira e os numerais mistos.

Relativamente a este exemplo, utiliza-se a divisão inteira para concluir que $\frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$. Se são precisos oito oitavos para constituir uma unidade, para ver quantas unidades há em trinta e cinco oitavos, tem de se dividir esse número por oito – essa é a íntima relação entre uma fração e a divisão inteira: o resto indica a parte própria do numeral misto; já não foi suficiente para perfazer mais uma unidade.

O problema inverso, conversão de numerais mistos em frações impróprias, tem também de ser explorado. A Figura 5 [5] mostra um exercício com uma forte componente pictórica.

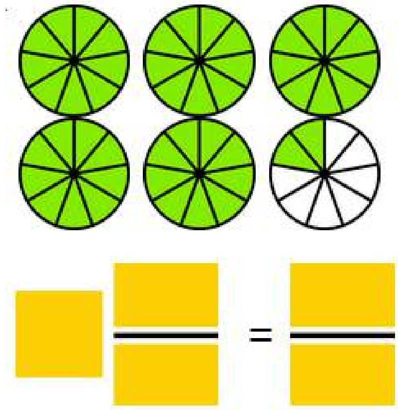


Figura 5: Conversão do numeral misto $5\frac{2}{9}$ na fração imprópria $\frac{47}{9}$.

É claro que a conversão espelhada no exemplo pode ser efetuada de forma puramente algébrica:

$$5\frac{2}{9} = 5 + \frac{2}{9} = \frac{45}{9} + \frac{2}{9} = \frac{47}{9}.$$

Há quem ensine uma mnemónica, uma espécie de "voltinha" operatória: *Multiplica-se o número de unidades pelo denominador da fração própria e adiciona-se esse resultado ao seu numerador* (Figura 6). Naturalmente, a mnemónica é uma simples consequência da adição a efetuar.

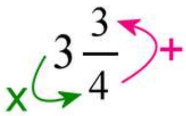


Figura 6: Mnemónica de conversão de um numeral misto em fração imprópria.

Além da avaliação da ordem de grandeza, há outras importantes vantagens na utilização de numerais mistos. Uma delas diz respeito ao bom manuseamento da dualidade "escrita não mista"/"escrita mista". A ocorrência desta dualidade não é algo específico dos numerais mistos, estando presente em muitas ocasiões. Eis alguns exemplos:

- 3 horas 52 minutos (misto) = 232 minutos (não misto);
- 5 kg 52 g (misto) = 5052 g (não misto);
- $3,05$ são *três unidades e cinco centésimos* (misto), mas também são *trezentos e cinco centésimos* (não misto).

Esta dualidade tem uma implicação evidente nas práticas operatórias. Por exemplo, a adição e a subtração precisam de uma *natureza comum.* Sendo assim, perante uma expressão como

$$5 \text{ kg } 952 \text{ g} + 3122 \text{ g}$$

há que ter cuidado; ou se pensa em

$$5952 \text{ g} + 3122 \text{ g} = 9074 \text{ g}$$

ou em

$$5 \text{ kg } 952 \text{ g} + 3 \text{ kg } 122 \text{ g},$$

adicionando tendo cuidado com a composição (1000 g = 1 kg). Neste último caso, como

$$952 \text{ g} + 122 \text{ g} = 1074 \text{ g}$$

e 1000 g *compõem* 1 kg, "ficam 74 e vai um". Este tipo de destreza aparece obviamente na operatória dos numerais mistos, sendo mais do mesmo.

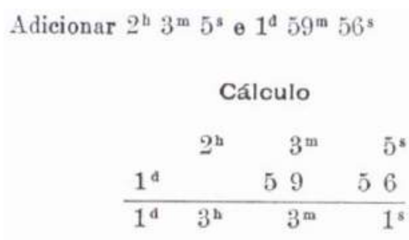
Considere o cálculo $6\frac{2}{3} + 5\frac{2}{3}$. Como

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3},$$

"fica um terço e vai uma unidade"; o resultado é $12\frac{1}{3}$. Havendo denominadores diferentes, a operação ficaria um pouco mais complexa. Claro que, usando frações impróprias, o cálculo poderia ser feito através da expressão

$$\frac{20}{3} + \frac{17}{3} = \frac{37}{3} = 12\frac{1}{3}.$$

Antigamente, praticava-se bastante a operatória de representações mistas; veja-se um exemplo [7] (Figura 7, dias, horas, minutos e segundos).


Adicionar $2^h\ 3^m\ 5^s$ e $1^d\ 59^m\ 56^s$

Cálculo

	2^h	3^m	5^s
1^d		5 9	5 6
1^d	3^h	3^m	1^s

Figura 7: Operatória com representações mistas.

Repare-se que, neste exemplo, até há *composição múltipla.* De facto, 60 segundos compõem um minuto, 60 minutos compõem uma hora, 24 horas compõem um dia. Algumas destas práticas acabaram por cair em desuso. Contudo, os processos envolvidos (pensamento sobre a natureza comum e o processo de composição) são de extrema importância. Os numerais mistos constituem uma excelente oportunidade para a compreensão desses processos. Uma vez que os ditos processos ocorrem na representação decimal posicional (que também é mista), uma outra grande vantagem da utilização de numerais mistos está na sua íntima relação com a construção do sistema posicional decimal. Este tópico será alvo de análise na próxima secção.

Uma última vantagem da utilização de numerais mistos relaciona-se com a representação de frações na reta numérica. A Figura 8 [5] exemplifica esse tipo de exercícios; nos dois exemplos superiores, os estudantes devem identificar frações já representadas; no exemplo inferior, os estudantes devem representar frações solicitadas. Só de olhar para o primeiro exemplo de cima, percebe-se que se trata do numeral misto $2\frac{2}{5}$; já em relação à última representação da reta numérica, por exemplo uma boa forma de marcar $\frac{8}{5}$ na reta é pensar esse número na forma mista $1\frac{3}{5}$.

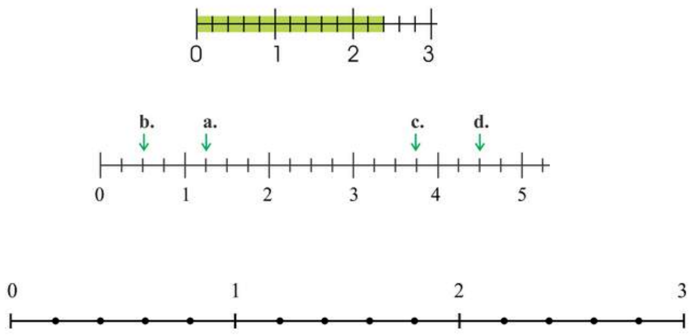


Figura 8: Representação de frações na reta numérica.

3 Como se relacionam as frações com o sistema de numeração decimal?

Atualmente (e talvez para sempre), a humanidade utiliza o sistema de numeração posicional decimal. Um número como 3452 utiliza a ideia de agrupamento para construir uma escrita mista. O número exposto corresponde a 3 milhares, 4 centenas, 5 dezenas e 2 unidades. O sistema diz-se posicional por incluir uma de duas regras fundamentais:

O valor dos símbolos depende da posição que ocupam.

Sendo assim, esta dependência da posição é a causa do carácter misto da escrita (um aspeto que traz dificuldades acrescidas no âmbito da aprendizagem da matemática elementar). A ideia de agrupamento está por detrás da palavra decimal e diz respeito à segunda regra fundamental:

São precisas dez unidades fundamentais de uma ordem numérica para compor uma unidade fundamental da ordem numérica imediatamente superior.

O que isto significa é que é preciso agrupar 10 unidades para compor 1 dezena, 10 dezenas para compor 1 centena, 10 centenas para compor 1 milhar, etc. O *dez* está na base da palavra "decimal" e relaciona-se historicamente com o facto de o Homem ter dez dedos nas duas mãos.

A utilização do zero é parte integrante do sistema, permitindo distinguir números como 31 e 301. O algarismo 3 do segundo número representa três centenas e isso é detetado através da utilização do zero como "marca-lugar". O sistema numérico utilizado hoje foi melhorado ao longo de séculos e é uma grande conquista humana.

O primeiro aspeto importante a ser tratado quanto à relação entre o sistema de numeração decimal e as frações consiste na compreensão das dízimas finitas, representações decimais que utilizam um número finito de algarismos. É no decorrer do 1.º ciclo do ensino básico que as crianças estabelecem um primeiro contacto com estas representações e com a utilização da vírgula.

Observe-se a Figura 9, onde se ilustram duas representações num ábaco japonês tradicional. À esquerda, está marcado o número 21 e, à direita, o número 2,1. A única diferença é a presença de uma pequena peça verde, indicando a posição da coluna das unidades. No exemplo da esquerda, a coluna mais à direita é a das unidades, bastando isso para esclarecer o valor de cada uma das contas: estão marcadas uma unidade e duas dezenas. A segunda coluna da direita é naturalmente a coluna das dezenas devido à regra fundamental do agrupamento de base dez. Já no exemplo da direita, é a segunda coluna da direita a das unidades. Isso faz automaticamente com que a primeira seja a dos décimos (ou décimas). A posição anterior às unidades deve ser a posição dos décimos por serem precisos dez décimos para compor uma unidade. A regra do agrupamento é universal: "no mundo das ordens, a regra fundamental vale em todo o lado".

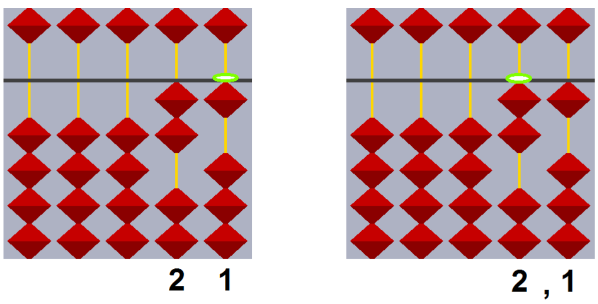


Figura 9: A utilização da vírgula num ábaco japonês.

É essa a primeira mensagem fundamental sobre a vírgula: trata-se de uma forma escrita de esclarecer a posição das unidades. De certo modo, a vírgula tem um papel muito semelhante ao papel do zero. Na distinção entre 210 e 21, conseguimos perceber onde fica a ordem das unidades devido à utilização do zero. Na distinção entre 21 e 2,1, a utilização da vírgula foi imperativa na deteção de submúltiplos da unidade. É interessante verificar que os esquemas utilizados para representar 21 e 2,1 são essencialmente os mesmos.

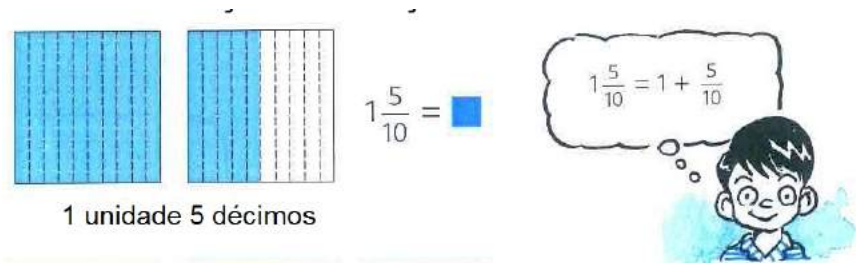


Figura 10: Representação de dízimas finitas recorrendo ao numeral misto.

Na Figura 10 [4] apresenta-se uma esquematização para 1,5. A única razão para ser uma esquematização para 1,5 e não para 15 consiste no facto de a unidade ser o quadrado grande e não cada uma das tiras ao alto. Se fosse esse o caso, a representação já seria para 15 e o quadrado representaria uma dezena.

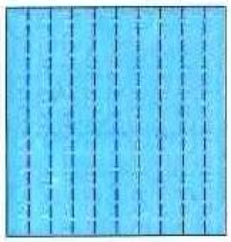


Figura 11: Exemplificação da importância da escolha da unidade.

Considere-se agora a Figura 11. A representação exposta pode ser a de 10, se a unidade for cada uma das tiras ao alto; pode ser a de 1 dividido em 10 décimos (ou 1,0); até podia representar outra ordem dependendo da escolha da unidade. Resumindo, a utilização da vírgula, a utilização do zero e a utilização de esquemas de representação numérica estão intimamente relacionadas com a escolha da unidade. Sem a compreensão deste conceito torna-se difícil a realização de esquematizações, assim como a boa utilização de materiais manipuláveis.

Um dos primeiros aspetos que uma criança tem de aprender sobre a relação das frações com o sistema de numeração decimal é o facto de, por exemplo, $\frac{3}{10}$ e 0,3 representarem o mesmo número. Uma coisa é a quantidade/relação em si mesmo, outra coisa é a representação dessa quantidade/relação. Essa ideia torna-se clara quando se pensa em dinheiro: o Carlos tem duas notas de 10 euros e o Ricardo tem uma nota de 20 euros. Os dois amigos têm a mesma quantia, mas organizada de formas diferentes. Um fenómeno semelhante acontece quando se observa a igualdade $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; à esquerda, a mesma quantidade/relação está expressa através de décimos e, à direita, através de quintos (a palavra "quantia" no âmbito do dinheiro conduz a exemplos mais claros).

No caso de 0,3 $= \frac{3}{10}$, a questão já não se coloca ao nível da organização (notas de 10 ou notas de 20; décimos ou quintos). Nesse caso, está-se a usar tipos de escrita diferentes. Por exemplo, "bolo" em português e "cake" em inglês significam o mesmo. No entanto, seria estranha a frase "This bolo is delicioso". A razão para tal consiste na utilização de duas línguas distintas na mesma frase, coisa indiciadora de confusão... As pessoas falam numa língua só. Se não se considerarem estrangeirismos, que não passam de apropriações, toda a gente evita este tipo de misturas. O que se passa com $\frac{3}{10}$ e com 0,3 é algo semelhante; são dois tipos de representação distintos, tal como também há línguas distintas. Em algum momento, as crianças devem compreender este aspeto fundamental. Exercícios típicos convidam a criança a representar o mesmo número através de vários tipos de escrita, apresentando em simultâneo representações pictóricas. A Figura 12 [10] ilustra a ideia.

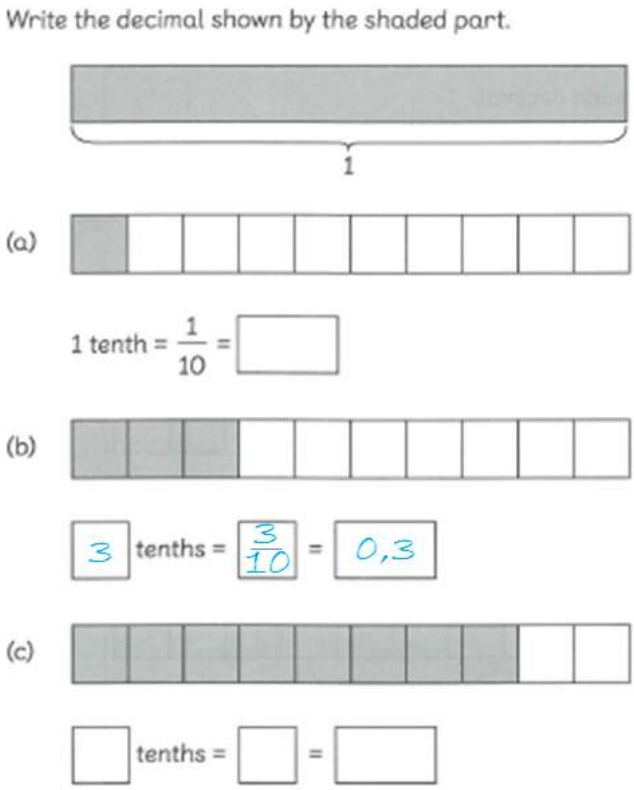


Figura 12: Tipos de representação.

Também deve haver exercícios incidindo sobre representações pictóricas. Da mesma forma que se pedem pinturas para representar frações, devem pedir-se pinturas para representar dízimas. Isso faz com que a criança se aperceba de que se trata essencialmente do mesmo (Figura 13).

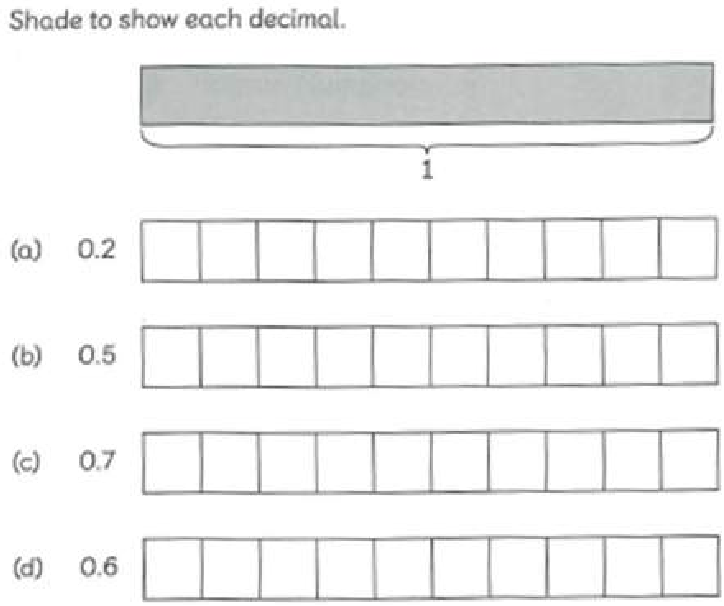


Figura 13: Representações pictóricas de dízimas.

Outro aspeto fundamental diz respeito ao valor posicional dos algarismos. Como se viu, um número como 3452 corresponde a 3 milhares, 4 centenas, 5 dezenas e 2 unidades. Na fase em que a criança trabalha pela primeira vez os conceitos relativos à utilização da vírgula e aos submúltiplos da unidade, já experienciou a decomposição numérica relativa a números inteiros. Isto é, já tem experiência de ler um número por ordens. Exatamente o mesmo deve ser feito para números não inteiros. As Figuras 14 e 15 mostram exemplos desse tipo de trabalho [10].

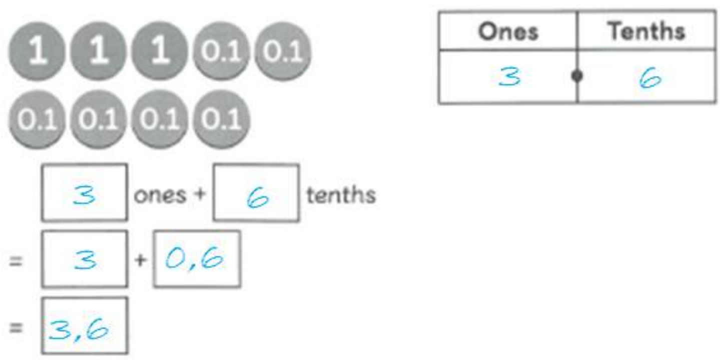


Figura 14: Leitura por ordens de um número não inteiro.

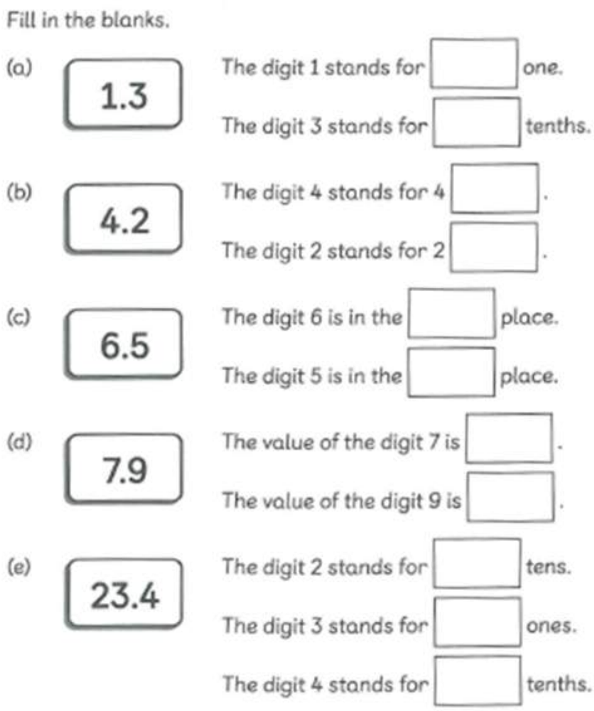


Figura 15: Valor posicional dos algarismos de números não inteiros.

No que diz respeito às representações decimais, são precisas dez unidades fundamentais de uma ordem numérica para compor uma unidade fundamental da ordem numérica imediatamente superior. Uma vez que são precisos 10 décimos para compor uma unidade, a primeira ordem numérica à direita da vírgula é a ordem dos décimos. É claro que são precisos 100 centésimos (ou centésimas) para compor uma unidade. Outra forma mais informativa de abordar a questão consiste em dizer que são precisos 10 centésimos para compor um décimo e, como são precisos 10 décimos para compor uma unidade, conclui-se que são precisos $10 \times 10 = 100$ centésimos para compor uma unidade. A segunda ordem numérica à direita da vírgula é a ordem dos centésimos. Com raciocínio análogo, pode dizer-se que são precisos 10 milésimos (ou milésimas) para compor um centésimo, $10 \times 10 = 100$ milésimos para compor um décimo, e $10 \times 10 \times 10 = 1000$ milésimos para compor uma unidade. A terceira ordem numérica à direita da vírgula é a ordem dos milésimos, e assim sucessivamente. A lei do agrupamento decimal aplica-se de maneira uniforme na constituição das diferentes ordens numéricas.

Como se viu, uma fração como $\frac{232}{1000}$ é uma outra forma de escrever $0,232$ (232 milésimos). Sendo assim, quando o denominador de uma fração é 10, ou $10 \times 10 = 100$, ou $10 \times 10 \times 10 = 1000$, etc., há uma correspondência direta entre a fração e a dízima finita. Trata-se realmente do que a dízima é, não há cálculos que se tenham de fazer. Estas frações, cujo denominador é uma potência de 10 são "especiais", sendo habitualmente chamadas frações decimais.

Deixando para já as dízimas infinitas de lado, muitos estudantes pensam que a única forma de descobrir a dízima finita correspondente a uma fração é efetuar uma divisão. Isso não é verdade. Na realidade, revela desde logo uma primeira incompreensão sobre a relação entre as frações e as dízimas. Considere-se, a título de exemplo, uma fração como $\frac{3}{20}$. Com o intuito de determinar a dízima associada, em vez do cálculo $3 : 20$, é muito mais simples multiplicar numerador e denominador por 5 de forma a obter a sua forma decimal. Uma vez que $\frac{3}{20} = \frac{15}{100}$, conclui-se que $\frac{3}{20} = 0{,}15$.

É claro que nem todos os denominadores de uma fração irredutível podem ser "transformados" numa potência de 10. Apenas números como 2, 4, 5, 8, 16, 20,..., são alvo de tal procedimento. O que há em comum a estes números é o facto de poderem ser representados através de multiplicações tendo apenas 2 e/ou 5 como factores; $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $5 = 5$, $8 = 2 \times 2 \times 2$, $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$, $20 = 2 \times 2 \times 5$,.... Essas multiplicações são alvo de emparelhamentos apropriados para a "construção" de potências de 10:

- $2 \times \mathbf{5} = 10$
- $4 \times 5 \times 5 = 4 \times \mathbf{25} = (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 10 \times 10 = 100$
- $5 \times \mathbf{2} = 10$
- $8 \times 5 \times 5 \times 5 = 8 \times \mathbf{125} = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 10 \times 10 \times 10 = 1000$
- $16 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 16 \times \mathbf{625} = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$
- $20 \times \mathbf{5} = (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 10 \times 10 = 100$

  (...)

Dada a maior complexidade dos cálculos envolvidos, não se deve desenvolver totalmente o conceito no 1.º ciclo do ensino básico. Mas é benéfico propor exercícios simples como

$$\frac{1}{2} = \frac{}{10} =$$

ou

$$\frac{3}{4} = \frac{}{} =$$

(as crianças devem encontrar as formas de completar $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$ e $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$). Dessa forma, chama-se a atenção para a importante relação entre as frações decimais e as dízimas finitas.

Ainda no que diz respeito às representações diferentes de uma mesma dízima finita, volta-se a chamar a atenção para a distinção entre leitura mista/leitura não mista. Por exemplo, 2,24, lido de forma corrida, representa 224 centésimos, ou seja, $\frac{224}{100}$. Por outro lado, adotando uma abordagem mista, 2,24 representa 2 unidades e 24 centésimos, ou seja, $2\frac{24}{100}$ (quem não usa numerais mistos pode escrever $2 + \frac{24}{100}$). Repare-se ainda que, querendo fazer uma decomposição por ordens (de acordo com o valor posicional dos algarismos),

$$2,24 = 2 + 0,2 + 0,04 = 2 + \frac{2}{10} + \frac{4}{100}.$$

Os numerais mistos tratados na secção anterior relacionam-se na perfeição com estas considerações. Não há grande diferença quanto à natureza entre a escrita 3,7 e $2\frac{1}{3}$. Ambas as escritas separam as unidades dos submúltiplos da unidade (representados por frações próprias). A única diferença é que, quando se pensa na numeração decimal, as únicas frações permitidas têm potências de dez como denominadores. Esta compreensão quanto à manipulação de representações deve ter início no 1.º ciclo do ensino básico e encontrar o devido desenvolvimento no 2.º ciclo. A Figura 16 é representativa da exploração que pode ser feita ainda no 1.º ciclo [10].

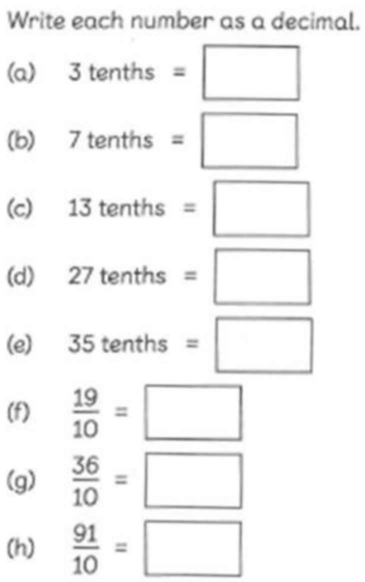


Figura 16: Manipulação de representações das dízimas.

As frações irredutíveis cujos denominadores não podem ser "transformados" em potências de 10 já não são tratadas no 1.º ciclo do ensino básico. Essas frações dão origem a dízimas infinitas periódicas, que podem ser obtidas através da divisão. Considere-se a fração $\frac{3}{7}$ e o cálculo $3:7$.

$$\begin{array}{ccccccc|l}
3, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ \cline{8-8}
 & \mathbf{2} & 0 & & & & & 0{,}428571 \\
 & & \mathbf{6} & 0 & & & & \\
 & & & \mathbf{4} & 0 & & & \\
 & & & & \mathbf{5} & 0 & & \\
 & & & & & \mathbf{1} & 0 & \\
 & & & & & & \mathbf{3} &
\end{array}$$

Os restos estão marcados a vermelho. Repare-se que são todos inferiores a 7. Se um determinado resto fosse superior ou igual ao divisor, isso indiciaria incompetência no ato de dividir. Se uma pessoa dividir equitativamente um certo número de coisas por 7 pessoas, nunca podem restar 7 ou mais unidades de ordem nenhuma sem que isso ilustre incompetência. Se se desse o caso, poderia ter havido mais distribuição. Sendo assim, continuando neste exemplo, os restos originados por uma divisão competente são fatalmente inferiores a 7 e, por isso, tem de haver uma repetição em algum momento (consequência do número de restos possíveis ser finito). Neste exemplo, isso acontece quando aparece o 3 como resto; "trinta para sete" é uma repetição, uma vez que esse pensamento é feito logo no início do cálculo. Sendo assim, tudo se irá repetir e

$$\frac{3}{7} = 0,428571\,428571\,428571\ldots.$$

Nestes casos, é comum escrever-se $\frac{3}{7} = 0{,}(428571)$. Observe-se que o argumento que reside no facto de o número de restos possíveis ser finito funciona para qualquer divisor. Sendo assim, só há dois destinos possíveis para uma fração: ou é equivalente a uma fração decimal e corresponde a uma dízima finita, ou não é equivalente a uma fração decimal e corresponde a uma dízima infinita periódica. Esta ideia não se trabalha exclusivamente no 1.º ciclo do ensino básico, invadindo igualmente os 2.º e 3.º ciclos.

O leitor atento pode pensar na pergunta inversa: será que todas as dízimas infinitas periódicas são provenientes de frações? A resposta é afirmativa e uma boa explicação simplificada pode ser encontrada em [1], sendo resumida nas linhas que se seguem.

Comece-se por observar o "misterioso" facto de a dízima infinita periódica 0,(9) (ou seja, $0,9999\ldots$) ser igual a 1. Não se está a falar de um número finito de noves (que obviamente não faria a dízima ser igual a 1), mas sim de um número *infinito* de noves. Um argumento informal para o facto é este: se $\frac{1}{3} = 0{,}(3)$, então $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0{,}(3) + 0{,}(3) + 0{,}(3) = 0{,}(9)$[1].

Considere-se agora uma dízima como $0{,}(37) = 0{,}373737\ldots$. Naturalmente que quando se divide 0,(37) por 1 se obtém 0,(37). Como $1 = 0{,}(9)$, a divisão de 0,(37) por 1 pode ser vista como

$$\frac{0,3737373737\ldots}{0,9999999999\ldots}.$$

Por cada "37" no numerador há um "99" no denominador. Logo, $0{,}(37) = \frac{37}{99}$.

O que aconteceria se a dízima não fosse tão "simpática" e a repetição não começasse logo de início? Ou seja, o que aconteceria se a dízima fosse algo como $1,2(4)$? Nesses casos, uma pequena manipulação resolveria o problema:

$$1,2(4) = 1,2 + 0,0(4) = 1,2 + 0,1 \times 0,(4).$$

Como $0,(4) = \frac{4}{9}$, o cálculo é o mesmo que $\frac{12}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{56}{45}$ e, consequentemente, $1,2(4) = \frac{56}{45}$. Daqui se conclui que o conjunto das frações é exatamente o mesmo que o conjunto das dízimas finitas e infinitas periódicas, mas a discussão completa que acabou de se fazer prolonga-se até ao 3.º ciclo do ensino básico.

[1]Numa abordagem mais formal, a primeira pergunta a fazer deve ser sobre 0,(9): como se define este objeto? 0,(9) define-se como sendo a soma infinita $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots$ A conclusão de que se trata efetivamente de 1 segue da teoria das séries geométricas.

De alguma maneira, o sistema posicional decimal é algo limitado, na medida em que impõe frações cujos denominadores são potências de dez. Por outro lado, o que se perde em abrangência, ganha-se em vantagens práticas. Quando se adicionam frações, tem de haver preocupação com a natureza comum, isto é, com a determinação de um denominador comum. Quando se adicionam dízimas, a preocupação com a natureza comum é imediatamente resolvida com a regra prática “vírgula por baixo de vírgula”. Tal procedimento, alinha as ordens numéricas fazendo com que se adicione unidades fundamentais da mesma natureza. Quanto à multiplicação, já vimos na primeira parte deste artigo que um cálculo como $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ resulta em $\frac{1}{6}$; metade da terça parte é a sexta parte [9]. Quando se utiliza o sistema posicional, este tipo de procedimento é capturado com regras práticas envolvendo o ato de “andar com a vírgula para a esquerda ou para a direita”. Quer isto dizer que o cidadão comum, usando o sistema posicional decimal, mesmo sem um conhecimento matemático profundo, pode realizar operações aritméticas através de um conjunto reduzido de regras práticas.

4 Relacionar dois valores de uma mesma grandeza. Fração como razão

Considerem-se as duas situações problemáticas seguintes:

a) O Carlos tem 4 sacos. Cada saco tem 3 batatas.
Quantas batatas tem o Carlos?

b) O Ricardo tem um saco com 3 batatas. O Carlos tem 4 vezes mais batatas do que o Ricardo. Quantas batatas tem o Carlos?

A primeira situação aponta para uma típica multiplicação no sentido aditivo (4×3 batatas $= 12$ batatas). Envolve apenas a quantidade total de batatas do Carlos, proveniente de uma quantidade de 3 batatas (multiplicando), que aparece repetida 4 vezes (multiplicador). A segunda situação aponta para uma típica comparação multiplicativa. Desta vez, é dada informação sobre uma relação entre as quantidades de batatas dos dois amigos. É importante perceber que as utilizações dos números são várias, sendo duas das mais comuns as que estão associadas a quantidades ou a relações. Repare-se que, na primeira situação, por haver apenas um interveniente, há apenas 12 batatas envolvidas, correspondentes a uma quantidade (as batatas do Carlos). Na segunda situação, há um total de 15 batatas envolvidas, correspondentes a duas quantidades (as batatas do Carlos e as do Ricardo). Por serem situações distintas, as esquematizações também devem ser distintas, como se ilustra na Figura 17 (em cima, a situação aditiva; em baixo, a situação comparativa). Uma das grandes vantagens do modelo de barras, muito usado em Singapura, é poder ilustrar diferenças entre situações concretas.

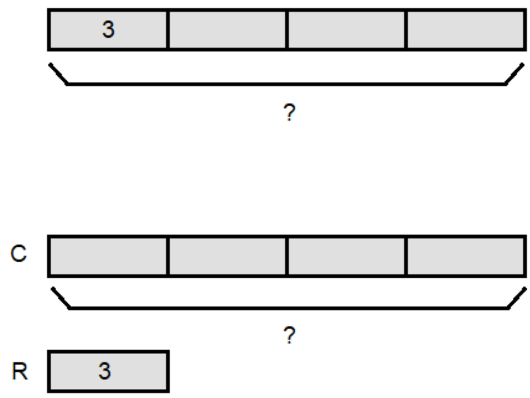


Figura 17: Modelos de barras para situações aditivas e comparativas.

Nos exemplos anteriores, o multiplicador é um número inteiro (4). Nem sempre as situações são assim. Também há comparações multiplicativas em que os multiplicadores não são inteiros e, em alguns desses casos, encontramos razões expressas através de frações. Considere-se uma terceira situação:

c) A razão entre as quantidades de batatas do Carlos e do Ricardo é de 3 para 2. Se o Ricardo tiver 18 batatas, quantas batatas tem o Carlos?

Quanto à sua natureza, não há grande diferença entre esta terceira situação e a segunda situação apresentada anteriormente. Tem-se uma razão entre duas quantidades, que não é mais do que uma relação multiplicativa. A única diferença é que o multiplicador não é inteiro (desta vez é $\frac{3}{2}$). Uma vez que a natureza das situações é semelhante, também os esquemas são semelhantes, como se pode observar na Figura 18. Essa é outra das vantagens da utilização do modelo de barras – conseguir ilustrar a natureza semelhante de situações que, à primeira vista, podem parecer diferentes.

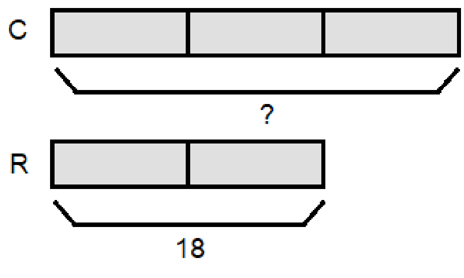


Figura 18: Modelo de barras para ilustrar uma razão entre duas quantidades.

O jargão típico utiliza a expressão "por cada". Relativamente à terceira situação, "Por cada duas batatas que o Ricardo tiver, o Carlos tem três.". Repare-se que para números inteiros, há palavras próprias como "dobro", "triplo", etc., para as quais também funcionaria "Por cada batata que o Ricardo tiver, o Carlos tem duas.", "Por cada batata que o Ricardo tiver, o Carlos tem três.", etc. Mas as palavras esgotam-se e há infinitos casos; a expressão "por cada..." serve para qualquer caso.

Em [6], relativamente à Figura 19, os autores dizem o seguinte:

> Em Portugal, e de um modo geral, a primeira (e por vezes única) abordagem às fracções é feita através da relação parte/todo. Utilizando uma figura (um rectângulo ou um círculo) dividida num certo número de partes iguais, e simbolizando a unidade, relaciona-se as partes com o todo da figura. A figura simboliza, por exemplo, um chocolate dividido em 5 partes iguais, cada uma dessas partes sendo $\frac{1}{5}$ do chocolate. O conceito de fracção equivalente é também explicado recorrendo ao mesmo modelo, e os alunos devem visualizar assim que $\frac{2}{10}$ é a mesma quantidade de chocolate que $\frac{1}{5}$. Também as operações adição e subtracção são abordadas recorrendo ao mesmo suporte visual, havendo a preocupação de se estudar primeiro a adição e em seguida a subtração como operação inversa da adição. Isto significa que, na abordagem tradicional, o ponto de partida para o ensino são, de um modo geral, os conceitos matemáticos formais e não os fenómenos da realidade do dia-a-dia de onde estes conceitos foram em tempos abstraídos. Assim, isto pode ser uma das razões pela qual haja alunos que representem a situação da figura por $\frac{1}{4}$, em vez de $\frac{1}{5}$, que é o que o professor normalmente quer que esteja representado na figura. A verdade é que a figura também pode representar $\frac{1}{4}$ se considerarmos, não a relação parte sombreada/toda a figura, mas sim a relação parte sombreada/parte não sombreada. Uma das origens de mal entendidos pode ser o facto de serem os conceitos matemáticos, que os alunos ainda não dominam, e não o contexto do problema a dar significado a actividades como estas.

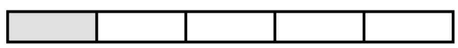


Figura 19: Ambiguidade.

Estas observações são interessantes e merecem uma análise.

"A primeira (e por vezes única) abordagem às fracções é feita através da relação parte/todo": É naturalíssimo ser a primeira, uma vez que é um dos contextos de mais fácil compreensão (e talvez o mais comum). Em caso algum deve ser a única abordagem a aparecer ao longo do percurso escolar do aluno.

"Isto significa que, na abordagem tradicional, o ponto de partida para o ensino são de um modo geral, os conceitos matemáticos formais e não os fenómenos da realidade do dia-a-dia de onde estes conceitos foram em tempos abstraídos": Ideia certeira, uma vez que não são coisas incompatíveis e devem, naturalmente, andar lado a lado.

"A verdade é que a figura também pode representar $\frac{1}{4}$ se considerarmos, não a relação parte sombreada/toda a figura, mas sim a relação parte sombreada/parte não sombreada": Esta observação é verdadeira, mas os esquemas são feitos para auxiliarem a criança. Se o objetivo é trabalhar a relações de quantidades, nada como, numa primeira fase, apresentar exemplos/exercícios que permitam a separação esquemática dessas quantidades, como se faz em Singapura. Em alguma altura, a criança compreenderá possíveis ambiguidades de situações e de esquemas, mas é muito difícil trabalhar este tipo de elasticidade nas primeiras fases. Nos primeiros anos de escolaridade, "faseamento" deve ser a palavra de ordem.

Na última secção deste artigo voltaremos a estas temáticas, no âmbito da resolução de problemas no 2.º ciclo do ensino básico.

5 Fração para relacionar grandezas diferentes

Considere-se novamente a segunda situação apresentada na secção anterior,

b) O Ricardo tem um saco com 3 batatas. O Carlos tem 4 vezes mais batatas do que o Ricardo. Quantas batatas tem o Carlos?

e uma quarta situação,

d) Numa festa, espalharam-se velas e bolas de Natal pelas mesas. Por cada vela, havia 4 bolas de Natal. Sabendo que se usaram 3 velas, quantas bolas de Natal se espalharam pelas mesas?

É claro que ambas as situações se resolvem através do cálculo 3×4. No entanto, há uma subtil diferença entre as duas. Em relação à situação b), fazendo-se 4 cópias do conjunto de batatas do Ricardo, obtém-se exatamente o que o Carlos tem: 12 batatas. Em relação à situação d), fazendo-se 4 cópias do conjunto de velas da festa, não se obtém um conjunto de bolas de Natal. Isto porque 12 velas, naturalmente, não são 12 bolas de Natal. O que há de diferente nestes dois casos é que, no primeiro, a "coisa" em causa é a mesma (batatas); no segundo, há "coisas" diferentes (velas e bolas de Natal). Situações como a d) são sempre relacionais ou combinatórias e nunca aditivas, uma vez que cópias de velas não resultam em conjuntos de bolas de Natal. Na secção anterior, os exemplos usados foram relativos a uma única natureza. Nesta secção, fazem-se considerações sobre casos em que há mais do que uma natureza envolvida.

Em português, tal como se viu na secção anterior, pode dizer-se que "por cada vela, há quatro bolas". Por vezes, escrevem-se expressões como $B = 4 \times V$. É preciso saber o que uma expressão destas significa: não significa que o quádruplo das velas em si resultam em bolas. Significa que o quádruplo do número de velas é o número de bolas (números em abstrato). É esta a ténue diferença entre a lógica das quantidades em si e a lógica da relação de quantidades. A diferença é ténue, mas importante.

Quando há duas grandezas e queremos frisar bem quais são, é costume usar palavras como "taxa" ou "rácio" (em inglês, *tax* ou *rate*). Algo como "O rácio entre o número de bolas e o número de velas é 4." ($\frac{B}{V} = 4$). Isto quer dizer que, em termos de relação de quantidades, por cada vela há 4 bolas. Se fosse "O rácio entre o número de velas e o número de bolas é $\frac{1}{4}$.", isto quereria dizer que, em termos de relação de quantidades, por cada bola há $\frac{1}{4}$ de vela (informação análoga à anterior). Em geral, quando se têm quantidades de duas grandezas distintas, G_1 e G_2, quando se calcula $G_1 : G_2$, o resultado da divisão traduz a quantidade da primeira grandeza que corresponde a uma unidade da segunda grandeza. Esta lógica relacional e jargão associado é tão importante que devia merecer um capítulo autónomo nos livros escolares.

Ao contrário de "taxa" ou "rácio", a palavra "razão" (*ratio* em inglês) utiliza-se num âmbito mais abstrato. Quando se constroem frases com as primeiras, normalmente, explicitam-se as grandezas em jogo. Ao contrário, escritas como $3 : 2$ ou $3 : 7$ são muitas vezes utilizadas para designar razões em abstrato. Precisamente por se pretender "capturar uma relação" mais do que um número (embora uma relação possa ser expressa através de um número), utiliza-se frequentemente $3 : 2$ ou $3 : 7$ em vez de $\frac{3}{2}$ ou $\frac{3}{7}$, lendo-se "razão de três para dois" ou "razão de três para sete".

É agora claríssimo entender o que se quis dizer com os "múltiplos contextos" referidos na introdução. Se alguém quiser colocar 3 maçãs em sacos de 2 maçãs, surge a divisão para agrupar; $\frac{3}{2}$ indica o número de sacos necessários (um saco e meio). Se alguém quiser distribuir 3 maçãs igualmente por 2 pessoas, surge a divisão para partilhar equitativamente; $\frac{3}{2}$ indica o número de maçãs que cada uma das pessoas recebe (uma maçã e meia). Se o Ricardo tiver 3 maçãs e o Carlos apenas 2, a comparação multiplicativa expressa-se numa razão de três para dois, muitas vezes escrita como $3 : 2$ mas, também, através da fração $\frac{3}{2}$, desde que com uma interpretação apropriada. Neste caso, se fosse possível colocar as maçãs do Carlos numa máquina que as replicasse uma vez e meia, apareceria um conjunto de maçãs igual ao conjunto do Ricardo. Se o Ricardo tiver 3 maçãs e o Carlos 2 laranjas, a comparação multiplicativa também se expressa através de uma razão de três para dois. Nesse caso, não há relação com a multiplicação no sentido aditivo. Os dois últimos exemplos são relacionais e trabalham-se com todo o cuidado a partir do 2.º ciclo do ensino básico.

Numa próxima oportunidade, serão devidamente explorados os restantes quatro pontos apresentados na introdução (10–13), na que será a terceira e última parte deste texto.

Referências

[1] Aharoni, R. *Aritmética para Pais*, Gradiva, 2008.

[2] Bruce, C., Chang, D., Flynn, T. *Foundations to Learning and Teaching Fractions: Addition and Subtraction*, EduGAINS, Ontario Ministry of Education, 2013. `www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/LNSAttentionFractions.pdf`

[3] Hong, K. *Primary mathematics Textbook 4A*, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[4] Hong, K. *Primary mathematics Textbook 4B*, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[5] Miller, M. *Fractions 1, Worktext*, Math Mammoth, 2015.

[6] Monteiro, C., Pinto, H., Figueiredo, N. "As fracções e o desenvolvimento do sentido do número racional", *Educação e Matemática*, 84, 47–51, 2005.

[7] Morais, A. T. *Aritmética para* 3.ª *e* 4.ª *classes*, "Atlântida" Coimbra, 1933.

[8] Sousa, D. *How the brain learns Mathematics*, 2nd edition, Corwin, 2015.

[9] Santos, C. P., Teixeira, R. C. "Frações (parte I)", *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 5, 41–74, `http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1151`, 2015.

[10] Oh, B. *Maths – No Problem! 4B*, Singapore Maths – English National Curriculum 2014, Yeap Ban Har, Anne Hermanson (consultants), UK, 2016.