Número 19
Dezembro, 2022

Ludus

Problemas e Desafios

PROBLEMAS DOS NOSSOS AVÓS (17)

Hélder Pinto, Ângelo Silva
Instituto Piaget, RECI & CIDMA - Universidade de Aveiro,
Instituto Piaget
helder.pinto@ipiaget.pt, angelo.silva@ipiaget.pt

Resumo: *Nesta secção do Jornal das Primeiras Matemáticas apresentam-se regularmente alguns problemas de matemática de livros escolares portugueses do passado.*

Palavras-chave: manuais de matemática antigos, problemas de matemática elementar.

Preâmbulo

Os problemas escolares utilizados no ensino da Matemática, em particular no ensino elementar, têm sofrido algumas alterações ao longo dos tempos. Muitas vezes a diferença não está nos conteúdos – pois as matérias básicas como a aritmética e a geometria, de grosso modo, mantém-se as mesmas – mas sim na forma e no contexto com que estes problemas são apresentados.

Nesta secção do *Jornal das Primeiras Matemáticas* apresentaremos regularmente alguns problemas de matemática que foram publicados em livros escolares portugueses do passado. Contaremos com a colaboração dos nossos leitores, que poderão fazer-nos chegar cópias de problemas antigos que considerem interessantes através do e-mail hbmpinto1981@gmail.com.

Compêndio de Álgebra (1.º tomo, 6.º ano)

Neste número apresentamos o "Compêndio de Álgebra" (Figura), 1.º tomo, 6.º ano, da autoria do Professor Sebastião e Silva (Catedrático da Faculdade de Ciências de Lisboa) e do Professor Silva Paulo (Professor Efetivo do Liceu Nacional de Oeiras), publicado pela Livraria Cruz de Braga. Note-se que este livro foi aprovado em 1968 como livro único (o exemplar aqui apresentado está carimbado e apresenta o número 20183).

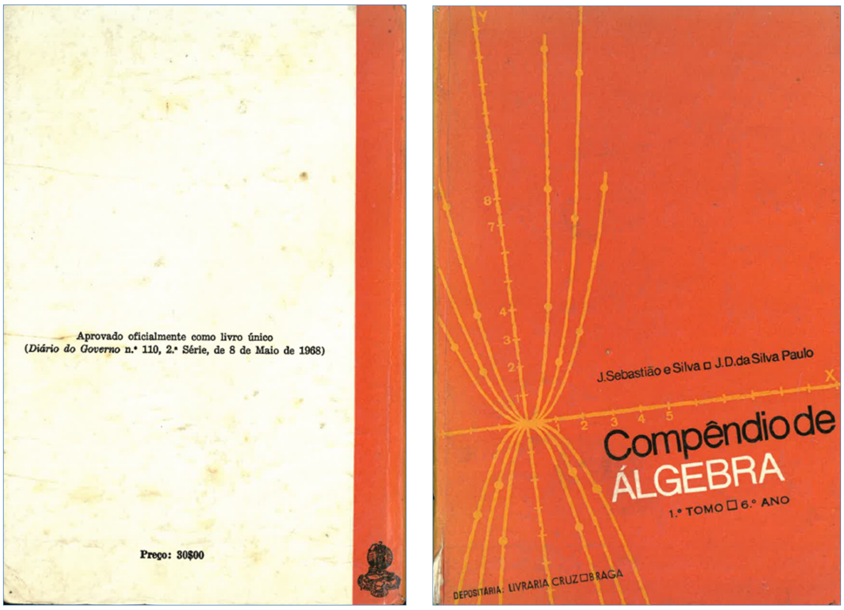
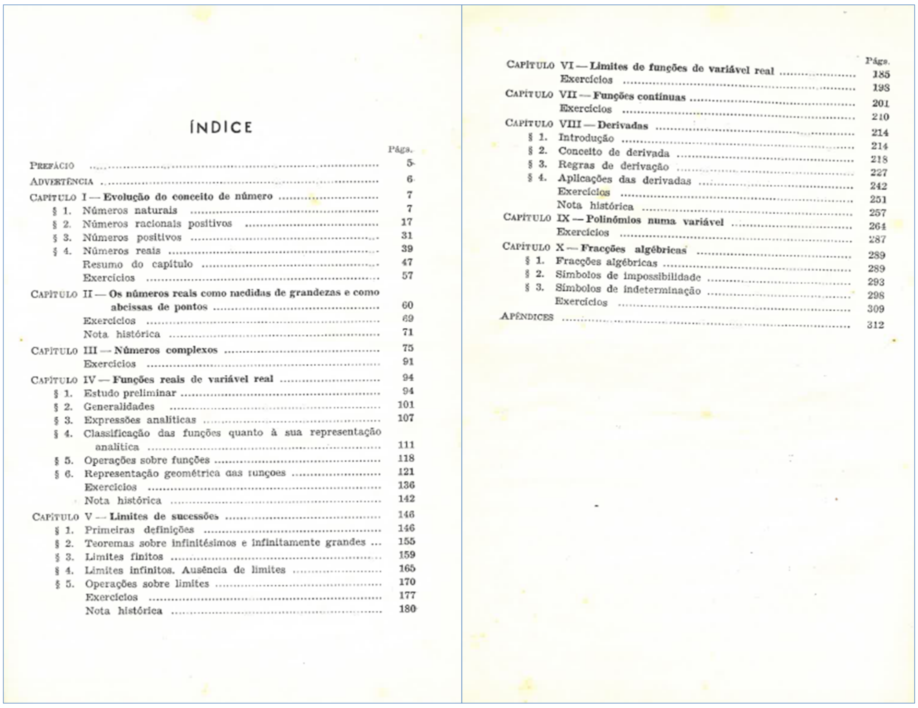


Figura 1: Capa e Contracapa de [1].

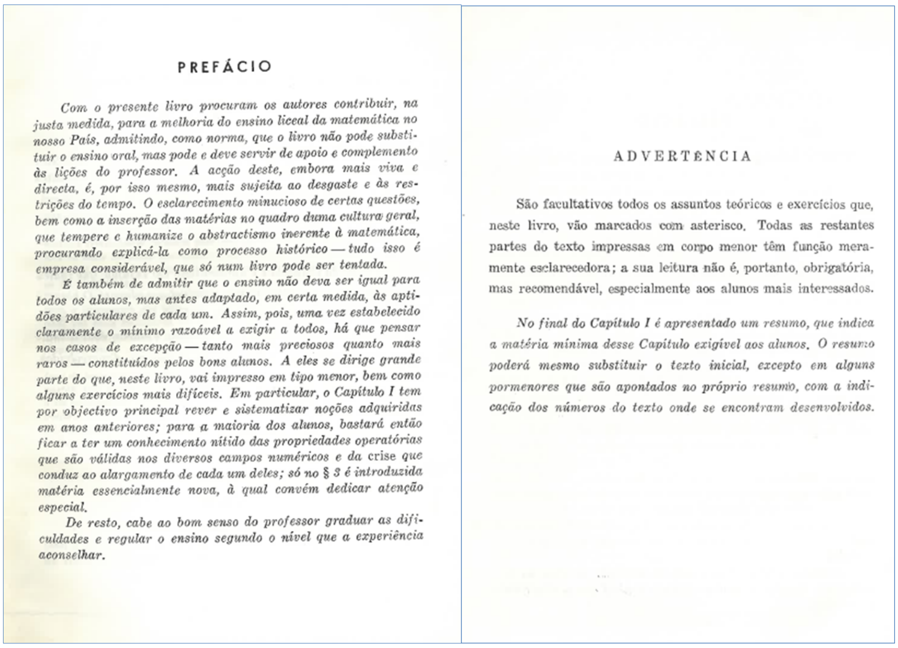
Este livro foi publicado em 1968 e destinava-se ao antigo 6.º ano de escolaridade do ensino liceal (atual 10.º ano). Este compêndio abarca uma grande variedade de temas de Álgebra (Figura 2), apresentando várias partes de texto cuja leitura não era "obrigatória, mas recomendável, especialmente aos alunos mais interessados" (Figura 3). No Prefácio fala-se ainda no "mínimo razoável a exigir a todos [os alunos]" (um pouco à imagem das atuais aprendizagens essenciais atuais. . .) e que, depois disso, "há que pensar nos casos de excepção constituídos pelos bons alunos". Saliente-se ainda a autonomia dada aos professores: "cabe ao bom senso do professor graduar as dificuldades e regular o ensino segundo o nível que a experiência aconselhar".

As partes de texto não obrigatórias eram apresentadas com um tamanho de letra menor, apresentando, muitas vezes, enunciados de exercícios mais complexos, demonstrações matemáticas, bem como extensas notas históricas. Nas imagens que se seguem iremos reproduzir a maioria dessas notas históricas, uma vez que a sua extensão e profundidade de conteúdos não era usual em manuais escolares desta natureza (por exemplo, são apresentados detalhadamente, os famosos paradoxos de Zenão, Figura 11).



ÍNDICE

Figura 2: Índice de [1], pp. 315-316.



PREFÁCIO

Com o presente livro procuram os autores contribuir, na justa medida, para a melhoria do ensino liceal da matemática no nosso País, admitindo, como norma, que o livro não pode substituir o ensino oral, mas pode e deve servir de apoio e complemento às lições do professor. A acção deste, embora mais viva e directa, é, por isso mesmo, mais sujeita ao desgaste e às restrições do tempo. O esclarecimento minucioso de certas questões, bem como a inserção das matérias no quadro duma cultura geral, que tempere e humanize o abstractismo inerente à matemática, procurando explicá-la como processo histórico — tudo isso é empresa considerável, que só num livro pode ser tentada.

É também de admitir que o ensino não deva ser igual para todos os alunos, mas antes adaptado, em certa medida, às aptidões particulares de cada um. Assim, pois, uma vez estabelecido claramente o mínimo razoável a exigir a todos, há que pensar nos casos de excepção — tanto mais preciosos quanto mais raros — constituídos pelos bons alunos. A eles se dirige grande parte do que, neste livro, vai impresso em tipo menor, bem como alguns exercícios mais difíceis. Em particular, o Capítulo I tem por objectivo principal rever e sistematizar noções adquiridas em anos anteriores; para a maioria dos alunos, bastará então ficar a ter um conhecimento nítido das propriedades operatórias que são válidas nos diversos campos numéricos e da crise que conduz ao alargamento de cada um deles; só no § 3 é introduzida matéria essencialmente nova, à qual convém dedicar atenção especial.

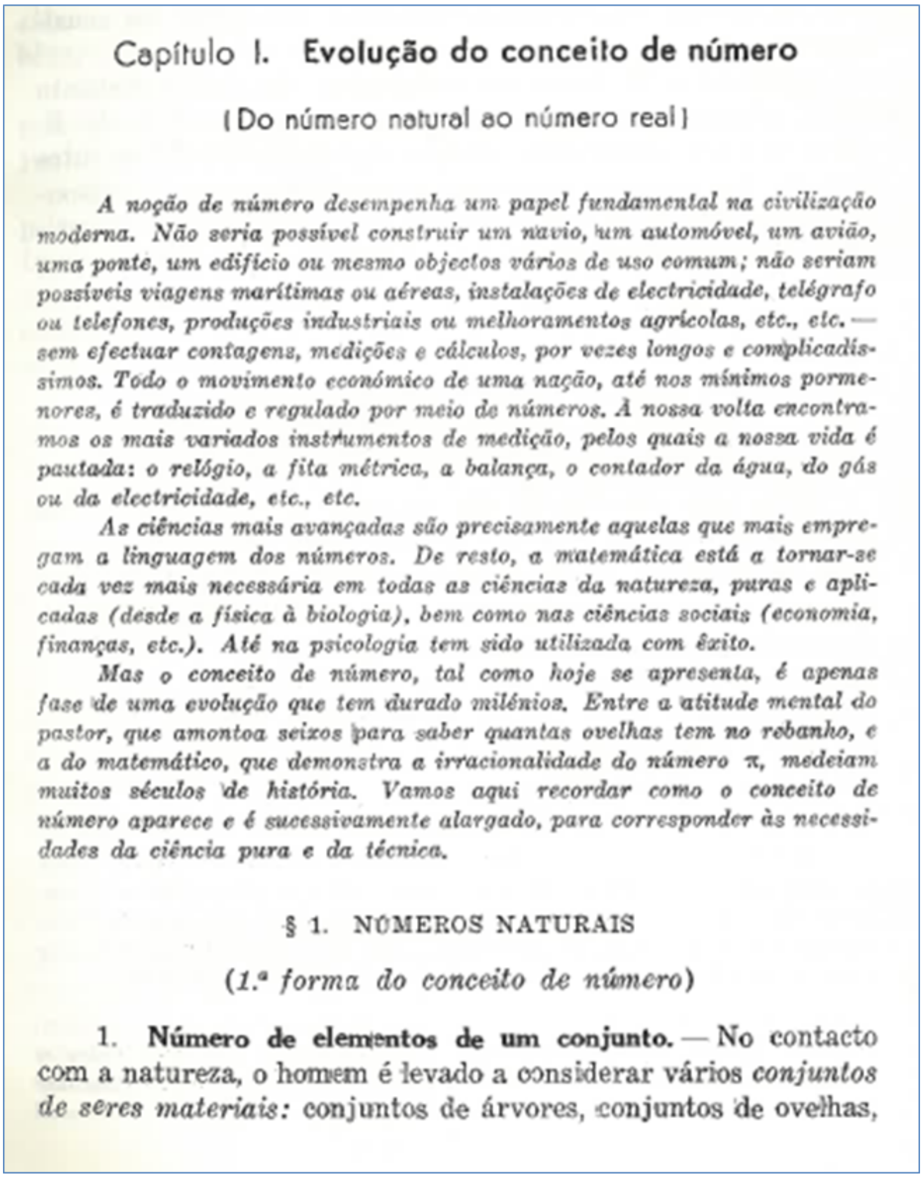
De resto, cabe ao bom senso do professor graduar as dificuldades e regular o ensino segundo o nível que a experiência aconselhar.

ADVERTÊNCIA

São facultativos todos os assuntos teóricos e exercícios que, neste livro, vão marcados com asterisco. Todas as restantes partes do texto impressas em corpo menor têm função meramente esclarecedora; a sua leitura não é, portanto, obrigatória, mas recomendável, especialmente aos alunos mais interessados.

No final do Capítulo I é apresentado um resumo, que indica a matéria mínima desse Capítulo exigível aos alunos. O resumo poderá mesmo substituir o texto inicial, excepto em alguns pormenores que são apontados no próprio resumo, com a indicação dos números do texto onde se encontram desenvolvidos.

Figura 3: Prefácio e Advertência de [1], pp. 5-6.



Capítulo I. Evolução do conceito de número

(Do número natural ao número real)

A noção de número desempenha um papel fundamental na civilização moderna. Não seria possível construir um navio, um automóvel, um avião, uma ponte, um edifício ou mesmo objectos vários de uso comum; não seriam possíveis viagens marítimas ou aéreas, instalações de electricidade, telégrafo ou telefones, produções industriais ou melhoramentos agrícolas, etc., etc. — sem efectuar contagens, medições e cálculos, por vezes longos e complicadíssimos. Todo o movimento económico de uma nação, até nos mínimos pormenores, é traduzido e regulado por meio de números. À nossa volta encontramos os mais variados instrumentos de medição, pelos quais a nossa vida é pautada: o relógio, a fita métrica, a balança, o contador da água, do gás ou da electricidade, etc., etc.

As ciências mais avançadas são precisamente aquelas que mais empregam a linguagem dos números. De resto, a matemática está a tornar-se cada vez mais necessária em todas as ciências da natureza, puras e aplicadas (desde a física à biologia), bem como nas ciências sociais (economia, finanças, etc.). Até na psicologia tem sido utilizada com êxito.

Mas o conceito de número, tal como hoje se apresenta, é apenas fase de uma evolução que tem durado milénios. Entre a atitude mental do pastor, que amontoa seixos para saber quantas ovelhas tem no rebanho, e a do matemático, que demonstra a irracionalidade do número π, medeiam muitos séculos de história. Vamos aqui recordar como o conceito de número aparece e é sucessivamente alargado, para corresponder às necessidades da ciência pura e da técnica.

§ 1. NÚMEROS NATURAIS

(1.ª forma do conceito de número)

1. **Número de elementos de um conjunto.** — No contacto com a natureza, o homem é levado a considerar vários *conjuntos de seres materiais:* conjuntos de árvores, conjuntos de ovelhas,

Figura 4: [1], p. 7.

Em vez de tomar para unidade um comprimento U positivo, poderia tomar-se um comprimento negativo: isso equivaleria a mudar a orientação da recta.

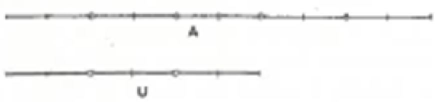
Chama-se *referencial*, numa recta orientada, o sistema constituído por um ponto O, tomado como origem, e por um comprimento U não nulo, tomado como unidade. É claro que, mudando o referencial, muda geralmente a abcissa dum ponto.

O que acaba de ser dito para pontos duma recta aplica-*mutatis mutandis*, a instantes, a temperaturas, etc. (ver exer cios 4 a 7).

5. Grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis (¹). — Costuma dizer-se que uma grandeza A é *comensurável* com outra grandeza U da mesma espécie (não nula), se a medida de A em relação a U é um número racional; caso contrário, diz-se que A é *incomensurável* com U.

Etimològicamente, «incomensurável com U» significa «que não se pode medir com U». A razão histórica da escolha deste termo encontra-se no facto de não se ter admitido inicialmente a existência dos números irracionais, que depois também foram chamados «números inexprimíveis», «números surdos», etc. (ver NOTA HISTÓRICA no final do capítulo).

Por exemplo, na figura junta os dois comprimentos A e U representados por segmentos de recta são *comensuráveis entre si*, visto que a razão A/U é o número racional 5/3 que também se pode representar por 10/6, por 20/12, etc., ou mesmo pela dízima infinita *periódica* 1,(6):



$$\frac{A}{U} = \frac{5}{3} = \frac{10}{6} = 1{,}66\ldots 6\ldots$$

Na prática, as medidas das grandezas são sempre aproximadas, e nem sequer faz sentido falar de «medida exacta» duma grandeza. Nestas con-

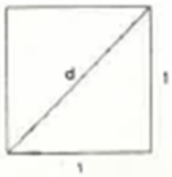
(¹) A leitura deste número tem especial interesse para a cultura geral do aluno. O assunto aqui tratado liga-se directamente ao da NOTA HISTÓRICA, cuja leitura é igualmente recomendável, por idênticas razões.

Figura 5: [1], p. 67.

68 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

dições, os números irracionais não chegam a ser pràticamente necessários: seria insensato dizer, por exemplo, que a medida da massa deste livro em gramas é um número irracional (afirmação que não é verdadeira nem falsa, mas apenas destituída de sentido).

É ùnicamente em assuntos teóricos, por exemplo em geometria, que somos levados a admitir a existência dos números irracionais para poder demonstrar com rigor e comodidade vários teoremas importantes. A ausência do conceito de número irracional daria então origem a enormes dificuldades.



Assim, em geometria euclidiana, a diagonal dum quadrado é incomensurável com o lado do mesmo. Com efeito, se representarmos por d a medida da diagonal, tomando para unidade o lado, tem-se, segundo o TEOREMA DE PITÁGORAS:

$$1^2 + 1^2 = d^2 \quad \text{donde} \quad d = \sqrt{2}$$

e já sabemos que $\sqrt{2}$ é um número irracional. *Foi este mesmo o primeiro caso que se conheceu de grandezas incomensuráveis* (ver NOTA HISTÓRICA).

Anàlogamente, a medida do comprimento duma circunferência qualquer, tomando para unidade o diâmetro, é o número irracional π, que está calculado com mais de 10 000 decimais. Indicamo-lo a seguir com 50 decimais:

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433$$
$$83279\ 50288\ 51991\ 69399\ 32510$$

NOTA — Na prática não será necessário, geralmente, utilizar mais do 4 algarismos decimais de π. Com 16 decimais, obtém-se, a menos da espessura dum cabelo, o comprimento duma circunferência de raio igual à distância média da Terra ao Sol!

Segundo parece, o que levava inicialmente os calculadores a determinar muitos algarismos decimais de π era a esperança de encontrar um período e, portanto, uma expressão exacta, fraccionária, daquele número. Mas esta esperança desvaneceu-se, depois que, em 1770, o suíço J. H. LAMBERT demonstrou que π é um número irracional.

O cálculo de π com 10 000 decimais foi feito em 1950 na Universidade de Harvard (Estados Unidos), usando a potentíssima máquina electrónica de calcular ENIAC, que esteve ao serviço daquela Universidade, para o cálculo de π e de outras constantes necessárias em questões teóricas e práticas da matemática. Antes disso, o número π estava calculado com 707 decimais, e depois disso já foi calculado com maior número de decimais.

Figura 6: [1], p. 68.

CAPÍTULO II — OS NÚMEROS REAIS COMO MEDIDAS 71

NOTA HISTÓRICA

«... admitiram [os pitagóricos] que os princípios dos números são os elementos de todos os seres e que o Céu inteiro é harmonia e número.»

ARISTÓTELES

«Diz-se que as pessoas que primeiro divulgaram os números irracionais pereceram todas num naufrágio; porque o inexprimível, o informe, deve ser mantido absolutamente secreto.»

PROCLO (¹)

A princípio, as noções matemáticas tinham apenas fim utilitário. Assim, a geometria aparece entre os Egípcios como conjunto de regras empíricas, receitas práticas para medir áreas de terrenos, que as águas do Nilo inundavam todos os anos, apagando demarcações (etimològicamente, a palavra «geometria» significa «medida da terra»). Por sua vez, a aritmética era tão-sòmente uma arte de calcular, *usada por comerciantes e agrimensores.*

Todavia, a matemática começa já a afirmar-se com feição diversa entre os Caldeus, que procuravam, no estudo dos astros, a previsão do futuro (astrologia). *Conquanto o objectivo destas pesquisas fosse ilusório, a matemática atingiu então, 2000 anos antes de Cristo, um nível que surpreende hoje o indagar histórico. Os Babilónios resolviam já equações do 2.° grau e possuíam um sistema de numeração capaz de representar valores tão próximos quanto se quisesse de qualquer número real. Foram eles talvez os primeiros a sentir a necessidade da* demonstração lógica.

Mas coube aos Gregos, herdeiros do pensamento oriental, a glória de fundar a geometria como ciência racional, *isto é, como ciência* demonstrável lògicamente *a partir dum pequeno número de factos elementares* — os postulados.

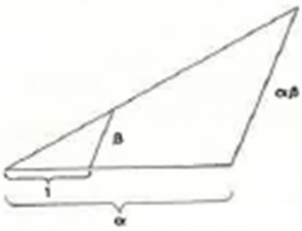
A matemática é então cultivada com espírito filosófico, desinteressado, *isto é, procurando, não a sua possível utilidade, mas apenas o prazer intelectual que possa proporcionar, comparável ao prazer da contemplação artística.*

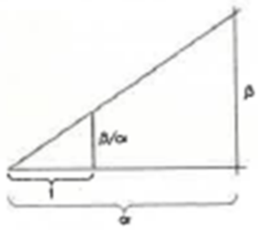
(¹) Filósofo neoplatónico (410-485).

Figura 7: [1], p. 71.

72 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

Chegaram os Gregos a construir uma teoria geométrica *das grandezas, mas dela não souberam destacar uma correspondente teoria* aritmética *dos números reais. Por isso, tanto nos raciocínios como nos cálculos, representavam os números por segmentos de recta, escolhendo um destes para unidade. Assim, a adição e a subtracção de números reduziam-se à adição e à subtracção dos respectivos segmentos representativos. A multiplicação e a divisão podiam ser efectuadas segundo o teorema de* TALES, *como se indica nas figuras.*





A descoberta das grandezas incomensuráveis é um momento dramático na evolução desta teoria.

No século VI antes de Cristo, floresceu no Sul da Itália uma seita grega, de carácter científico-religioso, a que se chamou escola pitagórica, *por ter sido fundada, ao que parece, pelo filósofo* PITÁGORAS, *da ilha de Samos, personagem um tanto misteriosa, envolvida nas brumas da lenda. Pretendiam os pitagóricos explicar tudo por meio dos números — a começar pela música, cuja teoria lhes é, em parte, devida. É então que aparece, pela primeira vez, o termo «matemática» (em grego τὰ μαθηματικά, de μάθημα, «ensino»), usada como sinónimo de «ciência racional». Os pitagóricos rendiam verdadeiro culto místico ao número* natural, *considerando-o como a essência de todas as coisas. Assim, admitiam que toda a figura fosse formada por um número* finito *de pontos, sendo estes pensados como ínfimos corpúsculos, todos iguais entre si* (átomos ou mónadas). *Daqui resultava que dois comprimentos seriam sempre grandezas comensuráveis; com efeito, sendo um segmento formado por* m *mónadas e outro por* n *mónadas, a razão entre o primeiro e o segundo seria* m/n. *Mas é o próprio teorema do quadrado da hipotenusa, atribuído a* PITÁGORAS, *que vem demolir esta doutrina, permitindo demonstrar que o lado do quadrado é incomensurável com a diagonal (ou seja que $\sqrt{2}$ é um número irracional).*

Eis aqui o momento dramático. Esta descoberta — que é, afinal, um dos acontecimentos capitais da história do pensamento — foi tida como um escândalo, uma calamidade, pelos seus próprios autores, que tentaram

Figura 8: [1], p. 72.

CAPÍTULO II — OS NÚMEROS REAIS COMO MEDIDAS 73

ocultá-la, convencidos de que os deuses os castigariam severamente, se eles divulgassem o que lhes parecia uma imperfeição da obra divina. O certo é que a teoria geométrica *das mónadas estava, então, condenada. Em seu lugar triunfa a teoria dos* filósofos de Eleia *(colónia grega no Sul da Itália), que concebiam o espaço como um* todo contínuo. *Estas duas concepções opostas são depois, em parte, conciliadas pela teoria de* DEMÓCRITO, *que se pode traduzir nestes termos: uma coisa é a matéria, outra coisa é o espaço em que se move a matéria; o espaço é contínuo, mas a matéria é discreta, formada por átomos* (¹).

Porém a matemática grega ficou sempre subordinada à geometria. Para a criação da aritmética e da álgebra foi necessário, novamente, pôr de lado preocupações de rigor lógico e visar objectivos práticos, concretos. Assim procederam os Indianos — inventores do sistema de numeração decimal —, que, em cálculos audaciosos, não justificados, manejaram decididamente, e com êxito, os radicais e os números negativos. Mas tornava-se necessário, depois disso, legitimar os novos métodos.

Dum modo geral, todas as vezes que as necessidades do cálculo levavam a ampliar o campo dos números existentes, introduzindo novos entes numéricos, estes eram olhados com extrema desconfiança, que se reflectia nas curiosas designações atribuídas a esses entes. Assim, os irracionais foram denominados «números inexprimíveis», «números incalculáveis», «números surdos», etc. (ainda hoje, em inglês, se diz «surd roots». Depois, os números negativos, que a teoria das equações algébricas tornava cada vez mais inevitáveis, foram chamados «absurdos», «falsos», «fingidos», etc. Depois ainda, a mesma teoria das equações obrigou a introduzir os números imaginários, *de que trataremos no capítulo seguinte, e que também se chamaram «números impossíveis», «números quiméricos», etc.*

Durante muitos séculos não foi possível conceber os números fraccionários, os irracionais, etc., senão como medidas de grandezas. Só em fins do século passado, principalmente por obra dos matemáticos alemães DEDEKIND *e* CANTOR, *se pôde construir uma teoria rigorosa dos números reais, independente da geometria e da física.*

Note-se que, no estudo dos números, interessa muito menos ao matemático a maneira de efectuar os cálculos, do que o conjunto das propriedades gerais das operações. São estas propriedades que formam a essência da álgebra.

(¹) Actualmente, no campo da física, torna a debater-se o problema da dualidade *discreto-contínuo*.

Figura 9: [1], p. 73.

Compêndio de Álgebra — 6.º Ano

NOTA HISTÓRICA

«Oh cousas todas vãs, todas mudaves,
Qual é o coração que em vós confia?»

Sá de Miranda

Para nos guiar no mundo instável em que vivemos, a nossa razão (¹) *precisa de se apoiar em certos princípios lógicos. Um deles é o* **princípio da não contradição,** *que se pode enunciar do seguinte modo:*

«Uma coisa não pode ter e não ter, ao mesmo tempo, uma mesma propriedade.»

Por exemplo, se dissermos que uma certa figura é quadrada e não é quadrada, *que um dado comprimento* mede 5 cm e não mede 5 cm, *etc., estamos a enunciar factos* contraditórios, *logo* impossíveis *à luz da razão. Se estivéssemos sempre assim a contradizer-nos, a linguagem seria mais do que inútil, nociva, e o homem desceria à condição de* irracional.

E todavia, no mundo que nos rodeia, nenhuma figura é (exactamente) quadrada, nenhum comprimento mede (exactamente) 5 cm. *Mais ainda, as propriedades dos corpos estão sempre a mudar e portanto a desdizerem-nos — de tal modo que, quando acabamos de afirmar* «a temperatura deste corpo é inferior a 20°», *já a temperatura do mesmo pode ter subido a mais de* 30°, *e, enquanto dizemos* «são agora 5 horas», *decorre ao menos um segundo. Este* «*constante mudar*» *da natureza, estas suas aparentes contradições, têm fornecido assunto inesgotável a poetas e filósofos.*

Na Grécia antiga defrontam-se, a princípio, duas correntes opostas, igualmente exageradas e exclusivistas nas suas afirmações. Dum lado estão os filósofos que podemos chamar empiristas (²). *Segundo estes,* a

(¹) A palavra «razão» é aqui usada no sentido de «faculdade de conhecer e raciocinar». Recordemos que o homem se diz «animal racional» por ser dotado do uso da razão.

(²) Chama-se «empirismo», dum modo geral, ao uso da experiência, sem teoria ou raciocínio. Mas note-se que, além da razão e da experiência, há uma fonte directa de conhecimento — *a intuição* — que leva, por exemplo, o matemático a *pressentir* as verdades, ainda antes de as demonstrar.

Figura 10: [1], p. 142.

CAPÍTULO IV — FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL **143**

realidade é mudança, movimento, vida — *uma série de situações sempre novas, sempre diversas, que nenhuma regra ou teoria é capaz de traduzir: o mundo é pois* ininteligível. *Este ponto de vista ficou bem expresso na célebre imagem de* HERACLITO, o CONFUSO *(576-480 a. C.):*

«Tu não podes banhar-te duas vezes no mesmo rio; porque sempre novas águas correm sobre ti.»

E assim a realidade é como o fluir *de um rio, que está sempre a não ser o que há bem pouco ainda era (ou parecia ser).*

Do outro lado estão os filósofos racionalistas, *entre os quais figuram os pitagóricos e os eleatas (filósofos da escola de Eleia)* (¹). *Para estes,* realidade é o que permanece, o que não muda: é o Ser, não o Variar. *A mudança, dizem eles, é contraditória, incompreensível — logo aparência, ilusão dos sentidos. E, se os seres particulares parecem mudar, o universo, como um todo, é imóvel, imutável, eterno — logo* inteligível, *logo* real. *Ficaram célebres os* **paradoxos do movimento** (²), *com os quais* ZENÃO *de Eleia desconcertou os filósofos de Atenas e provocou discussões durante séculos. Citaremos três desses argumentos:*

1) **Paradoxo da dicotomia.** *Tudo o que se move deve atingir metade do percurso, antes de chegar ao fim; e, ainda antes do meio, deve atingir um quarto, e antes de um quarto, um oitavo, e assim sucessivamente, sem mais acabar. Logo o movimento não chega a realizar-se, ao contrário do que parece.*

2) Paradoxo de «Aquiles e a tartaruga». *Aquiles corre para apanhar uma tartaruga que se afasta dele; mas quando chega ao lugar donde parte a tartaruga, já esta lá não está. A distância que os separa é agora mais pequena, mas enquanto Aquiles a percorre, também a tartaruga se desloca; e assim sucessivamente,* ao infinito. *Logo Aquiles, embora caminhando mais depressa, nunca pode atingir a tartaruga, ao contrário do que parece acontecer.*

3) Paradoxo da seta. *Lançada dum arco, uma seta fica imóvel em cada instante, pois que, de contrário, ocuparia várias posições num instante, o que é impossível. Ora o tempo é feito de instantes. Logo a seta ficará sempre imóvel, contràriamente ao que se observa.*

(Veremos mais adiante como, em matemática, se evitam estes paradoxos).

(¹) Ver NOTA HISTÓRICA do Cap. II.

(²) Paradoxo = opinião contrária à comum.

Figura 11: [1], p. 143.

144 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

O racionalismo grego encontra a sua expressão apurada no platonismo. Segundo PLATÃO, *há duas formas de realidade: a realidade sensível ou mundo dos fenómenos, que nós conhecemos por intermédio dos nossos sentidos, e a realidade inteligível ou mundo das Ideias, que nós contemplamos por intermédio da razão. A primeira, mutável e imperfeita, seria apenas representação grosseira da segunda, que é a autêntica realidade, isenta de contradição — perfeita, incorruptível, eterna. Segundo esta doutrina, os conceitos matemáticos, relativos a números e a figuras geométricas, são seres do mundo inteligível: assim, por exemplo, os triângulos, que nós vemos e desenhamos, são apenas imagens toscas do verdadeiro* Triângulo, *que nós idealizamos. (Toda a matemática está, ainda hoje mais ou menos impregnada de platonismo).*

Finalmente ARISTÓTELES, *um dos espíritos mais amplos e equilibrados de todos os tempos* (¹), *procurou conciliar o racional e o empírico, o abstracto e o concreto, a teoria e a prática — como único meio para atingir o conhecimento científico. Todavia, a ciência grega, em parte paralisada pela crítica eleática, ficou reduzida a ciência do repouso e do equilíbrio:* geometria *e* estática.

Só em fins do século XVI, princípios do século XVII, com os trabalhos de KEPLER *sobre o movimento dos planetas e os de* GALILEU *relativos à queda dos graves, a matemática começa a ser aplicada com êxito ao estudo dos movimentos* (cinemática *e* dinâmica). *Mas a matemática dessa época difere já muito da geometria helénica: é a* análise matemática que surge agora, baseada no conceito de função. *Os seres materiais dão-se-nos a conhecer pelas suas variações, impressionando os nossos sentidos; mas também não seria possível conhecê-los, se nessas variações não houvesse uma lei — isto é, uma propriedade ou uma relação sensìvelmente constante. Ora as leis dos fenómenos são expressas por funções.* **São pois os conceitos matemáticos de variável e de função que permitem, à razão humana, interpretar o movimento e, dum modo geral, os fenómenos naturais.**

A partir desse momento, os fenómenos são submetidos ao cálculo e ao raciocínio. E começa uma nova era da ciência, que se prolonga até fins do século passado. Consegue-se então, por exemplo, prever com grande antecedência e precisão o movimento dum astro. Mas os êxitos assim alcançados pelo método matemático inebriam os cientistas: chega a admitir-se a

(¹) ARISTÓTELES (384-322 a. C.) foi discípulo de PLATÃO (429-347 a. C.), assim como este tinha sido discípulo de SÓCRATES (470-399 a. C).

Figura 12: [1], p. 144.

possibilidade duma fórmula universal, *que permita prever todo o futuro do universo. Nesta crença consiste o* determinismo absoluto, *forma exagerada de racionalismo — cujo extremo oposto é o empirismo absoluto ou* cepticismo.

A atitude do homem de ciência tornou-se mais comedida, especialmente ao abordar o estudo do átomo. É no equilíbrio sensato das duas tendências do nosso espírito — a racionalista e a empirista — que parece estar sempre o bom caminho. As leis naturais, expressas por meio de fórmulas, têm carácter aproximativo, contingente. Não podemos ter a pretensão de traduzir na simplicidade duma fórmula a infinita complexidade do real concreto. Não podemos pretender que o retrato seja uma cópia exacta e perfeita do original. As teorias científicas (a começar pela geometria) são apenas esquemas lógicos, *isto é, descrições simplificadas do mundo empírico, isentas de contradições internas. As contradições surgem sòmente quando a teoria está em desacordo com a prática, o que leva a aperfeiçoar a teoria, tornando-a mais* próxima *da realidade. É assim,* por aproximações sucessivas, *que a ciência parece progredir.*

* * *

O termo «função» foi, ao que parece, introduzido em matemática por LEIBNIZ *(cuja biografia será esboçada mais adiante); mas, a princípio, o seu significado não se distinguia nìtidamente do de «expressão analítica».*

O conceito de função tem evoluído paralelamente ao de curva, seu correspondente geométrico. Dizia-se que uma curva era «geométrica» ou «arbitrária» conforme se sabia ou não representá-la analìticamente. Mas a operação de passagem ao limite veio alargar imenso as possibilidades de representação analítica, obrigando a modificar aquele critério. Finalmente, certos problemas práticos, *tais como o estudo das vibrações das cordas de instrumentos de música, o estudo da propagação do calor, etc., levaram, no século passado, os matemáticos (nomeadamente* DIRICHLET) *a adoptar o conceito de função numérica tal como hoje é definido, isto é, como correspondência arbitrária entre os valores de duas variáveis.*

No século XX, o desenvolvimento cada vez maior da matemática e a sua crescente intervenção nos mais diversos domínios da ciência e da técnica conduziram a generalizar o conceito de função ao caso de variáveis cujos valores pertencem a um conjunto de entes de natureza qualquer (números, funções, figuras geométricas, animais, pessoas, etc., etc.; ver atrás o n.º 7). Assim nasceu a **análise geral** *ou* **análise moderna,** *que compreende vários ramos:* lógica, teoria dos conjuntos, álgebra abstracta, topologia geral, *etc.*

Figura 13: [1], p. 145.

lá de 9. Depois ainda, estabiliza-se o algarismo das centésimas. E assim sucessivamente. É claro que o número representado pela parte inteira e pelos algarismos decimais assim estabilizados é o limite para que tende u_n.

Nos restantes casos, a demonstração do teorema é análoga.

EXEMPLO — Consideremos uma sucessão de polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio r, começando por um hexágono e duplicando depois, sucessivamente, o número de lados. Consideremos anàlogamente polígonos regulares de 6 lados, de 12 lados, de 24 lados, etc., circunscritos à circunferência.

Os geómetras gregos deduziram fórmulas que permitem calcular, a partir do raio, os perímetros de tais polígonos. Demonstra-se então o seguinte: 1) os perímetros dos polígonos inscritos formam uma sucessão crescente; 2) os perímetros dos polígonos circunscritos formam uma sucessão decrescente; 3) qualquer dos primeiros é menor que qualquer dos segundos, com uma diferença que tende para zero. Portanto as duas sucessões são convergentes e tendem para um mesmo limite. Este limite é, *por definição*, o comprimento da circunferência.

Na seguinte tabela registam-se os resultados dos cálculos efectuados, com 5 decimais exactos, até aos polígonos de 384 lados:

Número de lados do polígono	Perímetro do polígono inscrito	Perímetro do polígono circunscrito
6	$2r \cdot 3{,}00000\ldots$	$2r \cdot 3{,}46410\ldots$
12	$2r \cdot 3{,}10583\ldots$	$2r \cdot 3{,}21539\ldots$
24	$2r \cdot 3{,}13263\ldots$	$2r \cdot 3{,}15966\ldots$
48	$2r \cdot 3{,}13935\ldots$	$2r \cdot 3{,}14609\ldots$
96	$2r \cdot 3{,}14103\ldots$	$2r \cdot 3{,}14272\ldots$
192	$2r \cdot 3{,}14145\ldots$	$2r \cdot 3{,}14187\ldots$
384	$2r \cdot 3{,}14156\ldots$	$2r \cdot 3{,}14166\ldots$

Assim, obtém-se o perímetro de cada polígono, inscrito ou circunscrito, multiplicando o diâmetro por um certo coeficiente numérico. Os coeficientes que correspondem aos polígonos inscritos formam uma sucessão crescente e os outros, uma sucessão decrescente. Estas duas sucessões tendem para um mesmo limite, que é, *por definição*, o número π. Como se vê, os polígonos de 384 lados fornecem já um valor aproximado de π a menos de 0,0002 (até a menos de 0,0001). ARQUIMEDES, nos seus cálculos, chegou apenas ao polígono de 96 lados.

Figura 14: [1], p. 169.

COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

NOTAS HISTÓRICAS

«O infinito! Nunca outra ideia perturbou tão fundamente o espírito do homem!»

DAVID HILBERT [1]

I. **Infinito potencial e infinito actual.** *A par da ideia de movimento, uma outra foi evitada pelos clássicos gregos como incompreensível, rebelde aos métodos da razão: a ideia de infinito.*

A mais simples forma do infinito matemático é a que se apresenta na sucessão dos números naturais:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ n,\ n+1, \ldots$$

Etimològicamente, a palavra «infinito» significa «não acabado». Na verdade, a sucessão dos números naturais aparece primeiramente ao nosso espírito como se fosse uma lista em aberto, que pudéssemos sempre continuar, inscrevendo, após o último elemento n *considerado, um novo elemento,* $n+1$. *Tem-se deste modo a ideia duma variável que cresce para além de todo o limite — isto é, dum* infinitamente grande, *também chamado* infinito potencial.

Em linguagem filosófica, diz-se potencial *ou* em potência *tudo que não está ainda completamente realizado (tal como a estátua no bloco de mármore, antes de ser explicitada pelo escultor); e diz-se* actual *ou* em acto *o que se encontra totalmente realizado.*

Ora, o que repugnou à mentalidade grega não foi tanto a ideia de infinito potencial como a ideia de infinito actual. *Note-se desde já que esta «desconfiança» dos Gregos a respeito do infinito foi um entrave ao progresso científico. É certo que nos parece inconcebível a existência de um número infinito de* seres materiais simultâneos *— sejam eles estrelas, grãos de areia, átomos ou electrões. Todavia, é o próprio platonismo (ver* NOTAS HISTÓRICAS *do Cap. IV) que nos leva a conceber os números*

[1] DAVID HILBERT, nascido em Königsberg (Alemanha), foi um dos maiores matemáticos dos últimos 50 anos (1862-1943). A sua obra estende-se por todos os sectores da matemática, pura e aplicada, desde a lógica à física matemática.

Figura 15: [1], p. 180.

naturais como eternos e imutáveis no **mundo das ideias** — *e portanto já realizados, na sua totalidade infinita. De resto, para evitar os paradoxos de* ZENÃO, *é-se obrigado a aceitar o infinito actual também nas ideias de espaço e tempo: todo o segmento de recta deve ser formado por uma infinidade de pontos, assim como todo o intervalo de tempo deve ser formado por uma infinidade de instantes. Só deste modo se explica que um ponto móvel ocupe, num tempo finito, um número* infinito *de posições — o que, segundo parece, os Gregos não admitiam, nem mesmo do ponto de vista platónico.*

Modernamente, a análise lógica dos fundamentos da matemática, empreendida por HILBERT, *leva a crer que nenhuma contradição resultará de admitir como existente a* totalidade *dos números naturais ou mesmo a dos números reais. Deste modo, poderemos dizer que* a ideia de infinito actual é compatível com os princípios da razão.

Outra sorte teve porém a ideia de infinitésimo actual.

II. Do conceito de infinitésimo ao conceito de limite. *Já desde os tempos antigos os matemáticos foram tentados a conceber toda a grandeza contínua positiva como se fosse a soma duma infinidade de* grandezas infinitamente pequenas, mas não nulas. *Assim, ao que parece, os pitagóricos, quando já não puderam ocultar por mais tempo aquele famoso «escândalo» das grandezas incomensuráveis, tentaram salvar a sua doutrina, concebendo as mónadas como uma espécie de infinitésimos. Estes seriam então os* infinitésimos actuais, *também chamados* indivisíveis, *cuja ideia se pode concretizar do seguinte modo:*

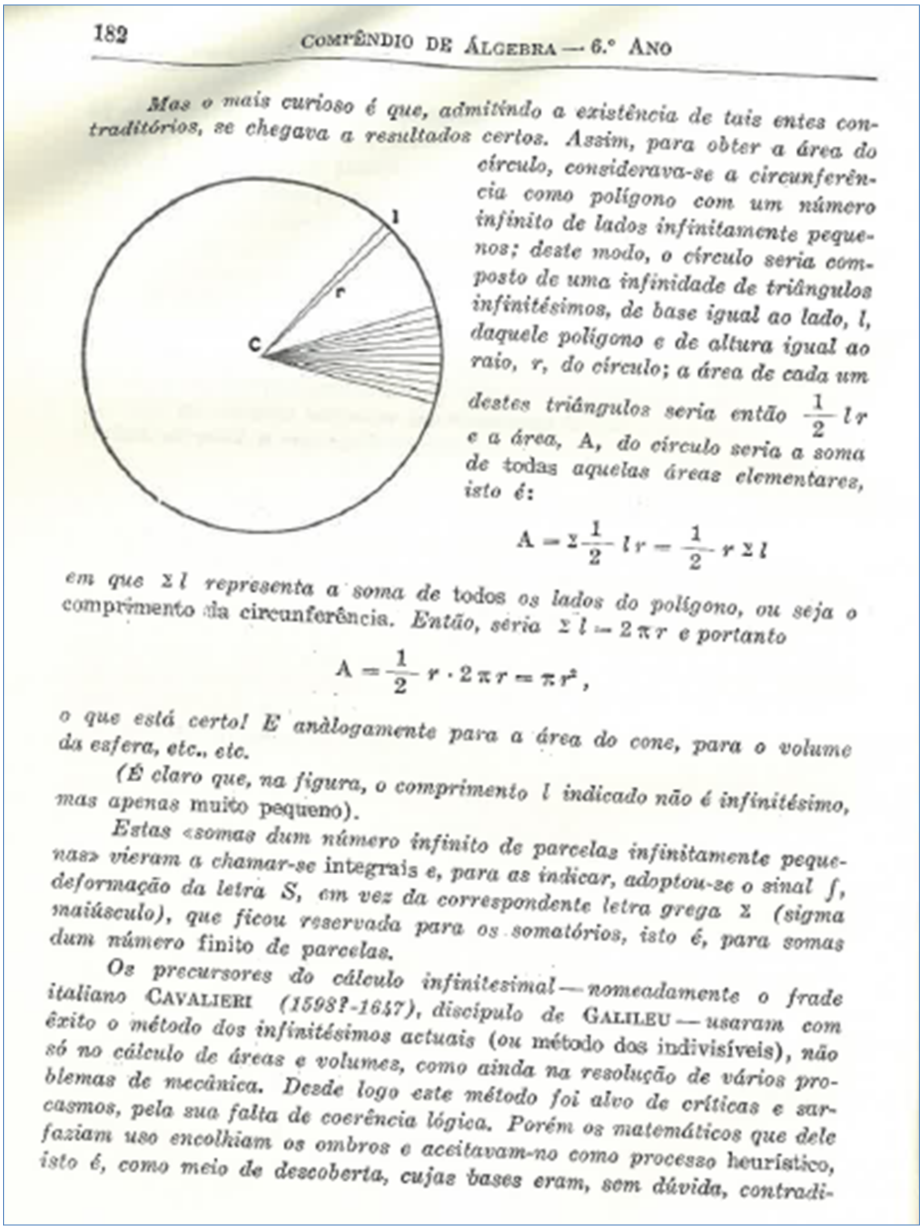
Suponhamos que se adoptou um comprimento U *para unidade. Então, um* infinitésimo actual *seria um comprimento* ω, *maior que o comprimento zero e menor que qualquer submúltiplo da unidade, isto é, tal que:*

$$\omega > 0 \quad e \quad \omega < \frac{U}{n}, \text{ por maior que fosse } n.$$

Porém, com os postulados da geometria euclidiana, a segunda condição não permite que ω *seja maior que zero, enquanto a primeira exige que* ω *seja maior que zero* (¹). *Assim,* o infinitésimo actual deveria ser ao mesmo tempo superior a zero e não superior a zero, *o que é impossível, segundo o princípio da não contradição. E o que se diz para comprimentos, diz-se para qualquer outra espécie contínua de grandezas.*

(¹) Note-se que, em certas geometrias, chamadas *não arquimedianas*, a situação é diversa.

Figura 16: [1], p. 181.



182 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

Mas o mais curioso é que, admitindo a existência de tais entes contraditórios, se chegava a resultados certos. Assim, para obter a área do círculo, considerava-se a circunferência como polígono com um número infinito de lados infinitamente pequenos; deste modo, o círculo seria composto de uma infinidade de triângulos infinitésimos, de base igual ao lado, l, daquele polígono e de altura igual ao raio, r, do círculo; a área de cada um destes triângulos seria então $\frac{1}{2}\, l\, r$ *e a área, A, do círculo seria a soma de todas aquelas áreas elementares, isto é:*

$$A = \Sigma \frac{1}{2}\, l\, r = \frac{1}{2}\, r\, \Sigma\, l$$

em que $\Sigma\, l$ *representa a soma de* todos *os lados do polígono, ou seja o* comprimento da circunferência. *Então, seria* $\Sigma\, l = 2\pi r$ *e portanto*

$$A = \frac{1}{2}\, r \cdot 2\pi r = \pi r^2 ,$$

o que está certo! E ànalogamente *para a área do cone, para o volume da esfera, etc., etc.*

(É claro que, na figura, o comprimento l indicado não é infinitésimo, mas apenas muito pequeno).

Estas «somas dum número infinito de parcelas infinitamente pequenas» vieram a chamar-se integrais *e, para as indicar, adoptou-se o sinal* $\int$*, deformação da letra S,* em *vez da correspondente letra grega* Σ *(sigma maiúsculo), que ficou reservada para os somatórios, isto é, para somas dum número* finito *de parcelas.*

Os precursores do cálculo infinitesimal — nomeadamente o frade italiano CAVALIERI *(1598?-1647), discípulo de* GALILEU *— usaram com êxito o método dos infinitésimos actuais (ou* método dos indivisíveis), *não só no cálculo de áreas e volumes, como ainda na resolução de vários problemas de mecânica. Desde logo este método foi alvo de críticas e sarcasmos, pela sua falta de coerência lógica. Porém os matemáticos que dele faziam uso encolhiam os ombros e aceitavam-no como processo* heurístico, *isto é, como meio de descoberta, cujas bases eram, sem dúvida, contradi-*

Figura 17: [1], p. 182.

CAPÍTULO V — LIMITES DE SUCESSÕES 183

tórias, mas cuja aplicação conduzia ràpidamente a fórmulas certas, que de outro modo não era fácil encontrar.

O pior é que, por tal processo, se chegava também a resultados, umas vezes duvidosos, outras vezes contraditórios. Tratava-se, enfim, dum método empírico — não racional. *Aliás, parece averiguado que já* ARQUIMEDES *usava o mesmo método, heurìsticamente, em vários problemas de cálculo integral; mas que depois, ao expor os resultados obtidos, os demonstrava com o rigor lógico da época, sem indicar o caminho que tinha seguido na investigação* (1).

A análise infinitesimal, criada por NEWTON *e por* LEIBNIZ *(como será explicado noutra Nota) desenvolveu-se prodigiosamente, graças ao êxito extraordinário das suas aplicações às ciências experimentais. Mas continuou a fazer-se sentir, apesar de todos os progressos, a falta duma sua fundamentação lógica impecável. Ainda em fins do século XVIII, o grande matemático* LAGRANGE *considerava lamentável o estado da matemática, dizendo, em resumo, o seguinte:* esta ciência é um formigueiro de contradições e se, apesar disso, conduziu a grandes resultados, é porque a infinita clemência de Deus dispôs as coisas de modo que os erros se compensassem uns aos outros. *Em 1784, a Academia de Berlim, presidida por* LAGRANGE, *abriu um concurso, pedindo* «uma teoria clara e precisa daquilo que se chama infinito em matemática» *e, em particular, a explicação de* «como é possível deduzir tantos teoremas verdadeiros duma suposição contraditória».

Mas, só uns 30 anos depois, outro grande matemático, o francês CAUCHY, *tratando sistemàticamente os infinitésimos como variáveis tendentes para zero e dando uma definição lógica rigorosa do conceito de limite, conseguiu finalmente edificar a análise matemática sobre uma base*

(1) ARQUIMEDES, natural de Siracusa, cidade grega da Sicília, é considerado um dos maiores génios matemáticos de todos os tempos (287-212 a. C.). Celebrizou-se não só pelas suas admiráveis descobertas de geometria, como ainda pelos seus estudos fundamentais de estática. (São bem conhecidas as circunstâncias em que, segundo se diz, descobriu o princípio da hidrostática que tem o seu nome). Durante 3 anos, a cidade de Siracusa, sitiada pelos Romanos, resistiu ao cerco, graças a engenhos por ele inventados (catapultas formidáveis, guindastes que levantavam os navios e os arremessavam contra os rochedos, etc.). Finalmente a cidade foi tomada de surpresa, e ARQUIMEDES, absorvido na contemplação duma figura que traçara no solo, foi assassinado por um soldado romano, a quem, segundo se diz, gritara colérico: «Não apagues os meus círculos!».

Figura 18: [1], p. 183.

184 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

racional. Além disso, CAUCHY *estendeu a análise, com igual rigor, ao campo das* funções de variável complexa, *que são hoje de grande interesse e utilidade, pelas suas aplicações à ciência pura e à técnica.*

Porém o edifício da análise só apareceu, em toda a sua perfeição lógica, depois de apeados os andaimes geométricos, por obra dos grandes matemáticos alemães DEDEKIND, CANTOR e WEIERSTRASS (cf. NOTA HISTÓRICA *do Cap. II*).

Modernamente, as questões relativas ao conceito de limite são estudadas num ramo da matemática chamado topologia.

III. O conceito de limite e os paradoxos de ZENÃO. *É o conceito de limite que, passados 24 séculos, permite esclarecer o tão debatido problema dos paradoxos de* ZENÃO. *Consideremos por exemplo o paradoxo de «Aquiles e a tartaruga». Suponhamos que Aquiles anda 10 vezes mais depressa que a tartaruga, começando por estar à distância de 10 metros desta. Então, quando Aquiles percorre os 10 m, a tartaruga andará 1 m; depois, quando Aquiles percorre esta distância, a tartaruga desloca-se mais 1 decímetro, e assim sucessivamente. Deste modo, as distâncias de Aquiles ao* seu ponto de partida *vão sendo as seguintes (expressas em metros):*

$$0 \; ; \; 10 \; ; \; 11 \; ; \; 11{,}1 \; ; \; 11{,}11 \; ; \; 11{,}111 \; ; \; 11{,}1111 \; ; \; 11{,}11111 \; ; \ldots$$

Ao mesmo tempo, as distâncias da tartaruga ao ponto de partida de Aquiles vão sendo:

$$10 \; ; \; 11 \; ; \; 11{,}1 \; ; \; 11{,}11 \; ; \; 11{,}111 \; ; \; 11{,}1111 \; ; \; 11{,}11111 \; ; \; 11{,}111111 \; ; \ldots$$

Ora, ambas estas sucessões têm por limite *o mesmo número:*

$$11{,}11111\ldots = 11\,\frac{1}{9}$$

Assim, para alcançar a tartaruga, Aquiles deverá percorrer 11 metros e 1/9 do metro — o que, de resto, se podia ver directamente, resolvendo a equação $x = 10(x - 10)$, *que traduz algèbricamente o problema.*

Afinal, o vício de raciocínio que se introduzia no paradoxo de ZENÃO *consistia em admitir, inconscientemente, que os espaços parciais 10 m, 1 m, 1 dm, 1 cm, etc., seriam todos percorridos por Aquiles em tempos iguais e, portanto, cada vez mais lentamente — o que não sucede, com certeza, se o movimento for sensìvelmente uniforme. Assim, por exemplo, se Aquiles caminhar à razão de 1 metro por segundo, ao fim de 11 segundos e 1/9 do segundo estará precisamente no ponto em que deve encontrar a tartaruga.*

É preciso não esquecer que estamos a raciocinar com esquemas abstractos de espaço e tempo, que são apenas simplificações da realidade.

Figura 19: [1], p. 184.

CAPÍTULO VIII — DERIVADAS

NOTAS HISTÓRICAS

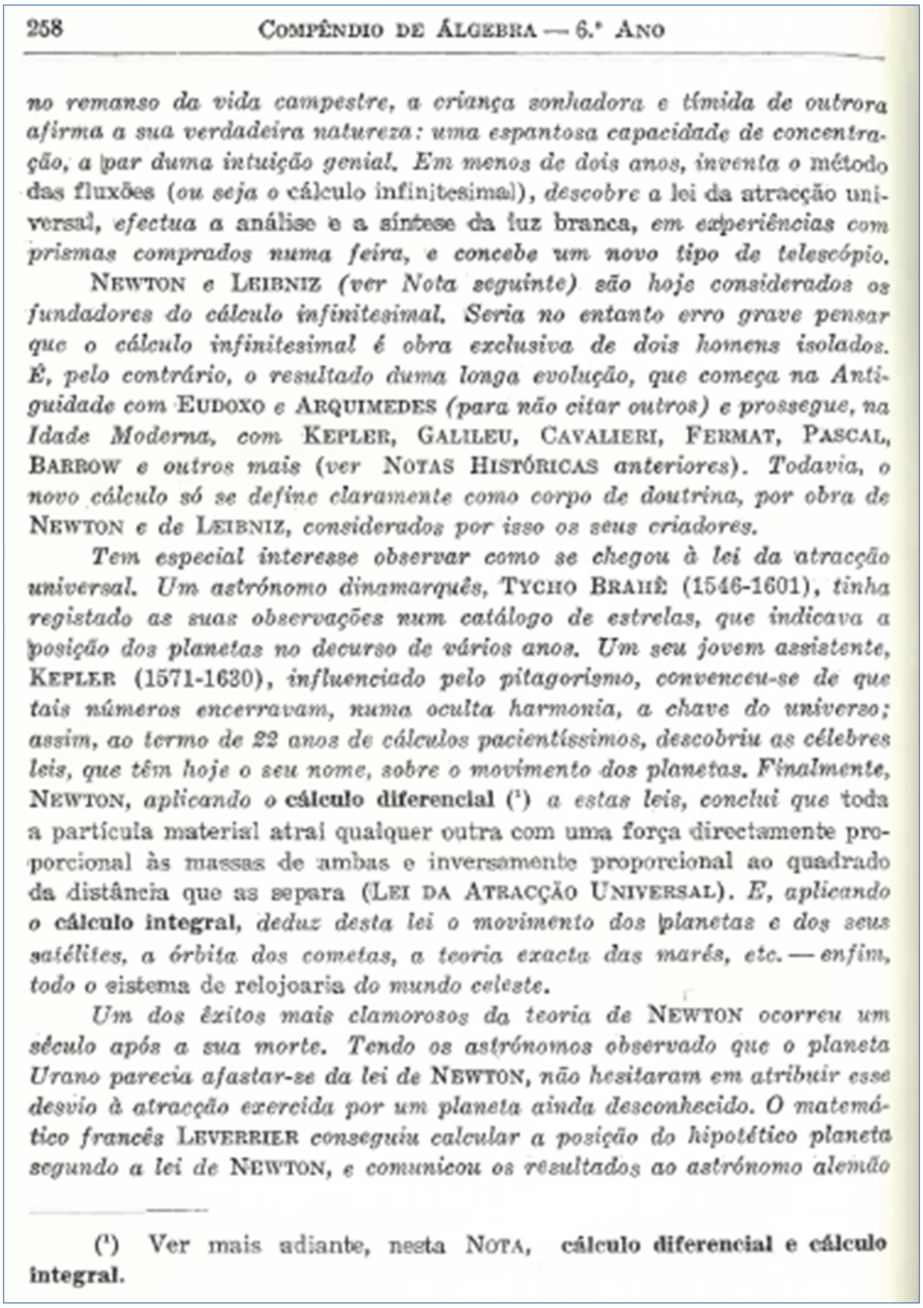
I. **Notícias biográficas** [1] — A) ISAAC NEWTON *nasceu na aldeia de Woolsthorpe, Inglaterra, no dia de Natal de 1642 (ano da morte de* GALILEU). *Seu pai, modesto agricultor, tinha falecido poucas semanas antes. Criança débil e meditativa, o pequeno* ISAAC *não participava nas brincadeiras dos rapazes da mesma idade, inventando ele próprio as suas distracções, tais como rodas hidráulicas, moinhos que moiam trigo, relógios de madeira que funcionavam, etc. Na escola, mantinha-se retraído, abstracto, chegando a ser o último da classe; até que um dia, tendo vencido em luta um colega que o agredira brutalmente, se encheu de brio e quis mostrar que também podia ser bom aluno. A partir desse momento, as suas possibilidades intelectuais começaram a chamar a atenção dos professores e da família.*

Aos 19 anos ingressa na Universidade de Cambridge. Segundo se conta, estava então para desposar uma sua linda conterrânea. Mas a ausência e os estudos devem tê-lo afastado do seu romance: ela casou, ele ficou solteiro. Em Cambridge, NEWTON *seguiu, com entusiasmo crescente, o curso de* BARROW, *matemático insigne, que expunha o seu próprio método para determinação de tangentes e cálculo de áreas. (Era este, em germe, o cálculo infinitesimal. De* BARROW *se viria a dizer que foi a «estrela da manhã, anunciando o nascimento do Sol»). O professor em breve se apercebeu do valor do discípulo. Mas, no destino deste, um facto imprevisto veio pesar ainda de modo decisivo.*

Em 1664-66 grassa em Inglaterra uma pavorosa epidemia de peste bubónica. A Universidade fecha e NEWTON *regressa à sua aldeia. Aqui,*

[1] Para mais pormenores, ver por exemplo BELL, *Les grands mathématiciens* (trad.), Payot, Paris.

Figura 20: [1], p. 257.



258 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

no remanso da vida campestre, a criança sonhadora e tímida de outrora afirma a sua verdadeira natureza: uma espantosa capacidade de concentração, a par duma intuição genial. Em menos de dois anos, inventa o método das fluxões (*ou seja o* cálculo infinitesimal), *descobre* a lei da atracção universal, *efectua* a análise e a síntese da luz branca, *em experiências com prismas comprados numa feira, e concebe um novo tipo de telescópio.*

NEWTON *e* LEIBNIZ *(ver Nota seguinte) são hoje considerados os fundadores do cálculo infinitesimal. Seria no entanto erro grave pensar que o cálculo infinitesimal é obra exclusiva de dois homens isolados. É, pelo contrário, o resultado duma longa evolução, que começa na Antiguidade com* EUDOXO *e* ARQUIMEDES *(para não citar outros) e prossegue, na Idade Moderna, com* KEPLER, GALILEU, CAVALIERI, FERMAT, PASCAL, BARROW *e outros mais* (*ver* NOTAS HISTÓRICAS *anteriores*). *Todavia, o novo cálculo só se define claramente como corpo de doutrina, por obra de* NEWTON *e de* LEIBNIZ, *considerados por isso os seus criadores.*

Tem especial interesse observar como se chegou à lei da atracção universal. Um astrónomo dinamarquês, TYCHO BRAHÉ (1546-1601), *tinha registado as suas observações num catálogo de estrelas, que indicava a posição dos planetas no decurso de vários anos. Um seu jovem assistente,* KEPLER (1571-1630), *influenciado pelo pitagorismo, convenceu-se de que tais números encerravam, numa oculta harmonia, a chave do universo; assim, ao termo de 22 anos de cálculos pacientíssimos, descobriu as célebres leis, que têm hoje o seu nome, sobre o movimento dos planetas. Finalmente,* NEWTON, *aplicando o* **cálculo diferencial** (¹) *a estas leis, conclui que* toda a partícula material atrai qualquer outra com uma força directamente proporcional às massas de ambas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa (LEI DA ATRACÇÃO UNIVERSAL). *E, aplicando o* **cálculo integral**, *deduz desta lei o movimento dos planetas e dos seus satélites, a órbita dos cometas, a teoria exacta das marés, etc. — enfim,* todo o sistema de relojoaria *do mundo celeste.*

Um dos êxitos mais clamorosos da teoria de NEWTON *ocorreu um século após a sua morte. Tendo os astrónomos observado que o planeta Urano parecia afastar-se da lei de* NEWTON, *não hesitaram em atribuir esse desvio à atracção exercida por um planeta ainda desconhecido. O matemático francês* LEVERRIER *conseguiu calcular a posição do hipotético planeta segundo a lei de* NEWTON, *e comunicou os resultados ao astrónomo alemão*

(¹) Ver mais adiante, nesta NOTA, **cálculo diferencial e cálculo integral.**

Figura 21: [1], p. 258.

CAPÍTULO VIII — DERIVADAS 259

GALLE. *Logo que recebeu a comunicação,* GALLE, *na noite de 23 de Setembro de 1841, dirigiu o telescópio para o ponto indicado pelos cálculos e ali encontrou, efectivamente, um novo planeta! A este se deu o nome de Neptuno.*

E hoje, que o mundo assiste, empolgado, com emoção crescente, aos progressos inauditos da astronáutica, é presente, mais do que nunca, o génio de NEWTON, *que possibilitou, à distância de séculos, as viagens das naves espaciais, com rotas preestabelecidas, de acordo com a lei da gravitação e por meio do cálculo infinitesimal!*

Mas continuemos o perfil biográfico de ISAAC NEWTON.

Após aquele seu fecundíssimo retiro na aldeia, NEWTON *retomou os estudos e, apenas com 26 anos, por vontade expressa de* BARROW, *sucedeu a este no lugar de professor de matemática. As aulas absorviam-lhe bem pouco tempo, o que lhe permitiu continuar, com afinco, as suas portentosas investigações. Mas só em 1684, a instâncias de seu amigo* HALLEY *(célebre astrónomo, cujo nome foi dado a um cometa), se decidiu a redigir as suas descobertas numa obra monumental,* **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica** *(Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), publicada em 1687. Ora, em 1684, já* LEIBNIZ *tinha publicado uma obra em que expunha a sua invenção do cálculo infinitesimal. (Naquela época, a difusão dos livros e das ideias era muito mais lenta do que hoje). Daqui nasceu, passados anos, uma longa, estéril e azeda discussão, entre os dois grandes matemáticos, sobre a prioridade da descoberta, discussão esta acirrada pelos partidários de um e do outro. Até os espíritos mais elevados são susceptíveis de fraquezas!*

O prestígio de NEWTON *cresceu enormemente, em sua vida e depois da sua morte, chegando a entravar o progresso da matemática em Inglaterra:* NEWTON *era considerado perfeito, inigualável, quase um deus, e os seus compatriotas não admitiam que outros matemáticos, incluindo* LEIBNIZ, *o pudessem ultrapassar em algum ponto.*

Pessoalmente, NEWTON *era humano e modesto. É-lhe atribuída esta frase:* «Se consegui ver mais longe do que outros, foi porque me ergui sobre os ombros de gigantes» (KEPLER, GALILEU, *etc.*). *Mas* NEWTON *foi o gigante que pesou o Sol, a Terra, a Lua e outros planetas. Quando lhe perguntavam como conseguia fazer tão extraordinárias descobertas, respondia:* «Nocte dieque incubando» *(Pensando no assunto noite e dia). Nos períodos de maior actividade, esquecia-se de comer e de dormir, che-*

Figura 22: [1], p. 259.

260 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

gando a adoecer. NEWTON *faleceu aos 85 anos e jaz na Abadia de Westminster, o que representa a mais alta consagração prestada pelo povo inglês a uma figura da sua história.*

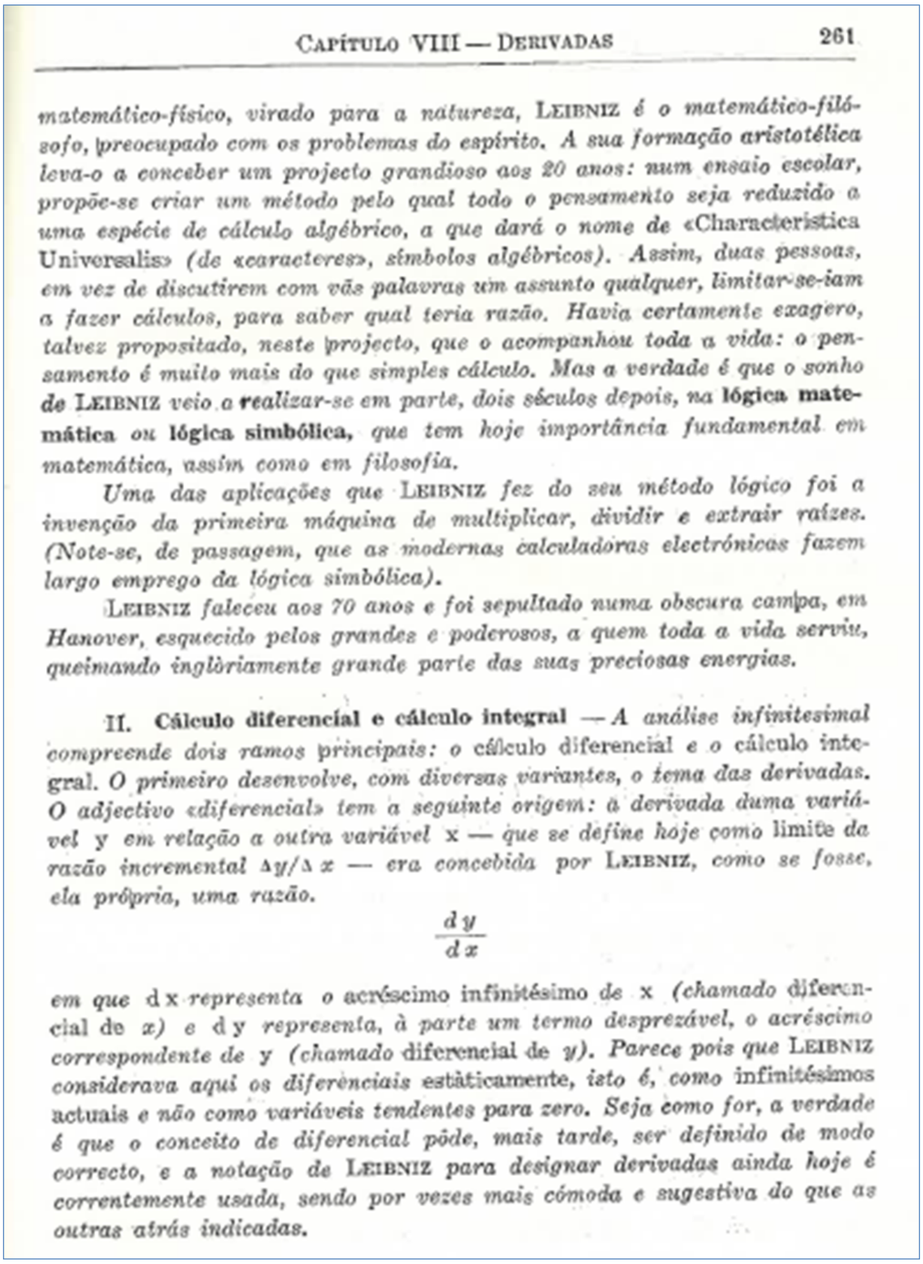
B) GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ *nasceu em Leipzig, Alemanha, a 1 de Junho de 1646. A sua infância decorreu num ambiente de apurada cultura. O pai, professor de moral, morreu ainda novo, deixando-lhe uma boa biblioteca e a paixão dos livros.*

Ingressou aos 15 anos na Universidade de Leipzig, como estudante de Direito. Mas, nas horas vagas, lia com avidez obras filosóficas e científicas, principalmente de KEPLER, GALILEU *e* DESCARTES, *que despertaram nele o entusiasmo pela matemática. Doutorou-se em Direito aos 20 anos e, passado um ano, entrou ao serviço do Eleitor de Mogúncia como diplomata, o que lhe permitiu viajar e relacionar-se com os melhores espíritos da época.*

Em 1672 foi a Paris com a missão de convencer LUÍS XIV *a invadir o Egipto, em vez de atacar a Alemanha. (A resposta, polida, do Rei-Sol, foi lembrar-lhe que já tinha passado o tempo das Cruzadas).* LEIBNIZ *demora-se então quatro anos em Paris, o primeiro centro intelectual daquela época. Ali encontra* HUYGHENS, *célebre físico matemático holandês, autor da teoria do relógio e da teoria ondulatória da luz; dele recebe lições de matemática. Deslumbrado com a potência do método matemático,* LEIBNIZ *acaba, ele próprio, por inventar o cálculo infinitesimal, ignorando o que* NEWTON *tinha escrito, mas não publicado, sobre o mesmo assunto. Daqui as deploráveis controvérsias a que já fizemos referência e que envenenaram tanto a vida de* LEIBNIZ *como a de* NEWTON.

LEIBNIZ *foi um espírito genial, que manifestou a sua potência e originalidade nos mais diversos domínios: matemática, lógica, filosofia, direito, política, religião, história, literatura, etc. Enquanto* NEWTON *é o*

Figura 23: [1], p. 260.



CAPÍTULO VIII — DERIVADAS 261

matemático-físico, virado para a natureza, LEIBNIZ *é o matemático-filósofo, preocupado com os problemas do espírito. A sua formação aristotélica leva-o a conceber um projecto grandioso aos 20 anos: num ensaio escolar, propõe-se criar um método pelo qual todo o pensamento seja reduzido a uma espécie de cálculo algébrico, a que dará o nome de* «Characteristica Universalis» *(de «caracteres», símbolos algébricos). Assim, duas pessoas, em vez de discutirem com vãs palavras um assunto qualquer, limitar-se-iam a fazer cálculos, para saber qual teria razão. Havia certamente exagero, talvez propositado, neste projecto, que o acompanhou toda a vida: o pensamento é muito mais do que simples cálculo. Mas a verdade é que o sonho de* LEIBNIZ *veio a realizar-se em parte, dois séculos depois, na* **lógica matemática** *ou* **lógica simbólica,** *que tem hoje importância fundamental em matemática, assim como em filosofia.*

Uma das aplicações que LEIBNIZ *fez do seu método lógico foi a invenção da primeira máquina de multiplicar, dividir e extrair raízes. (Note-se, de passagem, que as modernas calculadoras electrónicas fazem largo emprego da lógica simbólica).*

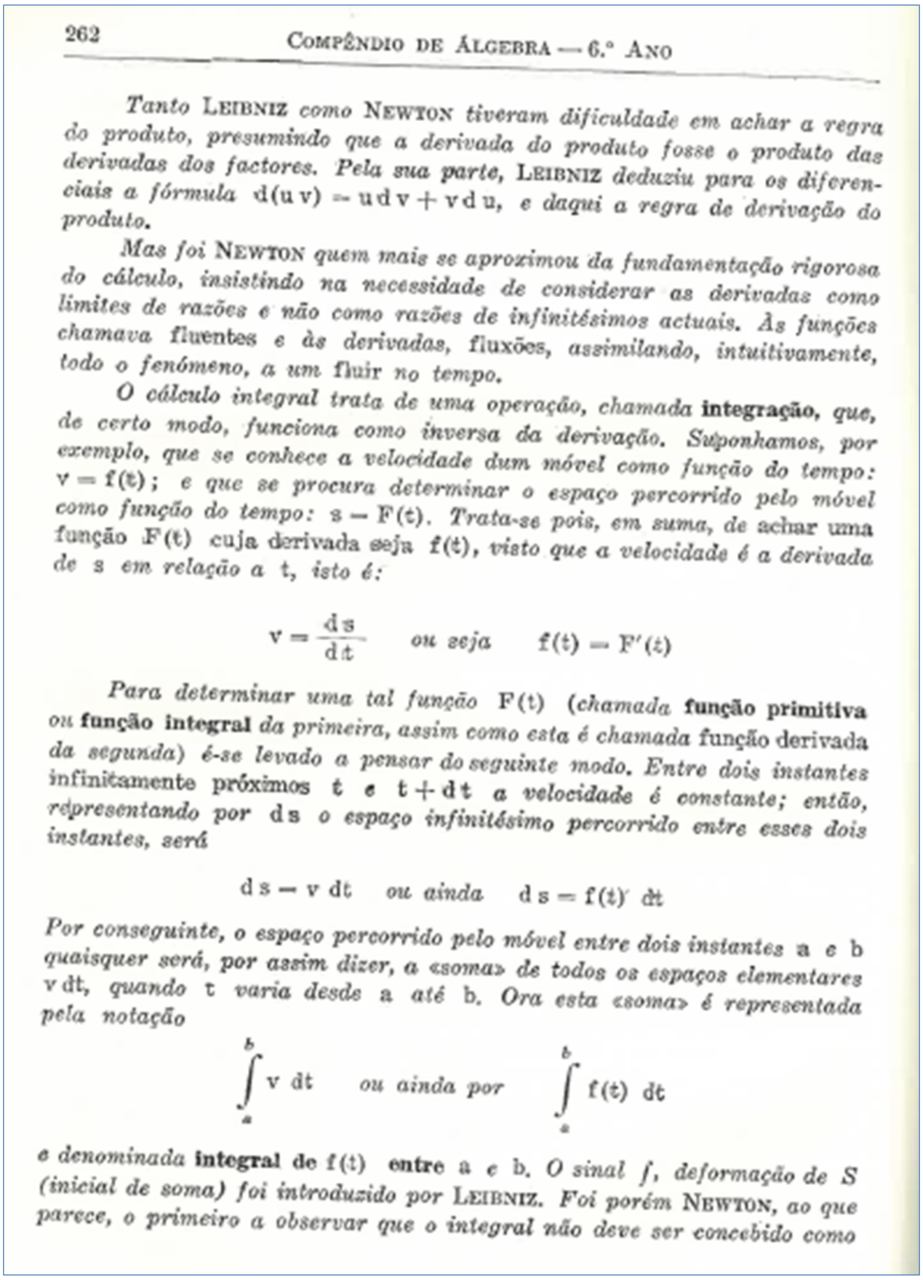
LEIBNIZ *faleceu aos 70 anos e foi sepultado numa obscura campa, em Hanover, esquecido pelos grandes e poderosos, a quem toda a vida serviu, queimando inglòriamente grande parte das suas preciosas energias.*

II. **Cálculo diferencial e cálculo integral** — *A análise infinitesimal compreende dois ramos principais: o* cálculo diferencial *e o* cálculo integral. *O primeiro desenvolve, com diversas variantes, o tema das derivadas. O adjectivo «diferencial» tem a seguinte origem: a derivada duma variável* y *em relação a outra variável* x *— que se define hoje como* limite *da razão incremental* $\Delta y/\Delta x$ *— era concebida por* LEIBNIZ, *como se fosse, ela própria, uma razão.*

$$\frac{dy}{dx}$$

em que d x *representa o* acréscimo infinitésimo *de* x *(chamado* diferencial de x*) e* d y *representa, à parte um termo desprezável, o acréscimo correspondente de* y *(chamado* diferencial de y*). Parece pois que* LEIBNIZ *considerava aqui os diferenciais* estàticamente, *isto é, como* infinitésimos actuais *e não como variáveis tendentes para zero. Seja como for, a verdade é que o conceito de diferencial pôde, mais tarde, ser definido de modo correcto, e a notação de* LEIBNIZ *para designar derivadas ainda hoje é correntemente usada, sendo por vezes mais cómoda e sugestiva do que as outras atrás indicadas.*

Figura 24: [1], p. 261.



262 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

Tanto LEIBNIZ *como* NEWTON *tiveram dificuldade em achar a regra do produto, presumindo que a derivada do produto fosse o produto das derivadas dos factores. Pela sua parte,* LEIBNIZ *deduziu para os diferenciais a fórmula* $d(uv) = u\,dv + v\,du$, *e daqui a regra de derivação do produto.*

Mas foi NEWTON *quem mais se aproximou da fundamentação rigorosa do cálculo, insistindo na necessidade de considerar as derivadas como limites de razões e não como razões de infinitésimos actuais. Às funções chamava* fluentes *e às derivadas,* fluxões, *assimilando, intuitivamente, todo o fenómeno, a um* fluir *no tempo.*

O cálculo integral trata de uma operação, chamada **integração,** *que, de certo modo, funciona como inversa da derivação. Suponhamos, por exemplo, que se conhece a velocidade dum móvel como função do tempo:* $v = f(t)$; *e que se procura determinar o espaço percorrido pelo móvel como função do tempo:* $s = F(t)$. *Trata-se pois, em suma, de achar uma* função $F(t)$ cuja derivada seja $f(t)$, *visto que a velocidade é a derivada de* s *em relação a* t, *isto é:*

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \textit{ou seja} \quad f(t) = F'(t)$$

Para determinar uma tal função $F(t)$ (*chamada* **função primitiva** *ou* **função integral** *da primeira, assim como esta é chamada* função derivada *da segunda) é-se levado a pensar do seguinte modo. Entre dois instantes* infinitamente próximos t *e* $t + dt$ *a velocidade é constante; então, representando por* ds *o espaço infinitésimo percorrido entre esses dois instantes, será*

$$ds = v\,dt \quad \textit{ou ainda} \quad ds = f(t)\,dt$$

Por conseguinte, o espaço percorrido pelo móvel entre dois instantes a *e* b *quaisquer será, por assim dizer, a «soma» de todos os espaços elementares* $v\,dt$, *quando* t *varia desde* a *até* b. *Ora esta «soma» é representada pela notação*

$$\int_a^b v\,dt \quad \textit{ou ainda por} \quad \int_a^b f(t)\,dt$$

e denominada **integral de** $f(t)$ **entre** a *e* b. *O sinal* $\int$, *deformação de S (inicial de soma) foi introduzido por* LEIBNIZ. *Foi porém* NEWTON, *ao que parece, o primeiro a observar que o integral não deve ser concebido como*

Figura 25: [1], p. 262.

CAPÍTULO VIII — DERIVADAS 263

soma duma infinidade de infinitésimos, mas sim como limite *de somas finitas de quantidades que tendem para zero. Mais precisamente, se dividirmos o intervalo* $[a, b]$ *num número finito,* n, *de intervalos de comprimento* Δt *e tomarmos um valor* t_i *em cada um deles, o integral de* $f(t)$ *entre* a *e* b *deverá ser o limite da soma*

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t,$$

quando $\Delta t \to 0$ *(ou seja, quando* $n \to \infty$ *).*

Poderíamos dizer, em resumo, que o cálculo diferencial se aplica à análise *dos fenómenos, enquanto o cálculo integral se refere à* síntese, *isto é, à* reconstituição *dos fenómenos, na sua* integridade.

III. **O paradoxo da seta e o conceito de derivada** — *O paradoxo da seta (ver* NOTAS HISTÓRICAS *do Cap. IV) resolve-se em matemática do seguinte modo: O* estado de movimento *de um corpo num determinado instante traduz-se, não pela mudança de lugar, que seria impossível num só instante, mas sim pela* velocidade *de que está animado o corpo* nesse instante. *A seta só estaria imóvel em cada instante, se a velocidade fosse sempre* nula, *e só então, de facto, é que não haveria movimento.*

Assim, é o conceito de limite, sob as vestes do conceito de derivada, que vem resolver, do ponto de vista matemático, *mais este paradoxo de* ZENÃO.

Figura 26: [1], p. 263.

Agradecimento

Este trabalho foi financiado pela RECI pelo CIDMA-Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e pela FCT-Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito dos projectos UIDB/04106/2020 e UIDP/04106/2020.

Referências

[1] Sebastião e Silva, J. e Silva Paulo, J. D. *Compêndio de Álgebra* (1.º tomo, 6.º ano), Livraria Cruz, Braga, 1968.