

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Jornal das Primeiras

MATEMÁTICAS



QUADRADO



CÍRCULO



TRIÂNGULO
ISÓCELES



RETÂNGULO



HEXÁGONO



ELIPSE



PENTÁGONO

Número 17
Dezembro, 2021



Ludus

Problemas e Desafios

PROBLEMAS DOS NOSSOS AVÓS (15)

Hélder Pinto, Ângelo Silva

Instituto Piaget, RECI & CIDMA - Universidade de Aveiro,

Instituto Piaget

helder.pinto@ipiaget.pt, angelo.silva@ipiaget.pt

Resumo: *Nesta secção do Jornal das Primeiras Matemáticas apresentam-se regularmente alguns problemas de matemática de livros escolares portugueses do passado.*

Palavras-chave: manuais de matemática antigos, problemas de matemática elementar.

Preâmbulo

Os problemas escolares utilizados no ensino da Matemática, em particular no ensino elementar, têm sofrido algumas alterações ao longo dos tempos. Muitas vezes a diferença não está nos conteúdos – pois as matérias básicas como a aritmética e a geometria, de grosso modo, mantêm-se as mesmas – mas sim na forma e no contexto com que estes problemas são apresentados.

Nesta secção do *Jornal das Primeiras Matemáticas* apresentaremos regularmente alguns problemas de matemática que foram publicados em livros escolares portugueses do passado. Contaremos com a colaboração dos nossos leitores, que poderão fazer-nos chegar cópias de problemas antigos que considerem interessantes através do e-mail hbpinto1981@gmail.com.

Gostas de Matemática?...

Neste número apresentamos o livro “Gostas de Matemática?...” da autoria de Maria Natália Almeida d’Eça e de Manuel Veloso Gomes (Figura 1), da responsabilidade da Livraria Avis e execução gráfica da Ambar (ambas da cidade do Porto).



Figura 1: Capa de [1].

Este livro foi publicado pouco depois do 25 de Abril de 1974 (como veremos à frente, esta obra apresenta ainda referências e imagens típicas das antigas colónias portuguesas, bem como símbolos dos novos tempos, como é o caso dos partidos políticos entretanto legalizados) e destinava-se ao 1.º ano do Ciclo preparatório do ensino secundário (atual 5.º ano). Note-se ainda o curioso título desta obra “Gostas de Matemática?...” , que está em linha com outros títulos dos mesmos autores (Figura 2).

Na página introdutória que se segue é possível observar as grandes temáticas, em termos de conteúdo matemático, incluídas neste livro (Figura 3) e que são detalhadas no índice apresentado nas páginas finais desta obra (Figuras 4 e 5).

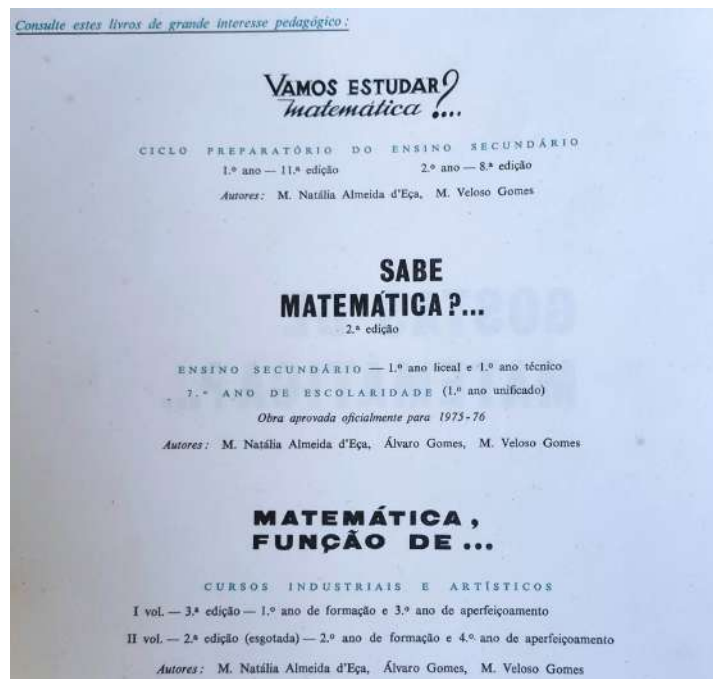


Figura 2: [1], p. 2.

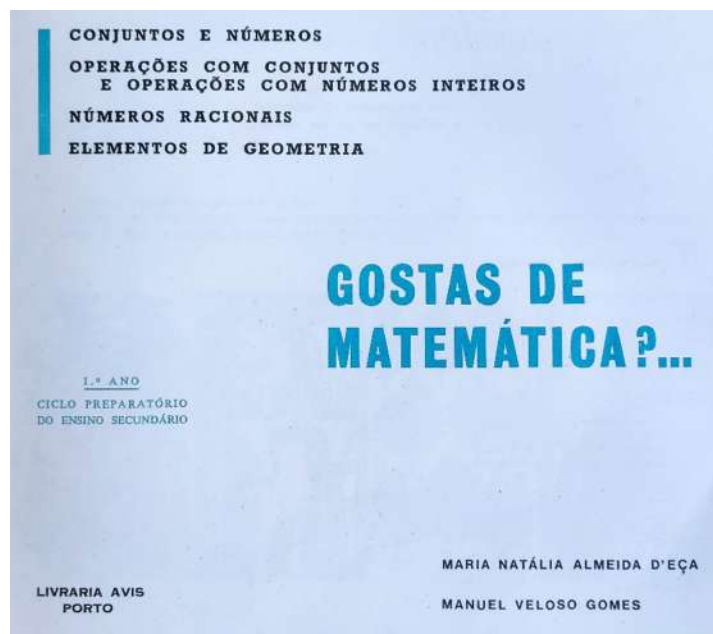


Figura 3: [1], p. 3.

ÍNDICE		
CONJUNTOS E NÚMEROS		
Noção de conjunto e de elemento	5	
Representação de conjuntos	8	
Conjuntos singulares. Conjunto vazio	13	
Relação de pertença	15	
Relação de identidade	16	
Relação de inclusão	18	
Representação de conjuntos e de elementos por meio de letras	21	
Ficha 1 de exercícios	24	
Ficha 2 de exercícios	24	
Ficha 3 de exercícios	24	
Noção de correspondência	25	
Classes de conjuntos com o mesmo cardinal	27	
Relação menor do que... Relação maior do que	29	
Ficha 4 de exercícios	30	
Ficha 5 de exercícios	30	
Número e numeral. Sistema de numeração decimal	31	
Ficha 6 de exercícios	40	
Conjunto dos números naturais. Conjunto dos números inteiros	40	
Ficha 7 de exercícios	42	
Ficha 8 de exercícios	43	
OPERAÇÕES COM CONJUNTOS E OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS		
INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS		
REUNIÃO DE CONJUNTOS 45		
Ficha 8 de exercícios	50	
ADIÇÃO DE NÚMEROS 51		
Soma de dois números	51	
Tabuada da adição	52	
Ficha 9 de exercícios	53	
Propriedades da adição	54	
Ficha 10 de exercícios	56	
Adição sucessiva	57	
Ficha 11 de exercícios	59	
Ficha 12 de exercícios	59	
COMPLEMENTAÇÃO DE CONJUNTOS 60		
SUBTRACÇÃO DE NÚMEROS 61		
Diferença entre dois números	61	
Operação inversa da adição. Equações do tipo $a + x = b$	64	
Ficha 13 de exercícios	65	
Equações dos tipos $x - a = b$ e $a - x = b$	66	
EXPRESSIONES NUMÉRICAS 67		
Ficha 14 de exercícios	68	
Fichas de desenvolvimento	69	
MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS 71		
Tabuada da multiplicação	72	
Propriedades da multiplicação	74	
Multiplicação por 10, 100, 1000	79	
Ficha 15 de exercícios	79	
Ficha 16 de exercícios	79	
Multiplicação sucessiva	80	
EXPRESSIONES NUMÉRICAS 81		
Ficha 17 de exercícios	82	
POTÊNCIA DE UM NÚMERO 83		
Ficha 18 de exercícios	84	
DIVISÃO DE NÚMEROS 85		
Operação inversa da multiplicação	85	
Equações do tipo $a \times x = b$	87	
Casos particulares da divisão	88	
Divisão de um produto por um número	87	
Equações dos tipos $x : a = b$ e $a : x = b$	89	
Ficha 19 de exercícios	90	
Divisão inteira	91	
Classes de restos	92	
Ficha 20 de exercícios	96	
Múltiplo e submúltiplo de um número	97	
EXPRESSIONES NUMÉRICAS 99		
Ficha 21 de exercícios	100	
Fichas de desenvolvimento	101	
NÚMEROS RACIONAIS		
Numerais partitivos	103	
Numerais partitivo-multiplicativos	105	
Resolução de problemas	108	
Ficha 22 de exercícios	109	
Noção de número fracionário	110	
Ficha 23 de exercícios	112	
Fracções equivalentes. Noção de número racional	113	
Fracção decimal. Fracção ordinária	117	
Ficha 24 de exercícios	119	
Ficha 25 de exercícios	120	
Comparação de números racionais	121	
Fichas de desenvolvimento	123	

171

Figura 4: Índice de [1], p.171.

ELEMENTOS DE GEOMETRIA		
Sólidos geométricos	125	
Noção de superfície. Superfície de um sólido geométrico	128	
Noção de linha	131	
Recta. Semi-recta. Segmento de recta	132	
Plano. Semiplano	135	
Ponto interior e ponto exterior em relação a uma linha fechada	136	
Domínios planos convexos e não convexos	137	
Polígonos	138	
Circunferência. Círculo	139	
Linha poligonal inscrita numa curva	140	
Ficha 26 de exercícios	141	
Ficha 27 de exercícios	141	
Ficha 28 de exercícios	141	
Classes de segmentos de recta com o mesmo comprimento	142	
Adição de comprimentos	144	
Medição de comprimentos	145	
Unidades de comprimento do sistema métrico	146	
Comprimento da circunferência	149	
Ficha 29 de exercícios	152	
Ficha 30 de exercícios	152	
Fichas de desenvolvimento	152	
Noção de ângulo	154	
Classes de ângulos com a mesma amplitude	155	
Adição de amplitudes	157	
Divisão de um ângulo	157	
Medição de amplitudes de ângulos	158	
Ficha 31 de exercícios	159	
Ficha 32 de exercícios	159	
Ângulo ao centro	159	
Ângulo interno de um polígono	160	
Classificação dos triângulos	162	
Fichas de desenvolvimento	163	
ALGUMAS SOLUÇÕES 165		
BIBLIOGRAFIA 167		
MATERIAL DIDÁCTICO 169		

Figura 5: Continuação do índice de [1], p. 172.

Desde as primeiras páginas deste livro estão presentes temáticas típicas daquela época como a agricultura, a pecuária e outros ofícios artesanais (Figuras 6 a 9) - embora apareçam alguns pontos de modernidade como, por exemplo, aviões a jato da TAP.



Figura 6: [1], p. 5.

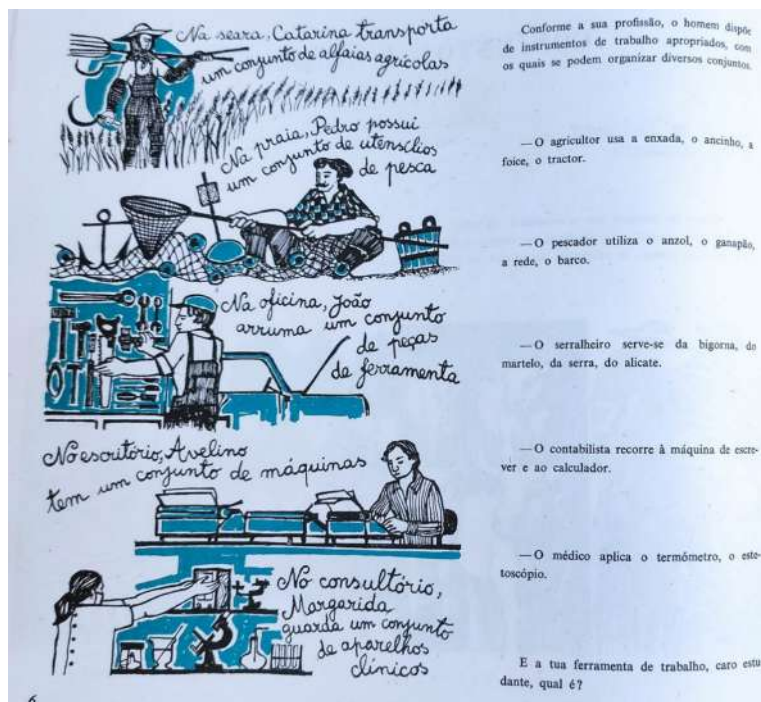


Figura 7: [1], p. 6.

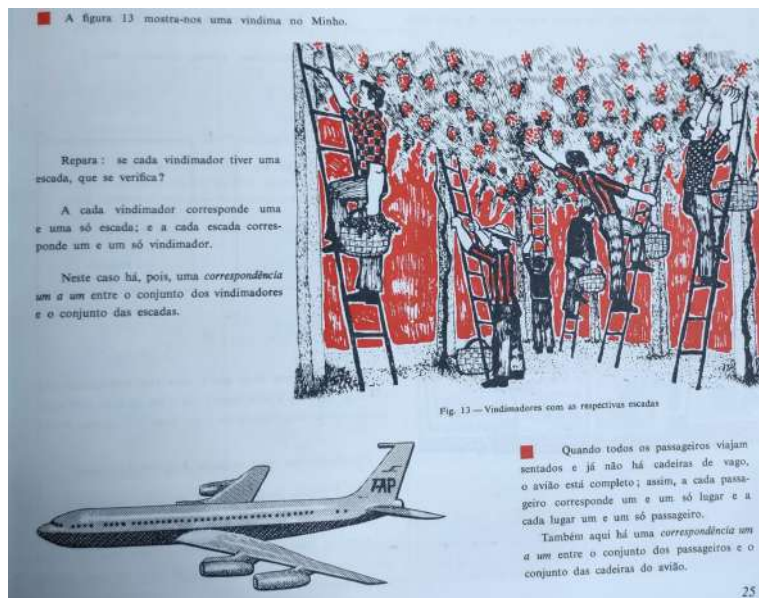


Figura 8: [1], p. 25.

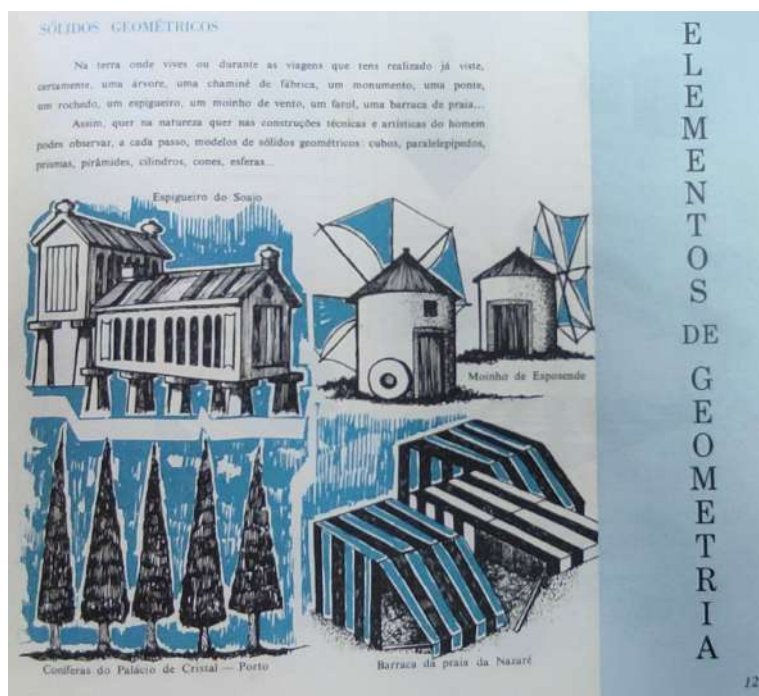


Figura 9: [1], p. 125.

Por outro lado, temos ainda curiosos apontamentos como a presença de símbolos de clubes de futebol e de partidos políticos (Figura 10), que dificilmente encontraríamos nos manuais dos dias de hoje (o “escândalo” que seria na atualidade a ausência da bandeira do Sporting em detrimento da bandeira do Varzim ...)

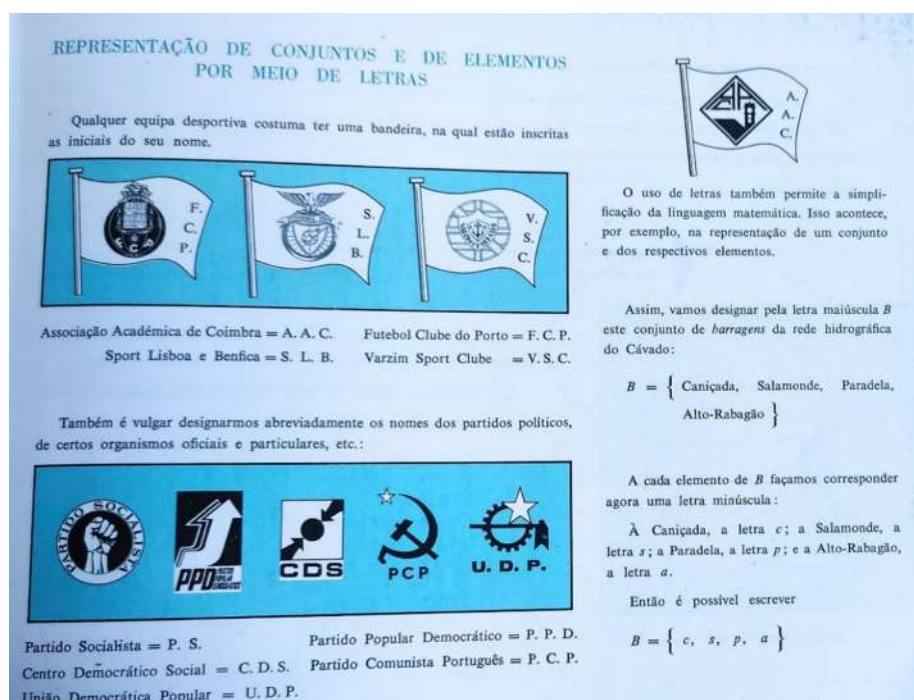


Figura 10: [1], p. 21.

Nesta obra encontram-se ainda vestígios do recém terminado império ultramarino, por exemplo, em mapas e referências a cidades e países africanos (Angola, Moçambique, Guiné-Bissau, Cabo Verde e S. Tomé e Príncipe), bem como na presença de imagens de objetos e animais comuns naquela zona geográfica (Figuras 11 e 12).

Refira-se ainda que são indicados neste livro vários instrumentos para se efetuarem medições reais de comprimentos, em particular, faz-se referência ao Nónio do matemático português Pedro Nunes (Figura 13). Realce-se ainda a indicação de como fazer a “Determinação experimental do valor de π ” e que atualmente poucas vezes se vê efetuada (Figura 14). Para além de Pedro Nunes, são apresentadas neste livro outras notas biográficas (muito breves) de personalidades da História da Matemática (Cantor e Euler), bem como os sistemas de numeração de outros povos (Figuras 15 e 16).

Vamos organizar um conjunto X de países:

$$X = \{ \text{Portugal, Itália, Dinamarca, Rússia, Polónia, Roménia, Argélia, Marrocos} \}$$

Se designarmos Portugal, Itália, Dinamarca, Rússia, Polónia, Roménia, Argélia e Marrocos pelas letras a, b, c, d, e, f, g, h , respectivamente, a representação do conjunto X ficará muito mais simplificada: $X = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$

Quer dizer:

Um conjunto pode ser designado por uma letra maiúscula; e cada um dos seus elementos por uma letra minúscula.

No mapa junto, a situação de algumas cidades angolanas está assinalada por um ponto (fig. 8). Com essas cidades formemos o conjunto C :

$$C = \{ \text{Cabinda, Luanda, Malanje, Gabela, Lobito, Benguela, Huambo, Luso, Moçâmedes} \}$$

Mas agora vamos representar o conjunto C de outro modo:

Traça-se uma linha fechada e, no interior desta, indica-se cada elemento de C por um ponto qualquer (fig. 9).

Esta representação de C toma o nome de *diagrama*.

A cidade de Novo Redondo, por exemplo, não pertence ao conjunto C ; por isso, está indicada por um ponto exterior ao diagrama.






Fig. 8 — Mapa de Angola

Fig. 9

22

Figura 11: [1], p. 22.

CLASSES DE CONJUNTOS COM O MESMO CARDINAL

Com alguns dos seus objectos escolares, Margarida formou os conjuntos A, B, C e D (fig. 16).




Fig. 16

Pedro organizou também diversos conjuntos. Ao verificar que alguns deles se podiam pôr em correspondência um a um com A , ou com B , ou com C , ou com D , separou-os afinal em classes de conjuntos (fig. 17).




Fig. 17

Classe de conjuntos com o mesmo cardinal de A . Classe de conjuntos com o mesmo cardinal de B . Classe de conjuntos com o mesmo cardinal de C . Classe de conjuntos com o mesmo cardinal de D .

27

Figura 12: [1], p. 27.

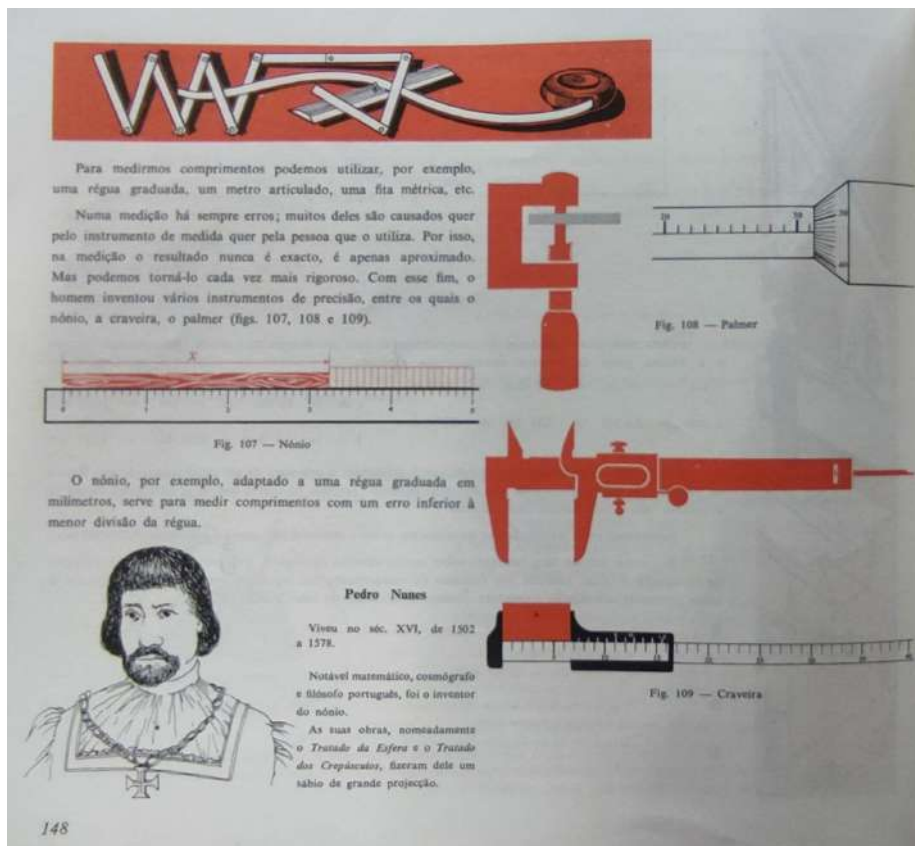


Figura 13: [1], p. 148.



Figura 14: [1], p. 149.


No final desta obra é disponibilizada uma vasta bibliografia para professores e alunos (Figuras 17 e 18), onde se destacam variadíssimas obras em francês (o que já não é habitual atualmente), mas também matemáticos portugueses conhecidos tais como Sebastião e Silva e Bento de Jesus Caraça.

NÚMERO E NUMERAL.
SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL.

A é um conjunto de rios portugueses:

$$A = \{ \text{Minho, Lima, Cávado, Ave, Douro, Vouga, Mondego, Tejo, Sado, Guadiana} \}$$

Pensa noutros conjuntos que se possam pôr em correspondência um a um com A ; qualquer deles tem o mesmo cardinal de A — o número dez — o qual pode ser designado de vários modos. Vejamos alguns deles:



Qualquer nome ou símbolo, oral ou escrito, utilizado para designar um número é um *numeral*.
Através dos tempos, o homem tem-se preocupado em simplificar a representação dos números. Na numeração árabe, por exemplo, há apenas dez símbolos diferentes, os *algarismos*:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Na representação de um número usa-se, conforme os casos, um ou mais algarismos.


Observação: Aqui nenhum dos algarismos está a designar um número; por isso, em rigor, deveríamos escrevê-los entre aspas: «0» «1» «2» «3» «4» «5» «6» «7» «8» «9»

31

Figura 15: [1], p. 31.

Numeração romana

Na antiguidade os pastores representavam por meio de traços o número de ovelhas que possuíam. Por exemplo:



Através dos tempos o homem procurou aperfeiçoar a escrita de números, de tal modo que já na numeração romana a seqüência de riscos dá lugar a símbolos mais simples:

I V X L C D M

No sistema de numeração romana

- a base da contagem é 10;
- os símbolos I, X, C e M podem ser repetidos o máximo três vezes;
- qualquer dos sete símbolos com um traço horizontal por cima representa um número mil vezes maior do que a letra simples;
- não há símbolo para designar o número zero.

Recorda:

I = 1 V = 5 X = 10 L = 50
C = 100 D = 500 M = 1000

Vê como, em numeração romana, se representam as unidades, as dezenas, as centenas e os milhares. Se quisermos escrever, por exemplo, 1976, teremos de combinar os símbolos de cada uma das quatro colunas deste quadro.

1976 = MCMLXXVI

Numeração árabe	milhares	centenas	dezenas	unidades
1 1 1 1	M	C	X	I
2 2 2 2	M M	C C	X X	I I
3 3 3 3	M M M	C C C	X X X	I I I
4 4 4 4	IV	CD	XL	IV
5 5 5 5	V	D	L	V
6 6 6 6	VI	DC	LX	VI
7 7 7 7	VII	DCC	LXX	VII
8 8 8 8	VIII	DCCC	LXXX	VIII
9 9 9 9	IX	CM	XC	IX

37

Figura 16: [1], p. 37.

Obras cuja leitura se aconselha aos professores

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA (e respectivo GUIA) — 1.ª vol., 6.ª ano; 2.ª e 3.ª vol., 7.ª ano — Sebastião e Silva — Texto piloto editado pelo ex. Ministério da Educação Nacional.	MATHÉMATIQUE MODERNE — 1.ª, 2.ª, 3.ª, 5.ª, 6.ª vol. — Fagy — Didier
CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA — Bento de Jesus Casca .	L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE em 6.ª — Renie Polle — Delagrave.
SABE MATEMÁTICA — 2.ª edição — M. Natália Almeida d'Éca, Álvaro Gomes, M. Veloso Gomes — Livraria Avis — Porto.	NOTIONS DE MATHÉMATIQUE MODERNE — Renie Polle — Delagrave.
GRAMÁTICA SIMBÓLICA DO PORTUGUÊS — Oscar Lopes — Edição da Fundação Calouste Gulbenkian.	AIDEZ-LE A COMPRENDRE LES MATHÉMATIQUES MODERNES — Texsler — Société d'Édition d'Enseignement Supérieur.
COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA — 1.ª, 2.ª e 3.ª anos do ensino liceal — Almeida Costa e Osório dos Anjos — Porto Editora.	MATHÉMATIQUE — 4.ª, 5.ª e 6.ª Bredif livre — Wattiaux — Classiques Hachette.
LES BASES DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE MODERNE — Donzéda — Dunod — 1971.	MATHÉMATIQUE — 5.ª e 6.ª Bredif fiches — Wattiaux — Classiques Hachette.
MATHÉMATIQUE TERMINALES C et T ALGÈBRE — Codamine e Vissio — Delagrave.	COMPÊNDIO DE ARITMÉTICA RACIONAL — Jorge Calado — Livraria Cruz.
DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS — I e II vol. — Eugénio Roanes Macias — Ediciones Anaya — 1971.	MATEMÁTICA MODERNA, MATEMÁTICA VIVA — André Revuz — Livros Horizonte.
A MATEMÁTICA MODERNA — Irving Adler — Publicações Europa América.	MATHÉMATIQUE — 5.ª e 6.ª — André Revuz — Fernand Nathan.
MATEMÁTICA E DESENVOLVIMENTO MENTAL — Irving Adler — Editora Cultus.	MATHÉMATIQUE — tome 1, 2 — Bostech, Delande — Weismiel.
INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES MODERNES — Menjillon — Librairie Soubert.	INITIATION À LA MATHÉMATIQUE MODERNE — Fauergie, Briançon — Classiques Hachette.
VAMOS ESTUDAR MATEMÁTICA?... — 1.ª ano, 11.ª edição; 2.ª ano, 8.ª edição — M. Natália Almeida d'Éca, M. Veloso Gomes — Livraria Avis — Porto.	L'UNIVERS MATHÉMATIQUE — I e II vol. — Goergler
	L'APPRENTISSAGE DE LA MATHÉMATIQUE AUJOURD'HUI — Fischer — O. C. D. L.
	MATHÉMATIQUES — 4.ª, 5.ª e 6.ª — Huisman et Itard — Weismiel.

167

Figura 17: [1], p. 167.

CURSO DE MATEMÁTICAS NUEVAS — Kaufmann — Compañía Editorial Continental, S. A.	<i>Algumas obras para a biblioteca dos alunos</i>
ÁLGEBRA MODERNA — Lenin y Rivand — Versão espanhola — Aguilar.	TÓ APRENDE A MEDIR — Verbo Infantil.
MATEMÁTICA, CURSO MODERNO — 1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª vol. — Ovaldo Sangiorgi — Companhia Editora Nacional — São Paulo.	TÓ E AS FORMAS — Verbo Infantil.
TEORIA DOS CONJUNTOS — Seymour Lipschitz — Tradução de Fernando da Silva — Ao Livro Técnico S. A. — Rio de Janeiro.	OS NÚMEROS — Abril Cultural — São Paulo.
COMPRENDRE LA MATHÉMATIQUE MODERNE — Paul Gemari — Marabout Université.	AS FORMAS — Abril Cultural — São Paulo.
MATHÉMATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT ÉLÉMENTAIRE — Wheeler — O. C. D. L.	LES MATHÉMATIQUES MODERNES À L'ÉCOLE PRIMAIRE — Livre de l'élève n.º 1 — Vandriensche e outros — Delachaux.
A MATEMÁTICA MODERNA NO ENSINO PRIMÁRIO — Dienes — Livros Horizonte.	O ZECA JÁ PODE APRENDER ARITMÉTICA — Gattego — Cuisenaire de Portugal.
LOGIQUE ET JEUX LOGIQUES — Dienes, Golding — O. C. D. L.	NÚMEROS E FIGURAS — Adler — Editorial Verbo.
ENSEMBLES, NOMBRES ET PUISSANCES — Dienes, Golding — O. C. D. L.	100 JOGOS GEOMÉTRICOS — Pierre Berloquin — Editorial «O Século».
EXPLORATION DE L'ESPACE ET PRATIQUE DE LA MESURE — Dienes, Golding — O. C. D. L.	100 JOGOS LÓGICOS — Pierre Berloquin — Editorial «O Século».
MATHÉMATIQUES MODERNES I — André Calame — Editions du Griffon — Suiza.	FIGURAS E FIGURONAS — Maria Alberta Meneses .
LA MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA ACTUAL — Puig Adam — Ministerio da Educação Nacional de Espanha.	CONVERSAS COM VERSOS — Maria Alberta Meneses .
AREA DE MATEMÁTICA — Fichas de trabajo 4, 5, 6 e 8 — Educación Santillana.	LET'S DISCOVER MATHEMATICS — Books 1, 2, 3 e 4 — Marsh — Black — London.
TECNOLOGIA EDUCATIVA — 4, 5, 6, 7 e 8 — Educación Santillana.	PENSAR É DIVERTIDO — Kothe — Editora Herder.
A MAGIA DOS NÚMEROS — Paul Karlson — Editora Globo — São Paulo.	MATHÉMATIQUE ET JEUX D'ENFANTS — Nicole Picard — Catterman.
MATHEMATICS: THE LATER PRIMARY YEARS — Nuffield — Cedo — Murray, London.	GRAMMAIRE DES FORMES — Guide théorique — Fiches de Travail — Genthe et Parzyz — O. C. D. L.

Figura 18: [1], p. 168.

É ainda indicada no final deste livro uma vasta panóplia de material (Figura 19) que os autores sugerem que as escolas adquiram dado o seu “interesse pedagógico-didático” (note-se que o último item são “filmes de matemática” em língua francesa).

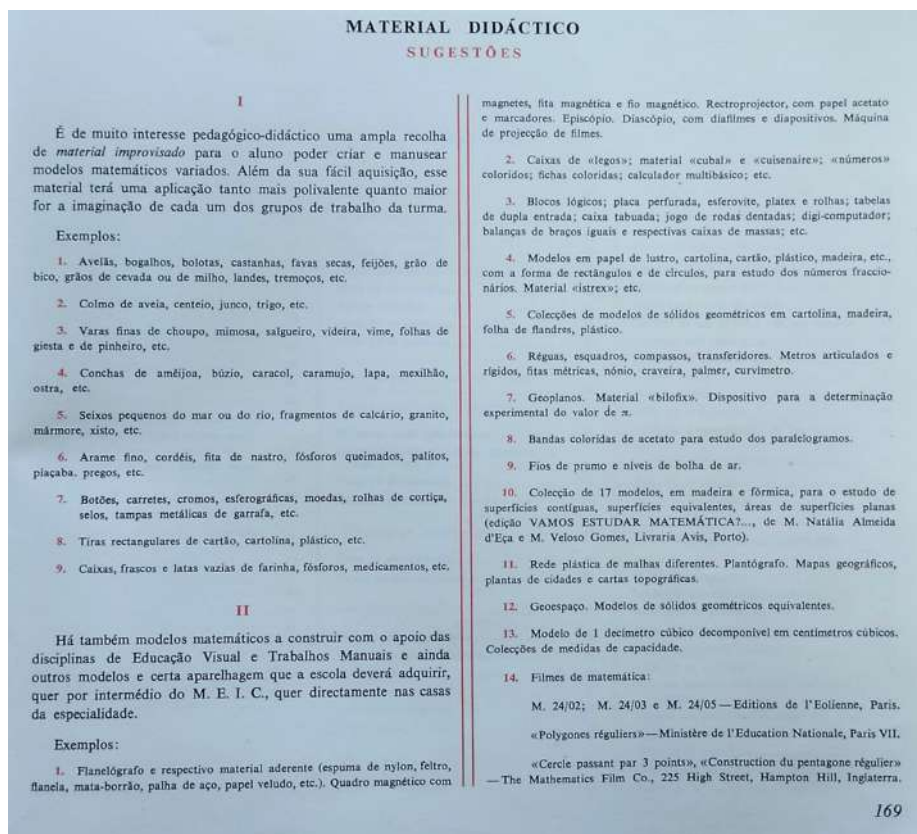


Figura 19: [1], p. 169.

Uma última nota para um curioso exercício recreativo envolvendo animais (Figura 20), bem como para o facto de, naquela altura, ainda termos nove planetas principais em vez dos oito atuais... (Figura 21).

Exercício recreativo

Albino tem um cão, um porco e uma vaca, os quais estão com fome.

Com traços de cores diferentes vais indicar-lhes o caminho para que possam comer o que mais lhes agrada: um osso, uma couve e um molho de palha, respectivamente (fig. 14).

Assim, conseguirás estabelecer uma correspondência um a um entre o conjunto dos animais do Albino e o conjunto dos alimentos que lhes foram destinados.



Figura 20: [1], p. 26.




Fig. 5— Planetas principais do sistema solar

À volta do Sol giram muitos astros; mas vamos representar apenas o conjunto dos planetas principais (fig. 5):

{ Mercúrio, Vénus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Úrano, Neptuno, Plutão }

O Sol é elemento do conjunto dos planetas principais?

E a Lua?..... E o astro onde vivemos?

Figura 21: [1], p. 10.

Agradecimento

Este trabalho foi financiado pelo CIDMA-Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e pela FCT-Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito dos projectos UIDB/04106/2020 e UIDP/04106/2020.

Referências

- [1] d'Eça, Maria Natália de Almeida e Gomes, Manuel Veloso. *Gostas de Matemática?...* (Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, 1.º ano), Livraria Avis, Porto, 1976.