Problemas dos Nossos Avós (1)

Helder Pinto
CIDMA - Universidade de Aveiro
hbmpinto1981@gmail.com

Número 3
Dezembro 2014
aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR
Ludus

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR
Ludus

Problemas e Desafios

Problemas dos Nossos Avós (1)

Helder Pinto
CIDMA - Universidade de Aveiro
hbmpinto1981@gmail.com

Resumo: *Nesta secção do Jornal das Primeiras Matemáticas apresentam-se regularmente alguns problemas de matemática de livros escolares portugueses do passado.*

Palavras-chave: Manuais de matemática antigos, problemas de matemática elementar.

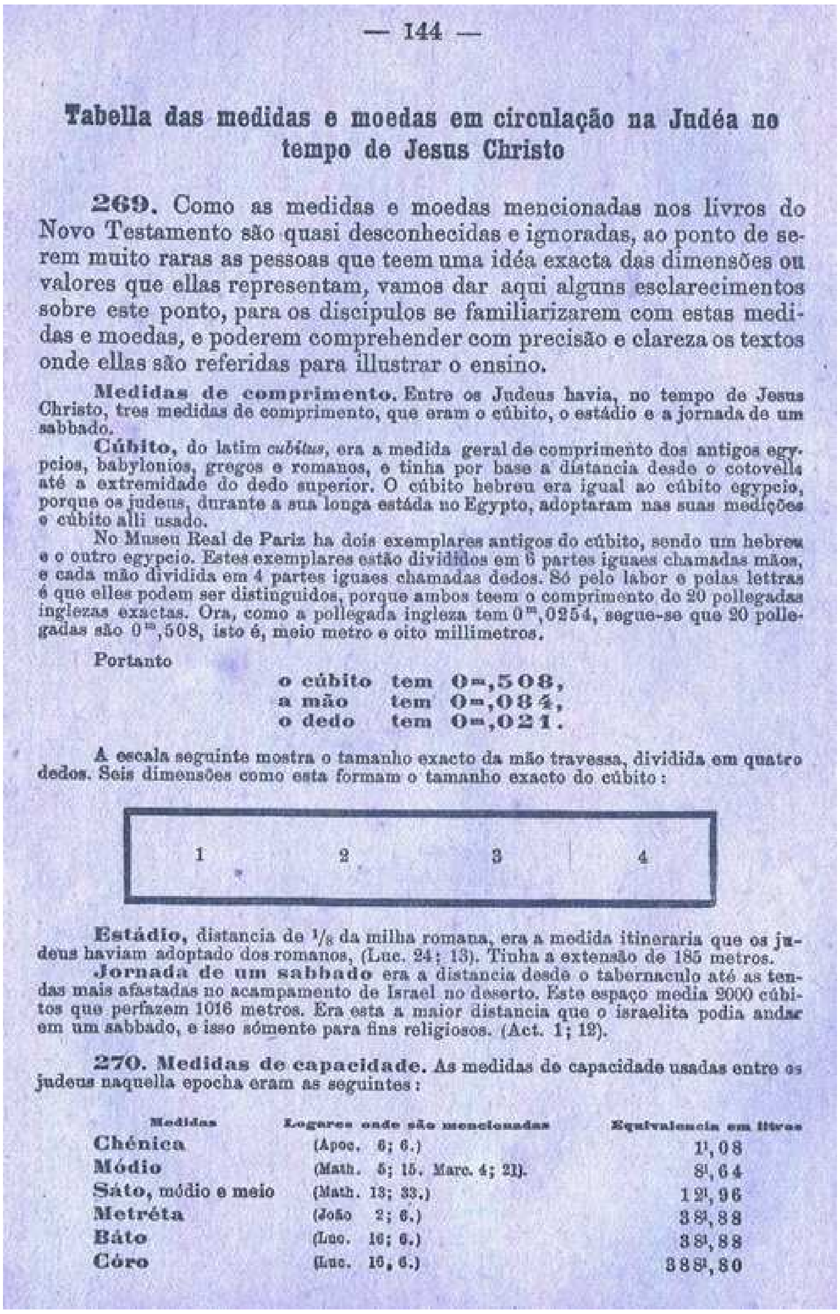
1 Preâmbulo

Nesta secção do *Jornal das Primeiras Matemáticas* apresentaremos regularmente alguns problemas de matemática que foram publicados em livros escolares portugueses do passado. Contaremos com a colaboração dos nossos leitores, que poderão fazendo-nos chegar cópias de problemas antigos que considerem interessantes através de o e-mail hbmpinto1981@gmail.com.

2 Arithmetica progressiva, 1880

Os textos apresentados nesta e nas próximas secções foram-nos enviados pela professora de matemática Amélia Meireles da Costa, a quem desde já agradecemos o contributo.

O extrato de um livro escolar publicado no Rio de Janeiro pelo Professor António Trajano [4], dá-nos uma curiosa e singular descrição das medidas e moedas em circulação na Judeia no tempo de Jesus Cristo. Note-se que o autor pretende dar alguns esclarecimentos para que os discípulos possam "comprehender com precisão e clareza os textos onde elas são referidas". Afirma-se ainda que as tabelas apresentadas foram construídas "com muita precisão e sobre bases que não offerecem duvida alguma" e que no final são ainda apresentados "problemas sobre as medidas e moedas judaicas". De facto, a matemática, ou melhor, os problemas e contextos em que esta é trabalhada vão-se alterando ao longo de diferentes gerações - note-se que um texto matemático como o apresentado a seguir, pelo menos em Portugal, muito dificilmente teria lugar num livro escolar atual.



— 144 —

Tabella das medidas e moedas em circulação na Judéa no tempo de Jesus Christo

269. Como as medidas e moedas mencionadas nos livros do Novo Testamento são quasi desconhecidas e ignoradas, ao ponto de serem muito raras as pessoas que teem uma idéa exacta das dimensões ou valores que ellas representam, vamos dar aqui alguns esclarecimentos sobre este ponto, para os discipulos se familiarizarem com estas medidas e moedas, e poderem comprehender com precisão e clareza os textos onde ellas são referidas para illustrar o ensino.

Medidas de comprimento. Entre os Judeus havia, no tempo de Jesus Christo, tres medidas de comprimento, que eram o cúbito, o estádio e a jornada de um sabbado.

Cúbito, do latim *cubitus*, era a medida geral de comprimento dos antigos egypcios, babylonios, gregos e romanos, e tinha por base a distancia desde o cotovello até a extremidade do dedo superior. O cúbito hebreu era igual ao cúbito egypcio, porque os judeus, durante a sua longa estáda no Egypto, adoptaram nas suas medições o cúbito alli usado.

No Museu Real de Pariz ha dois exemplares antigos do cúbito, sendo um hebreu e o outro egypcio. Estes exemplares estão divididos em 6 partes iguaes chamadas mãos, e cada mão dividida em 4 partes iguaes chamadas dedos. Só pelo labor e polas lettras é que elles podem ser distinguidos, porque ambos teem o comprimento de 20 pollegadas inglezas exactas. Ora, como a pollegada ingleza tem $0^{m},0254$, segue-se que 20 pollegadas são $0^{m},508$, isto é, meio metro e oito millimetros.

Portanto

o cúbito tem $0^{m},508$,
a mão tem $0^{m},084$,
o dedo tem $0^{m},021$.

A escala seguinte mostra o tamanho exacto da mão travessa, dividida em quatro dedos. Seis dimensões como esta formam o tamanho exacto do cúbito:

1	2	3	4

Estádio, distancia de $1/8$ da milha romana, era a medida itineraria que os judeus haviam adoptado dos romanos, (Luc. 24; 13). Tinha a extensão de 185 metros.

Jornada de um sabbado era a distancia desde o tabernaculo até as tendas mais afastadas no acampamento de Israel no deserto. Este espaço media 2000 cúbitos que perfazem 1016 metros. Era esta a maior distancia que o israelita podia andar em um sabbado, e isso sómente para fins religiosos. (Act. 1; 12).

270. Medidas de capacidade. As medidas de capacidade usadas entre os judeus naquella epocha eram as seguintes:

Medidas	Logares onde são mencionadas	Equivalencia em litros
Chénica	(Apoc. 6; 6.)	$1^{l},08$
Módio	(Math. 5; 15. Marc. 4; 21).	$8^{l},64$
Sáto, módio e meio	(Math. 13; 33.)	$12^{l},96$
Metréta	(João 2; 6.)	$38^{l},88$
Báto	(Luc. 16; 6.)	$38^{l},88$
Córo	(Luc. 16, 6.)	$388^{l},80$

Figura 1: Arithmetica Progressiva, 1880 (1).

— 145 —

271. Moedas. Naquella epocha, circulavam na Judéa não sómente moedas judaicas, mas tambem moedas gregas e romanas que tinham a seguinte relação:

O talento	valia	60 minas,	O siclo	valia	4 drachmas,
a mina	»	100 drachmas,	o stater	»	4 drachmas,
a drachma	»	10 asses,	a didrachma	»	2 drachmas,
o asse	»	4 quadrantes,	a drachma	»	1 denário,
o quadrante	»	2 leptos.	o denário	»	10 asses

Moedas	Logares onde são mencionadas	Valores em moeda brazileira
Lepto	(Marc. 12; 42, Luc. 12; 59.)	$\$003\frac{15}{16}$
Quadrante	(Marc. 12; 42.)	$\$007\frac{7}{8}$
Asse	(Math. 10; 29, Luc. 12; 6.)	$\$031\frac{1}{2}$
Denário	(Math. 18; 28, Marc. 6; 37 e outros.)	$315
Drachma	(Luc. 15; 8 e 9.)	$315
Didrachma	(Math. 17; 23.)	$630
Stater	(Math. 17; 26.)	1$260
Siclo	(Math. 26; 15, Zach. 11; 13.)	1$260
Mina	(Luc. 19; 16.)	31$500
Talento	(Math. 18; 24 e outros logares.)	1:890$000

Nota. Estas tabellas foram calculadas com muita precisão e sobre bases que não offerecem duvida alguma, por isso exprimem com exactidão os valores que apresentam.

Damos aqui os nomes originaes das medidas e moedas judaicas, porque os traductores que verteram o texto do Evangelho para a nossa lingua, foram muito infelizes na escolha dos termos para traduzir os nomes originaes destas medidas. Assim o *módio*, que tinha 8 litros, foi traduzido por *alqueire* que, entre nós, tem 36 litros. A *metréta*, que tinha 38 litros, foi traduzida por *almude*, que tem apenas 16. *A chénica*, que era maior que o litro, e como unidade de peso era igual a duas libras romanas, valor por que S. Jeronymo a traduziu fielmente para a vulgata. (Apoc. 6; 6.), a chénica foi vertida para o Portuguez pela expressão "*meia oitava*", quando duas libras romanas eram equivalentes a 24 onças ou a 192 oitavas!!! O *sato*, unidade determinada e muito vulgar na Judéa, e que tinha 12 litros, foi traduzido pelo termo *medida* que não exprime grandeza alguma, e que deixa um sentido vago, porque tanto póde significar uma medida grande, como uma pequena. O *cúbito* que tinha pouco mais de 50 centimetros, sem chegar a 51, foi traduzido por *covado* que tem 66, isto é, mais 16 centimetros do que a medida original, ficando assim falseados todos os calculos feitos com esta base. Finalmente o *denário*, moeda romana tão conhecida e vulgar no tempo antigo, que era igual á drachma grega, e cuja etymologia attesta o seu valor que eram 10 asses, foi traduzido pela palavra *dinheiro*, termo vago sem significação definida, porque exprime qualquer moeda ou qualquer quantia, sem lhe precisar valor algum.

E deste modo, ficou desfigurada pela traducção a belleza de muitas passagens, onde o valor exacto das medidas e das moedas realça e demonstra a sabedoria e a logica do ensino alli exposto. Estas tabellas teem por fim remediar até certo ponto esse inconveniente, deixando ver com precisão o valor quantitativo revelado no texto.

272. Para exercicio de applicação, vamos resolver os seguintes problemas sobre as medidas e moedas judaicas:

1° Problema. Nas bodas de Caná da Galiléa havia seis talhas de pedra, que levavam, pelo menos, duas metrétas cada uma. E faltando o vinho no banquete, estas talhas foram cheias de agua, e a agua transformou-se em vinho. Quantos litros de vinho continham então as seis talhas?

Solução. Levando cada talha 2 metrétas, as 6 talhas levam $2 \times 6 = 12$ metrétas. Tendo cada metréta $38^l,88$, as 12 metrétas equivaliam a $38^l,88 \times 12 = 466^l,56$, isto é, 466 litros e 56 centilitros.

10 A. P.

Figura 2: Arithmetica Progressiva, 1880 (2).

3 Elementos de aritmética (segunda classe), 1926

A seguir apresentam-se alguns problemas de um livro de aritmética da segunda classe de 1926 [2] onde se podem encontrar problemas de proporções e juros. Note-se que o estudo da questão dos juros, após um período em que estiveram quase totalmente fora dos programas, voltou a estar na ordem do dia por força da atualidade política e económica que o país atravessa.

152 ARITMÉTICA

141. — 14 operários gastaram 48 horas a fazer determinada obra. Que tempo gastavam 26 operários a fazer a mesma obra.

142. — Um navío possui alimentos para 12 dias. Tendo de se conservar no mar durante 18 dias, quanto tem de reduzir à ração de cada indivíduo?

143. — Empregaram-se 53$^{kg.}$,48 de fio para tecer 231^{m},5 dum pano que tinha 1^{m},15 de largura; quantos metros se podem tecer com 37$^{kg.}$,75, do mesmo fio, se a largura fôr de 0^{m},90?

144. — Gastaram-se 1273 esc. para soalhar uma sala de 17^{m} de comprido por 8^{m},5 de largo. Quanto se teria gasto se a sala tivesse 13^{m},6 de comprido por 6^{m},4 de largo?

145. — Que capital é preciso pôr a juros durante 2 anos a 11 % para se obter de juros 4850 esc.?

146. — A que taxa empresta um prestamista que leva 0,50 esc. mensais por cada 10 esc.?

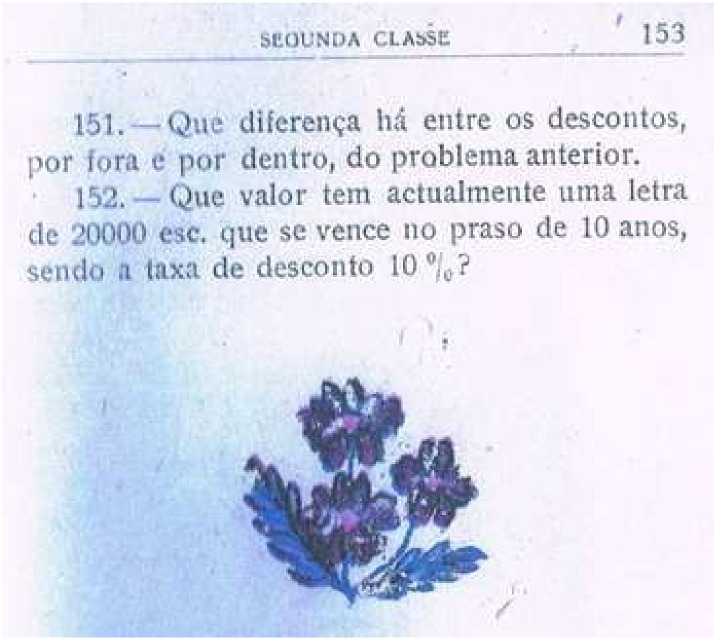
147. — Quantas libras é preciso pôr num banco que dá de juros 4 % para se ter um rendimento anual de 400 libras?

148. — Que tempo leva a dobrar o capital, sendo a taxa 11 %?

149. Um indivíduo tem de pagar 4850 esc. com o desconto de 2 %. Quanto paga realmente?

150. — Que desconto sofre uma letra de 5450 esc. que se vence no praso de 5 meses e 15 dias, sendo a taxa do desconto 8 %.

Figura 3: Elementos de aritmética (segunda classe), 1926 (1).



SEGUNDA CLASSE 153

151. — Que diferença há entre os descontos, por fora e por dentro, do problema anterior.

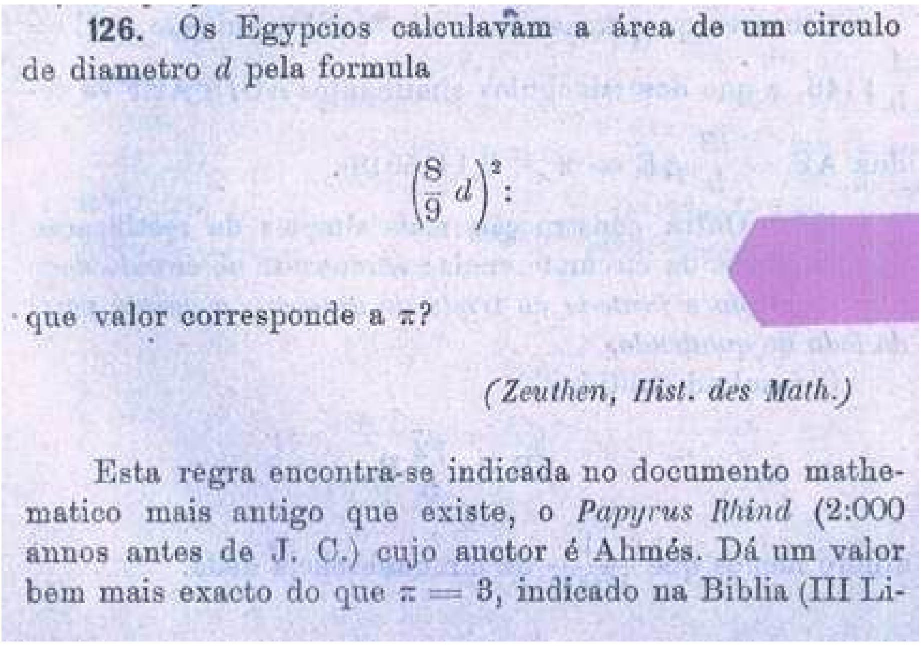
152. — Que valor tem actualmente uma letra de 20000 esc. que se vence no praso de 10 anos, sendo a taxa de desconto 10 %?

Figura 4: Elementos de aritmética (segunda classe), 1926 (2).

4 Geometria (Para o ensino da IV e V classes dos *Lyceus*), 1906

O próximo exemplo trata-se de uma *Geometria* para alunos de *Lyceu*, embora tenha sido escrita por um lente da antiga Academia Politécnica do Porto (uma das antecessoras da Universidade do Porto) [1].

No primeiro problema que apresentamos pede-se para calcular o valor de π considerando a fórmula (não exata) usada pelos antigos egípcios para o cálculo da área de círculos. Nesse mesmo exercício faz-se ainda referência a uma famosa passagem da Bíblia onde se afirma que o valor de π é 3, o que é uma muito pior aproximação. Note-se ainda o facto de, já em 1905, se utilizarem episódios da História da Matemática no ensino de matemática elementar.



126. Os Egypcios calculavam a área de um circulo de diametro d pela formula

$$\left(\frac{8}{9}d\right)^2:$$

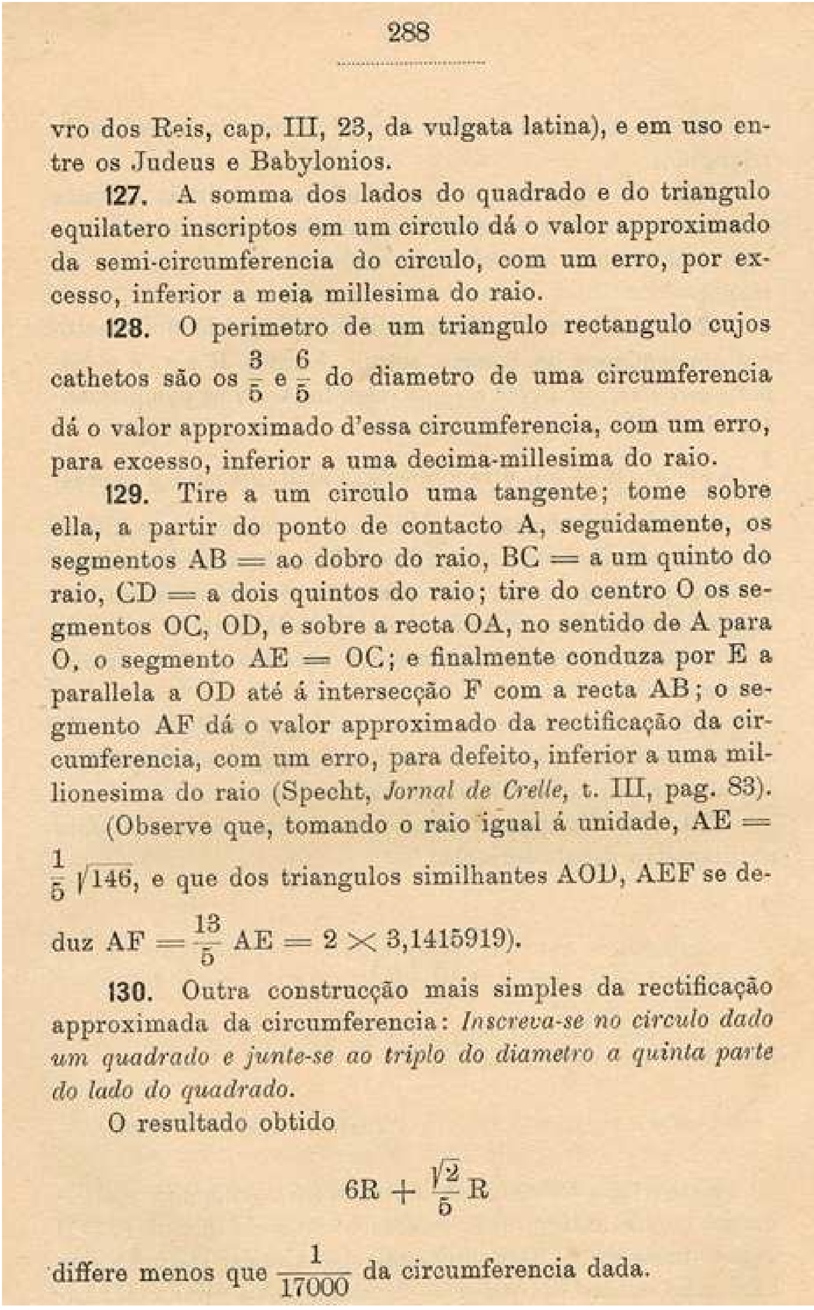
que valor corresponde a π?

(Zeuthen, Hist. des Math.)

Esta regra encontra-se indicada no documento mathematico mais antigo que existe, o *Papyrus Rhind* (2:000 annos antes de J. C.) cujo auctor é Ahmés. Dá um valor bem mais exacto do que $\pi = 3$, indicado na Biblia (III Li-

Figura 5: Geometria (Para o ensino da IV e V classes dos *Lyceus*), 1906 (1).

Os parágrafos que se seguem dizem respeito ao problema da retificação da circunferência, problema que deixou de estar referenciado nos textos escolares atuais. Este problema consiste em construir um segmento de reta que tenha o mesmo comprimento que uma determinada circunferência. Sabe-se que é impossível fazê-lo usando apenas régua e compasso, mas existem aproximações bastante satisfatórias. O que se mostra são algumas dessas resoluções, onde se apresentam os respetivos erros cometidos.



288

vro dos Reis, cap. III, 23, da vulgata latina), e em uso entre os Judeus e Babylonios.

127. A somma dos lados do quadrado e do triangulo equilatero inscriptos em um circulo dá o valor approximado da semi-circumferencia do circulo, com um erro, por excesso, inferior a meia millesima do raio.

128. O perimetro de um triangulo rectangulo cujos cathetos são os $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{5}$ do diametro de uma circumferencia dá o valor approximado d'essa circumferencia, com um erro, para excesso, inferior a uma decima-millesima do raio.

129. Tire a um circulo uma tangente; tome sobre ella, a partir do ponto de contacto A, seguidamente, os segmentos AB = ao dobro do raio, BC = a um quinto do raio, CD = a dois quintos do raio; tire do centro O os segmentos OC, OD, e sobre a recta OA, no sentido de A para O, o segmento AE = OC; e finalmente conduza por E a parallela a OD até á intersecção F com a recta AB; o segmento AF dá o valor approximado da rectificação da circumferencia, com um erro, para defeito, inferior a uma millionesima do raio (Specht, *Jornal de Crelle*, t. III, pag. 83).

(Observe que, tomando o raio igual á unidade, AE = $\frac{1}{5}\sqrt{146}$, e que dos triangulos similhantes AOD, AEF se deduz AF $= \frac{13}{5}$ AE $= 2 \times 3{,}1415919$).

130. Outra construcção mais simples da rectificação approximada da circumferencia: *Inscreva-se no circulo dado um quadrado e junte-se ao triplo do diametro a quinta parte do lado do quadrado.*

O resultado obtido

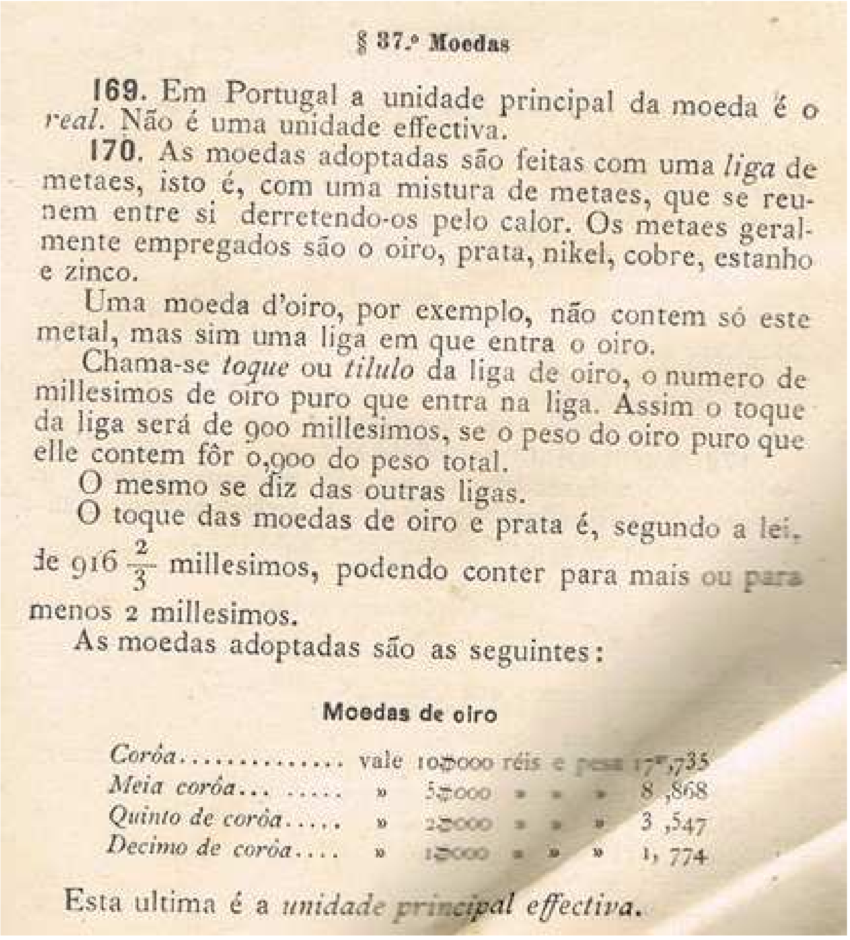
$$6R + \frac{\sqrt{2}}{5} R$$

differe menos que $\frac{1}{17000}$ da circumferencia dada.

Figura 6: Geometria (Para o ensino da IV e V classes dos *Lyceus*), 1906 (1).

5 Arithmetica (primeira classe), 1905-1910 (?)

Em relação ao exemplo da *Arithmetica (primeira classe)* que se segue [3], uma vez que o exemplar do qual foram retirados os extratos já não possui as primeiras páginas, não nos foi possível indicar nem o autor, nem o ano, em que esta obra foi publicada (provavelmente entre 1905 e 1910). O texto aqui reproduzido apresenta o sistema monetário do final da nossa monarquia.



§ 37.º Moedas

169. Em Portugal a unidade principal da moeda é o *real*. Não é uma unidade effectiva.

170. As moedas adoptadas são feitas com uma *liga* de metaes, isto é, com uma mistura de metaes, que se reunem entre si derretendo-os pelo calor. Os metaes geralmente empregados são o oiro, prata, nikel, cobre, estanho e zinco.

Uma moeda d'oiro, por exemplo, não contem só este metal, mas sim uma liga em que entra o oiro.

Chama-se *toque* ou *titulo* da liga de oiro, o numero de millesimos de oiro puro que entra na liga. Assim o toque da liga será de 900 millesimos, se o peso do oiro puro que elle contem fôr 0,900 do peso total.

O mesmo se diz das outras ligas.

O toque das moedas de oiro e prata é, segundo a lei, de $916\frac{2}{3}$ millesimos, podendo conter para mais ou para menos 2 millesimos.

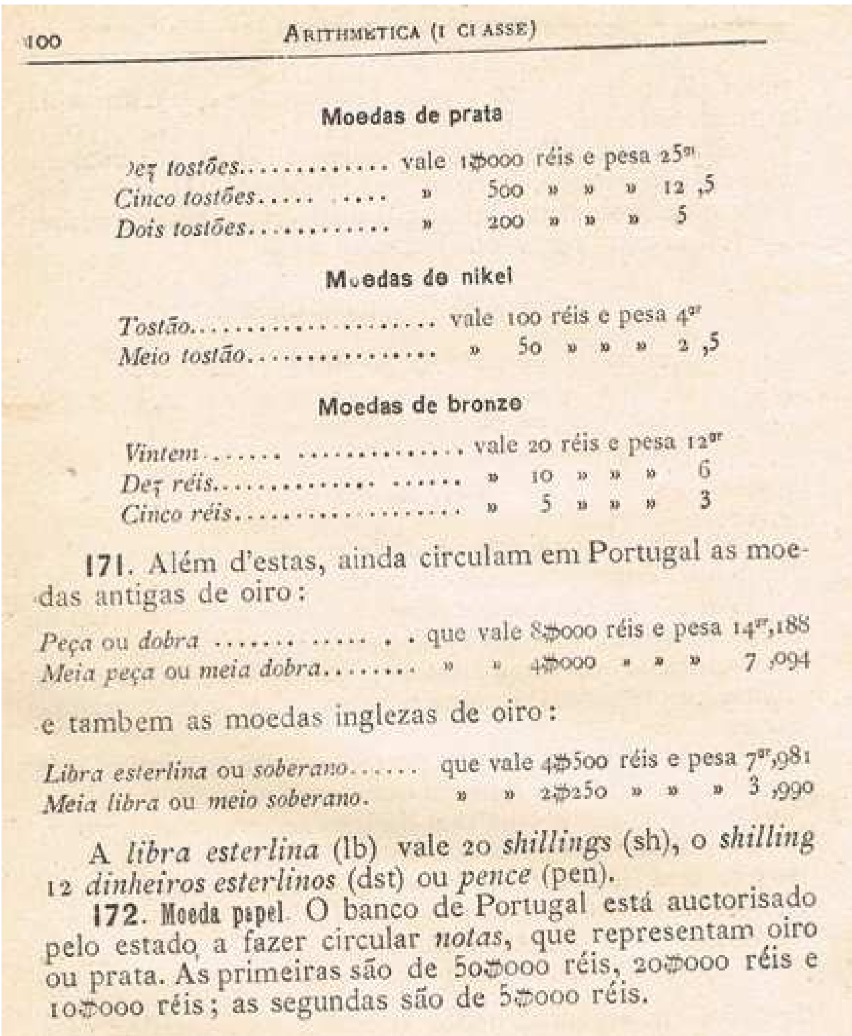
As moedas adoptadas são as seguintes:

Moedas de oiro

Coroa.............	vale	10$000	réis	e	pesa	17ᵍʳ,735
Meia coroa...	»	5$000	»	»	»	8 ,868
Quinto de coroa.....	»	2$000	»	»	»	3 ,547
Decimo de coroa....	»	1$000	»	»	»	1, 774

Esta ultima é a *unidade principal effectiva*.

Figura 7: Arithmetica (primeira classe), 1905-1910 (?) (1).



100 ARITHMETICA (I CLASSE)

Moedas de prata

Dez tostões	vale 1$000	réis	e	pesa	25gr	
Cinco tostões	» 500	»	»	»	12 ,5	
Dois tostões	» 200	»	»	»	5	

Moedas de nikel

Tostão	vale 100	réis	e	pesa	4gr
Meio tostão	» 50	»	»	»	2 ,5

Moedas de bronze

Vintem	vale 20	réis	e	pesa	12gr
Dez réis	» 10	»	»	»	6
Cinco réis	» 5	»	»	»	3

171. Além d'estas, ainda circulam em Portugal as moedas antigas de oiro:

Peça ou *dobra*	que vale 8$000	réis	e	pesa	14gr,188
Meia peça ou *meia dobra*	» » 4$000	»	»	»	7 ,094

e tambem as moedas inglezas de oiro:

Libra esterlina ou *soberano*	que vale 4$500	réis	e	pesa	7gr,981
Meia libra ou *meio soberano*	» » 2$250	»	»	»	3 ,990

A *libra esterlina* (lb) vale 20 *shillings* (sh), o *shilling* 12 *dinheiros esterlinos* (dst) ou *pence* (pen).

172. **Moeda papel**. O banco de Portugal está auctorisado pelo estado a fazer circular *notas*, que representam oiro ou prata. As primeiras são de 50$000 réis, 20$000 réis e 10$000 réis; as segundas são de 5$000 réis.

Figura 8: Arithmetica (primeira classe), 1905-1910 (?) (2).

Referências

[1] Albuquerque, Joaquim d'Azevedo. *Geometria (Para o ensino da IV e V Classe dos Lyceus)*, Typographia Occidental, Porto, pp. 287-288, 1906.

[2] Martins, Augusto. *Elementos de Aritmética*, Edição de Maranos; Porto (2ª edição), pp. 152-153, 1926.

[3] ?. *Arithmetica (I Classe)*, s/l, s/d, pp. 99-100.

[4] Trajano, António. *Arithmetica Progressiva*, Typ. de Martins de Araújo & C., Rio de Janeiro, pp. 144-145, 1880.