

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Jornal das Primeiras

MATEMÁTICAS



QUADRADO



CÍRCULO



TRIÂNGULO
ISÓSCELES



RETÂNGULO



HEXÁGONO



ELIPSE



PENTÁGONO

Número 6
Junho 2016

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR



Ludus

Problemas e Desafios

PROBLEMAS DOS NOSSOS AVÓS (4)

Hélder Pinto

CIDMA - Universidade de Aveiro

hbmpinto1981@gmail.com

Resumo: *Nesta secção do Jornal das Primeiras Matemáticas apresentam-se regularmente alguns problemas de matemática de livros escolares portugueses do passado.*

Palavras-chave: manuais de matemática antigos, problemas de matemática elementar.

1 Preâmbulo

Os problemas escolares utilizados no ensino da Matemática, em particular no ensino elementar, têm sofrido algumas alterações ao longo dos tempos. Muitas vezes a diferença não está nos conteúdos – pois as matérias básicas como a aritmética e a geometria, de grosso modo, mantêm-se as mesmas – mas sim na forma e no contexto com que estes problemas são apresentados.

Nesta secção do *Jornal das Primeiras Matemáticas* apresentaremos regularmente alguns problemas de matemática que foram publicados em livros escolares portugueses do passado. Contaremos com a colaboração dos nossos leitores, que poderão fazer-nos chegar cópias de problemas antigos que considerem interessantes através do e-mail hbmpinto1981@gmail.com.

2 *Arithmetica Progressiva* (António Trajano), 1880?

Qual é o homem ou qual é a senhora que não
precise de calcular os seus negócios?
(prefácio)

Nesta secção voltamos a um texto que apresentámos brevemente no primeiro “Problemas dos Nossos Avós” [1], a *Arithmetica Progressiva* de António Trajano [2] (relembramos mais uma vez que este texto foi-nos enviado pela professora de matemática Amélia Meireles da Costa, a quem agradecemos o contributo). Nessa altura reproduzimos uma curiosa descrição das medidas e moedas em circulação na Judeia no tempo de Jesus Cristo. A esse propósito, apresentamos a página desse livro onde são apresentados vários problemas (e suas soluções) dentro desse contexto da religião católica (Figura 1). Realce-se ainda para a curiosa nota final desta página onde se faz vários considerandos sobre o valor do dinheiro em diferentes épocas, explicando que, apesar de uma determinada quantidade de dinheiro poder ser a mesma, o seu valor pode não ser equivalente dependendo da época que se considera. Os exemplos apresentados são muito curiosos (o preço de um escravo, o preço de um terreno para um cemitério, o custo de alimentar milhares de pessoas) e dificilmente seriam encontrados num manual escolar actual, pelo menos em Portugal.

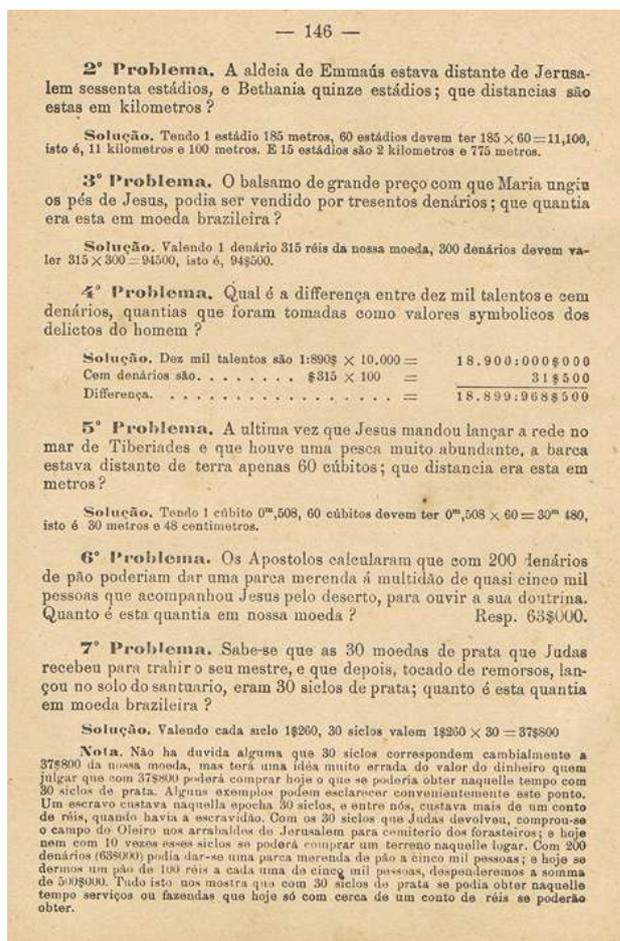


Figura 1: Medidas e moedas em circulação na Judeia no tempo de Jesus Cristo.

Observemos agora mais algumas páginas deste livro. Na página 33 encontram-se vários problemas comerciais, problemas que ainda hoje podem ser encontrados nos manuais actuais – a diferença está, muitas vezes, no tipo de produtos utilizados nas contas (Figura 2).

— 33 —

Resolver agora os seguintes problemas de multiplicar :

1. Em quanto importam 9 metros de chamalote a 5\$800 cada metro ?

Solução. 1 metro custa 5\$800, 2 metros custam 2 vezes 5\$800, 3 metros custam 3 vezes 5\$800, enfim 9 metros custam 9 vezes 5\$800 que são 52\$200.

5\$800	9
52\$200	

2. Em quanto importam 8 garrafas de vinho a 2\$200 ?

3. Quanto custam 25 duzias de ovos a 650 réis cada uma ?

4. Quanto custam 35 laranjas a 40 réis cada uma ?

5. Em quanto importam 24 mangas a 180 réis cada uma ?

6. Em quanto importam 184 tijolos a 100 réis cada um ?

7. Em quanto importam 34 metros de chita a 250 réis cada metro ?

8. Em quanto importam 85 metros de morim a 360 réis o metro ?

9. Em quanto importam 23 kilos de assucar a 420 réis cada kilo ?

10. Em quanto importam 445 kilos de toucinho a 620 réis o kilo ?

11. Achar os varios productos da nota abaixo, e sommal-os.

2	Kilos de manteiga..... a	2\$200	4\$400
7	Queijos de Minas..... a	1\$500	\$
8	Kilos de carne secca..... a	\$640	\$
10	Linguas do Rio Grande..... a	\$400	\$
3	Kilos de chá da India..... a	4\$000	\$
8	Ditos de café moído..... a	1\$000	\$
15	Ditos de toucinho..... a	\$500	\$
7	Ditos de macarrão..... a	1\$000	\$
<i>Somma Rs.</i>			58\$520

12. Achar o importe de cada quantidade de fazenda mencionada na conta abaixo, e sommar todas as parcelas ?

18	Metros de nobreza de seda..... a	4\$200	\$
20	Ditos de cambraia de linho..... a	2\$500	\$
18	Ditos de brim pardo..... a	1\$200	\$
15	Ditos de baeta azul..... a	1\$300	\$
12	Ditos de renda branca..... a	\$500	\$
17	Ditos de fita de chamalote..... a	1\$400	\$
5	Duzias de bolões..... a	1\$200	\$
16	Metros de percalle..... a	\$600	\$
10	Ditos de cretone..... a	\$700	\$
25	Ditos de chita..... a	\$400	\$
<i>Somma Rs.</i>			229\$100

A. P.

Figura 2: Vários problemas comerciais.

As três páginas que se apresentam a seguir têm a representação de vários tipos de unidades (figuras 3, 4 e 5): na primeira, tem-se uma explicação sobre o funcionamento do tempo (anos, semanas, dias, horas) e as unidades do peso (fala-se do, hoje em dia famoso... , símbolo @); na segunda, tem-se as unidades de divisão do círculo (perfeitamente actual) e de várias outras como as unidades de comprimento e superfície; na terceira, apresentam-se mais unidades como, por exemplo, as unidades para papel que actualmente nunca se referem em contexto escolar.

— 126 —

Nota. O anno é o tempo que a terra gasta em fazer o seu movimento de translação em torno do sol. A sua duração é de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 48 segundos, e que é ordinariamente calculada em 365 dias e seis horas. Tendo o anno commum 365 dias e 6 horas, claro está, que no fim de 4 annos, haverá mais um dia supplementar, que se tem de juntar a cada quarto anno, pois 6 horas multiplicadas por 4, dão 24 horas, que são um dia completo.

Os romanos intercalavam este dia supplementar em cada quarto anno, repetindo o dia 26 de Fevereiro, que entre elles se chamava *sexto calendarum*, e o dia repetido *bis-sexto calendarum*. Daqui veio o nome de **bissexto** dado aos annos que têm 366 dias. Entre nós, este dia junta-se tambem ao mez de Fevereiro, o qual, no anno commum, tem 28 dias, e no bissexto tem 29.

Todo o anno bissexto é exactamente divisivel por 4, de sorte que para sabermos se um anno é bissexto bastará dividil-o por 4, se houver resto, será anno commum, e se não o houver, será anno bissexto. Assim os annos de 1876, 1880 e 1884 foram bissextos, e os annos de 1883, 1885 e 1886 foram communs. Não estão, porém, debaixo desta regra os annos centenarios, que são os que acabam em duas cifras como 1600, 1700, 1800, etc. Todo o anno centenario que for exactamente divisivel por 400, será anno bissexto. O anno de 1600 foi bissexto e o anno de 1700 foi commum.

Antigamente, o anno começava em Março, em vez de Janeiro, e por isso os mezes de Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro eram o sétimo, o oitavo, o nono e o decimo mez do anno, como o mostra a sua etymologia latina, 7 *Septem*, 8 *Octo*, 9 *Novem*, 10 *Decem*.

236. A semana é o espaço de 7 dias. Esta unidade de tempo foi ordenada em Exodo cap. XX, 9. para estabelecer o tempo do trabalho e o tempo do descanso. Os dias da semana são:

1º Domingo	que os antigos chamavam	Dia do Sol.
2º Segunda-feira	" " "	Dia da Lua.
3º Terça-feira	" " "	Dia de Marte.
4º Quarta-feira	" " "	Dia de Mercurio
5º Quinta-feira	" " "	Dia de Jupiter
6º Sexta-feira	" " "	Dia de Venus.
7º Sabbado	" " "	Dia de Saturno.

237. O Dia é o espaço de tempo que a terra gasta em fazer a sua rotação completa sobre o seu eixo, e como a terra, durante a sua rotação, fica só com metade da sua face illuminada pelo Sol, e a outra metade fica em escuridão, daqui provém a noite e o dia em 24 horas.

As horas são partes de um dia marcadas pelo relógio.

Todos os relógios marcam desde a meia noite até o meio dia, 12 horas, e desde o meio dia até meia noite seguinte, 12 horas tambem.

Nas transacções commerciaes, o mez é considerado como tendo 30 dias, o anno 360 dias.

Unidades do peso

238. As unidades de peso no systema antigo são os seguintes:

A tonelada	tem	13½ quintaes.
O quintal	>	4 arrobas.
A arroba	>	32 libras.
A libra	>	16 onças.
O marco	>	8 onças.
A onça	>	8 oitavas.
A oitava	>	3 escropulos.
O escropulo	>	6 quilates.
O quilate	>	4 grãos de trigo.

A libra do commercio chamava-se tambem arrátel, e era representada pelo signal lb. A arroba era representada pelo signal @.

Pesos antigos da pharmacia

A libra	tem	12 onças.
A onça	>	8 drachmas.
A drachma	>	3 escropulos.
O escropulo	>	24 grãos.

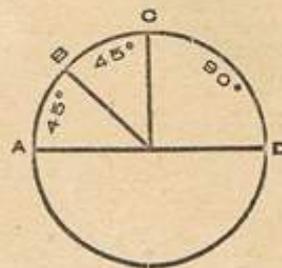
Figura 3: Página 126.

Unidades da divisão do círculo

239. Círculo é uma figura plana, terminada por uma linha curva chamada circunferencia que tem todos os seus pontos igualmente distantes do ponto interior chamado centro.

A circunferencia de um círculo divide-se em 360 graus; o grau divide-se em 60 minutos, e o minuto em 60 segundos. O signal de graus é °; o de minutos é ′; e o de segundos é ″. De sorte que 5°, 5′, 5″, lê-se: 5 graus, 5 minutos e 5 segundos.

Ilustração. Na circunferencia do círculo ao lado, a distancia desde o ponto *A* ao ponto *B* tem 45°; a distancia de *A* a *C* tem 45°+45°=90°; e a distancia de *A* a *D* pela curva, que é meio círculo, tem 90°+90°=180°.



Unidades de comprimento

240. As unidades de comprimento das medidas antigas são muito variadas, como vemos nos exemplos seguintes:

A legua brasileira tem 3000 braças.	A braça tem 10 palmos.
A legua marítima > 3 milhas.	A toesa > 9 palmos.
A milha > 1000 passos.	A vara > 5 palmos.
O passo > 5 pés.	A jarda > 4 palmos.
O pé > 1½ palmo.	A auna > 5 palmos.
O palmo > 8 pollegadas.	O covado > 3 palmos.
A pollegada > 12 linhas.	A corda > 15 palmos.
A linha > 12 pontos.	O estádio > 125 passos.

241. Unidades de superficie

A geira	tem	400 braças quadradas.
A braça quadrada	>	100 palmos quadrados.
O palmo quadrado	>	64 pollegadas quadradas.
Um alqueire de terra	>	5000 braças quadradas.

242. Unidades para líquidos

O tonél tem 2 pipas.	O pote tem 6 medidas ou canadas.
A pipa > 25 almudes.	A medida > 4 quartilhos.
O almude > 2 potes.	O quartilho > 4 martellinhos.

243. Unidades para seccos

Moio tem 15 fangas.	Alqueire tem 4 quartas.
Fanga > 4 alqueires.	Quarta > 4 selamins

Figura 4: Página 127.

— 128 —

244. Unidades numericas

Milheiro	tem	10 centos.	Talha de lenha	tem	16 feixes
Cento	>	100 cousas.	Carro de milho		
Quarteirão	>	25 cousas.	em espigas	>	12 cargueiros.
Vintena	>	20 cousas.	Cargueiro	>	2 alqueires.
Grosa	>	12 duzias.	Alqueire	>	4 mãos.
Duzia	>	12 cousas.	Mão	>	15 atilhos.
			Atilho	>	4 espigas.

Unidades para papel

245. Nem todos os fabricantes dão ás resmas de papel o mesmo numero de folhas, mas a regra mais geralmente observada é a seguinte :

A resma de papel para impressão	tem	20 mãos	ou	500 folhas.
A resma de papel para escrever	tem	80 cadernos	ou	400 folhas.
A mão de papel		tem	5 cadernos	ou 25 folhas.
O caderno de papel		tem	5 folhas.	

Unidades da moeda ingleza

246. A unidade principal da moeda ingleza é a libra esterlina que tem a seguinte divisão :

A libra	tem	20 shillings.	(Signal de abreviatura £.)
O shilling	tem	12 pence.	(> > > s.)
O penny	tem	4 farthings.	(> > > d.)

Nota. £ é a letra inicial da palavra libra; s é a inicial de shilling, que se pronuncia *chilin*; e d é a inicial da palavra *denarius* usada antigamente.
O plural de penny é pence, por isso se diz um penny, dois pence, tres pence, etc. Os farthings escrevem-se como fracções de um penny; assim as expressões $1\frac{1}{4}$ d, $2\frac{1}{4}$ d, etc., leem-se *um penny e um quarto*, *dois pence e tres quartos*.



Libra esterlina
(Ouro)



Shilling
(Prata)



Penny
(Cobre)

Figura 5: Página 128.

Na página 142 tem-se o problema de determinar diferenças horárias a partir de longitudes e o seu recíproco (Figura 6). Repare-se que não se está a trabalhar com fusos horários mas sim com valores exactos até ao segundo. Na página 143 está uma tabela onde se apresenta a diferença horária entre a cidade do Rio de Janeiro e várias cidades mundiais (Figura 7).

— 142 —

Problema. A diferença exacta de tempo entre o Rio de Janeiro e Londres é 2 horas, 52 minutos e $41\frac{2}{3}$ segundo; qual é a diferença de longitude entre estas duas cidades?

Solução. Desde que 15° de longitude equivalem a 1 hora de tempo, $15'$ equivalem a 1 minuto de tempo, e $15''$ a 1 segundo de tempo, a diferença de longitude é igual a 15 vezes a diferença de tempo. Multiplicando, portanto, 2 horas, 52 minutos e $41\frac{2}{3}$ segundos por 15, temos a diferença de longitude que é $43^\circ 10' 21''$.

Processo		
h.	m.	s.
2	52	$41\frac{2}{3}$

63	15	25
43	10	21

O discípulo calculará a diferença de longitude pela diferença de tempo, que é dada em cada problema que segue:

Tempo	Longitude	Tempo	Longitude
1. 1h. 20m.	Resp. 20° .	5. 45m. 50s.	Resp. $11^\circ 27' 30''$.
2. 2h. 10m.	> $32^\circ 30'$.	6. 6h. 12m. 24s.	> $93^\circ 6'$.
3. 3h. 18m. 12s.	> $49^\circ 33'$.	7. 3h. 42m.	> $55^\circ 30'$.
4. 5h. 40s.	> $75^\circ 10'$.	8. 46m. 50s.	> $11^\circ 42' 30''$.

9. A diferença de tempo entre dois logares é 27 minutos e 20 segundos; qual a diferença de longitude? Resp. $6^\circ 50'$.

10. A diferença de tempo entre dois logares é 37 minutos e 20 segundos; qual é a diferença de longitude? Resp. $9^\circ 20'$.

11. A diferença de tempo entre Londres e Washington é 5 horas, 8 minutos e 1 segundo; qual é a diferença da longitude? Resp. $77^\circ 0' 15''$.

12. Na cidade de Nova York observou-se um eclipse ás 9 horas e 30 minutos da manhã; esse phenomeno foi tambem observado a bordo de um navio no Oceano Atlantico, ás 11 horas e 45 minutos da manhã; ora, sendo a longitude de Nova York 74° ao occidente, a que longitude estava o navio nessa occasião. Resp. $40^\circ 15'$ Long. oc.

267. Tabela das longitudes das seguintes capitães:

CAPITAES	LONGITUDES	CAPITAES	LONGITUDES
Londres (Ponto inicial)	$0^\circ 0'$	Copenhague.....	$12^\circ 34' E$
Lisbôa.....	$9^\circ 8' O$	Constantinopla....	$28^\circ 59' >$
Madrid.....	$3^\circ 43' >$	S. Petersburgo....	$30^\circ 16' >$
Pariz.....	$2^\circ 20' E$	Jerusalém.....	$35^\circ 25' >$
Bruxellas.....	$4^\circ 20' >$	Pekim.....	$116^\circ 26' >$
Roma.....	$12^\circ 28' >$	Mexico.....	$99^\circ 5' O$
Berlim.....	$13^\circ 24' >$	Washington.....	$77^\circ 0' >$
Vienna.....	$16^\circ 23' >$	Buenos-Ayres....	$58^\circ 20' >$
Athenas.....	$23^\circ 43' >$	Yeddo (Japão)....	$136^\circ 50' E$

Figura 6: Diferenças horárias.

— 143 —

268. Tabella comparativa mostrando as horas nas seguintes capitães, quando é meio-dia exacto no Rio de Janeiro :

Lisbôa 2 h. 16 m. da tarde.	Madrid 2 h. 37 m. da tarde.	Londres 2 h. 52 m. da tarde.	Pariz 3 h. 2 m. da tarde.
Bruxellas 3 h. 10 m. da tarde.	Roma 3 h. 42 m. da tarde.	Berlim 3 h. 46 m. da tarde.	Vienna 3 h. 53 m. da tarde.
Athenas 4 h. 27 m. da tarde.	Rio de Janeiro		Constantinopla 4 h. 48 m. da tarde.
	MEIO-DIA		
S. Petersburgo 4 h. 53 m. da tarde.	Longitude 47° 10' 21"		Copenhague 2 h. 2 m.
Pekim 10 h. 38 m. da noite.	Yéddo (Japão) Mela-noite	Mexico 8 h. 43 m. da manhã.	Washington 9 h. 45 m. da manhã.
Jerusalém 5 h. 15 m. da tarde.	Valparaíso 10 h. 6 m. da manhã.	Buenos-Ayres 11 h. da manhã.	Montevideó 11 h. 8 m. da manhã.

Nota. A letra *h* significa horas, e a letra *m* significa minutos. Omittimos os segundos de tempo para ficar mais simples a comparação.

Figura 7: Diferença horária entre Rio de Janeiro e várias cidades.

Na página 193 têm-se vários problemas de câmbios (entre a moeda portuguesa e a moeda brasileira da época; Figura 8).

Este tipo de problemas envolvendo câmbios e fusos horários (como os anteriores) talvez sejam interessantes no contexto educativo actual, dada a massificação que as viagens (quer de trabalho quer de turismo) sofreram nos nossos dias.

— 193 —

Cambio sobre Portugal

355. A moeda brasileira e a portugueza tem a mesma denominação, as mesmas divisões e as mesmas unidades, que são um real, um mil-réis e um conto de réis. Ha, porém, entre ellas a diferença do valor.

Ilustração. As moedas portuguezas de ouro, prata e cobre, tem o dobro do tamanho das moedas brasileiras, de sorte que uma moeda portugueza de 500 réis é igual em peso a uma moeda brasileira de 1\$000. Ora, como a moeda portugueza tem o dobro do peso da moeda brasileira tem tambem o dobro do valor. E para se distinguir as duas moedas, dá-se a uma o nome de moeda forte, e á outra o de moeda fraca, de sorte que 500\$ fortes valem no Brazil 1:000\$, e 500\$ fracos valem em Portugal 250\$.

No cambio entre o Brazil e Portugal, Portugal dá o certo, que é 100\$ fortes, e o Brazil dá o incerto, que é 200\$, 210\$ ou 220\$ fracos, conforme as circunstancias. O cambio está ao par quando se dá 200\$ fracos por 100\$ fortes.

Quando se diz que o cambio está a 210, isto significa que, por cada 100\$ fortes, se tem de dar 210\$ fracos. A quantia que se dá por cada cem mil réis fortes, é que indica a altura do cambio.

Problema. Quero pagar em Lisboa uma conta de 840\$ fortes; estando o cambio a 210, quanto tenho de pagar em nossa moeda?

Solução. Se 100\$ fortes valem 210\$ fracos, 240\$ fortes quanto valerão? A proporção será $100\$: 840\$:: 210\$: x$. Para acharmos o valor de x , temos de multiplicar 840\$ pela taxa, que é 210, e dividir o producto por 100, e o resultado é 1:764\$.

$$x = \frac{840 \times 210}{100} = 1:764\$$$

Problema. Remetti para Portugal 1:764\$ fracos, e estando o cambio a 210, que quantia será esta em moeda forte?

Solução. Se 210\$ fracos valem 100\$ fortes, 1:764\$ fracos, quanto valerão? A proporção será: $210\$: 1:764\$:: 100\$: x$. O valor de x é 840\$ fortes.

$$x = \frac{1764 \times 100}{210} = 840\$$$

Regra. Para se reduzir moeda forte a moeda fraca, multiplica-se a moeda forte pela taxa do cambio, e o producto divide-se por 100.
Para se reduzir moeda fraca a moeda forte, multiplica-se a quantia fraca por 100, e divide-se o producto pela taxa do cambio.

- Mandei vir do Porto um carregamento de vinho que importon em 8:600\$00 fortes; estando o cambio a 220, quanto tenho de pagar?
Resp. 18:920\$ fracos.
- Quero saber quanto é 1:800\$ da nossa moeda reduzidos a moeda forte ao cambio de 225.
Resp. 800\$ fortes.
- Um droguista mandou vir de Lisboa 50 kilos de mercurio doce; ora, custando em Lisboa cada kilo de mercurio 3\$ fortes, quanto teve alle de pagar na nossa moeda, estando o cambio a 210?
Resp. 315\$ fracos.

13 A. P.

Figura 8: Problemas de câmbios.

Para terminar apenas referir que este livro de António Trajano teve, pelo menos, trinta edições o que parece indicar ter sido um livro com bastante aceitação. Deixamos ainda o prefácio da segunda edição (e que acompanha a trigésima edição a que tivemos acesso; figuras 9 e 10) para que se perceba o que se pretendia com a publicação deste livro.

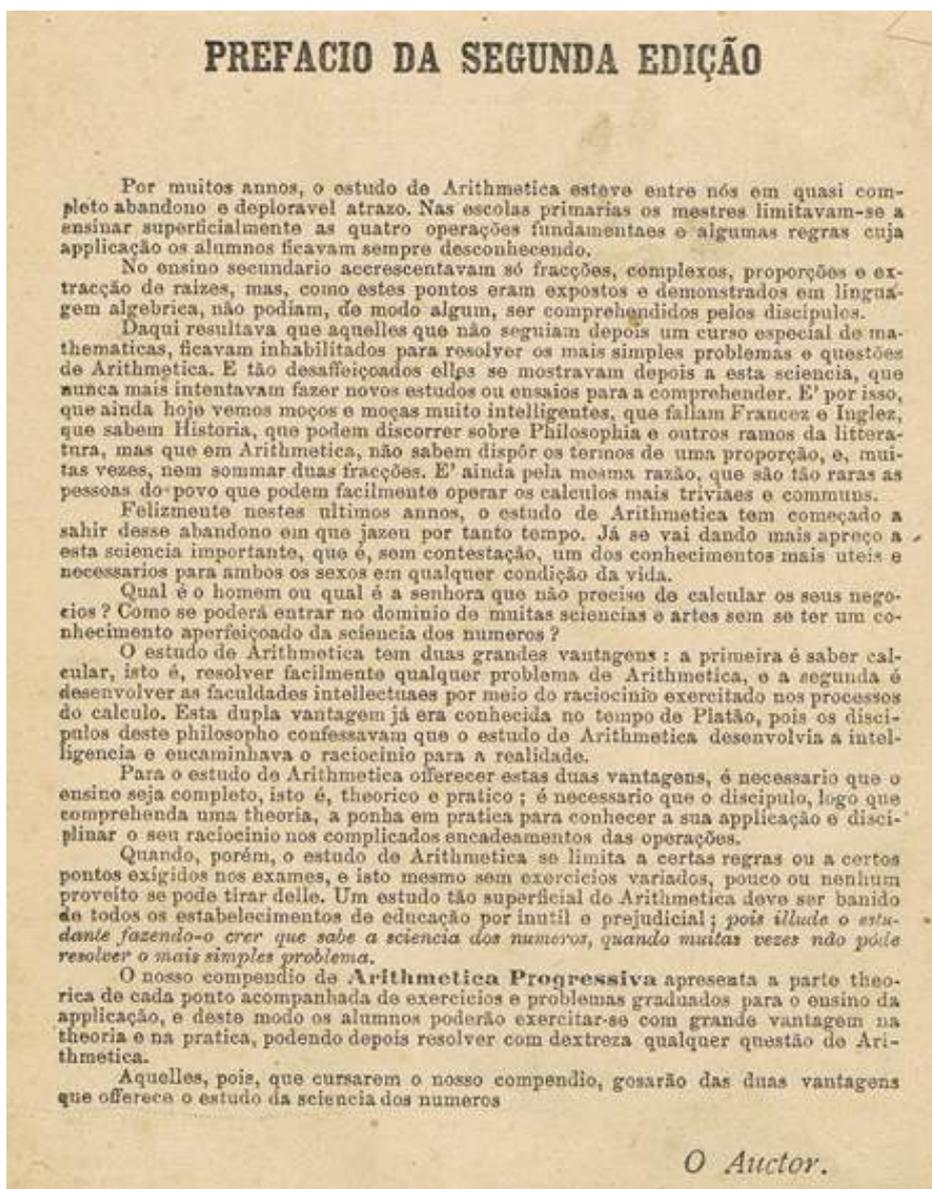


Figura 9: Prefácio.

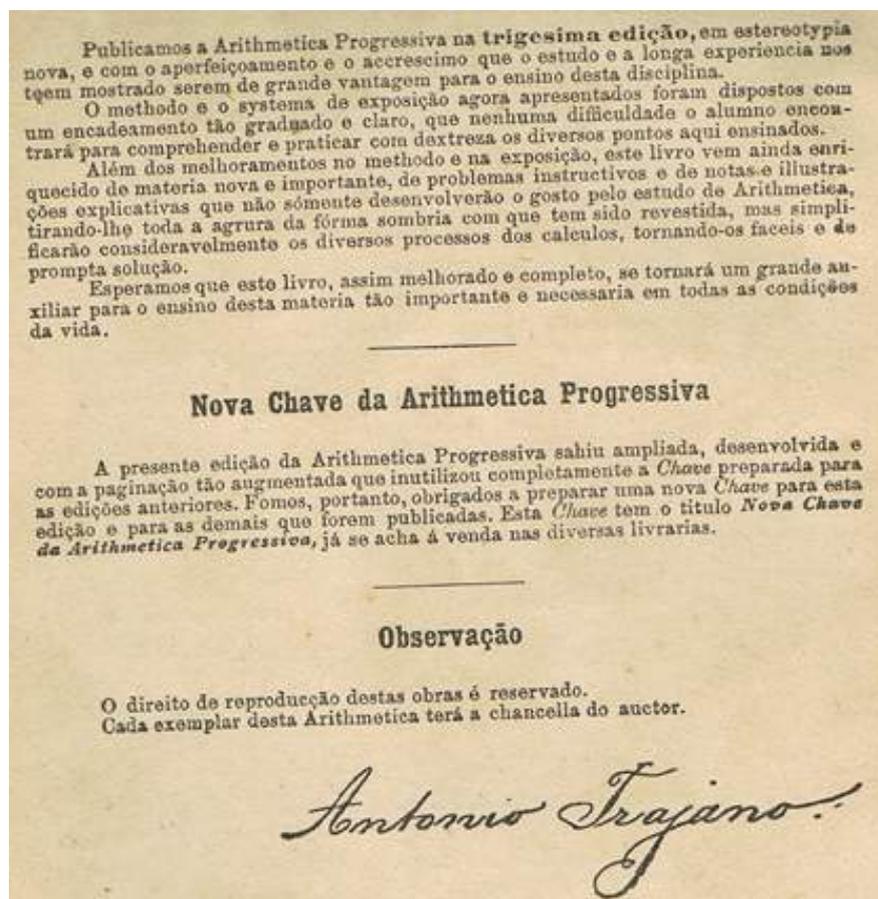


Figura 10: Prefácio (continuação).

Agradecimento

Este trabalho foi financiado pelo CIDMA-Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e pela FCT-Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito do projecto UID/MAT/04106/2013.

Referências

- [1] Pinto, Helder. “Problemas dos Nossos Avós”, *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 3, 59–67, 2014.
- [2] Trajano, António. *Arithmetica Progressiva*, Typ. de Martins de Araújo & C., Rio de Janeiro, 1880?.

