Jornal das Primeiras MATEMÁTICAS

Número 15
Dezembro, 2020

Ludus

PROBLEMAS DOS NOSSOS AVÓS (13)

Hélder Pinto, Ângelo Silva
ESE - Instituto Piaget (V. N. Gaia), RECI & CIDMA - Universidade de Aveiro,
ESE - Instituto Piaget (V. N. Gaia)
hbmpinto1981@gmail.com, angelo.silva@gaia.ipiaget.pt

Resumo: *Nesta secção do Jornal das Primeiras Matemáticas apresentam-se regularmente alguns problemas de matemática de livros escolares portugueses do passado.*

Palavras-chave: manuais de matemática antigos, problemas de matemática elementar.

Preâmbulo

Os problemas escolares utilizados no ensino da Matemática, em particular no ensino elementar, têm sofrido algumas alterações ao longo dos tempos. Muitas vezes a diferença não está nos conteúdos – pois as matérias básicas como a aritmética e a geometria, de grosso modo, mantém-se as mesmas – mas sim na forma e no contexto com que estes problemas são apresentados.

Nesta secção do *Jornal das Primeiras Matemáticas* apresentaremos regularmente alguns problemas de matemática que foram publicados em livros escolares portugueses do passado. Contaremos com a colaboração dos nossos leitores, que poderão fazer-nos chegar cópias de problemas antigos que considerem interessantes através do e-mail hbmpinto1981@gmail.com.

Matematicas (Bachillerato 1) de M. Guzmán, J. Colera e A. Salvador

Neste número apresentamos a segunda parte do nosso texto publicado no número anterior do JPM [2], onde é analisada a primeira parte do livro Matematicas (Bachillerato 1), publicado em Espanha, no ano de 1987, por M. Guzmán, J. Colera e A. Salvador (Figura 1).

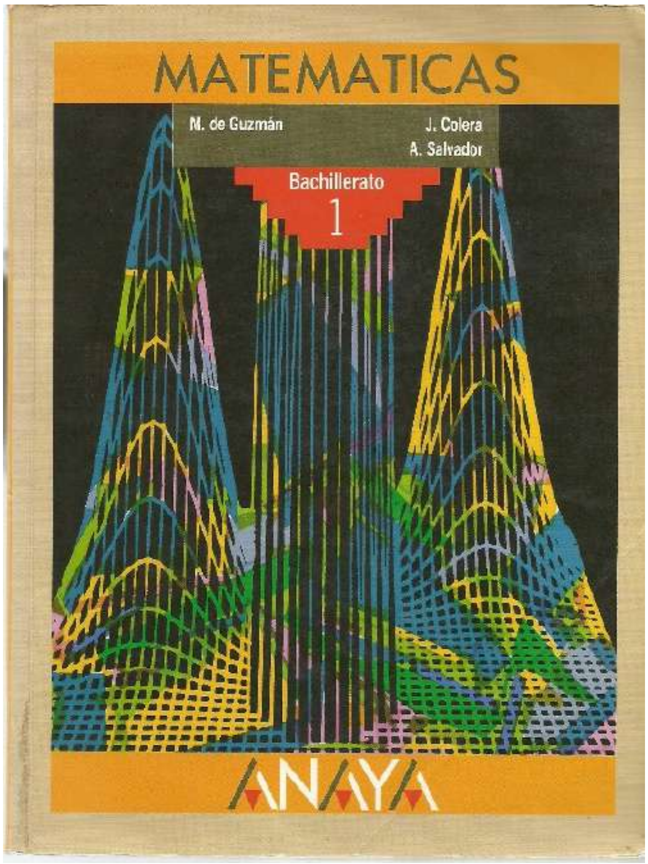


Figura 1: Capa de [1].

No último número fizemos uma breve apresentação de Miguel de Guzmán e deste seu livro que, como já referido nessa altura, está recheado de apontamentos bem reveladores do percurso deste autor: a divulgação e a matemática recreativa, a história da matemática e a matemática como parte da cultura e da sociedade atual. Relembre-se que este livro está repleto de notas históricas e recreativas, opção justificada pelos autores para "motivar, interesar, entretener" os estudantes.

De seguida, apresentamos o índice dos últimos onze capítulos desta obra (Figura 2). Relembre-se que os primeiros dez capítulos deste manual se dedicavam aos seguintes temas: Números (4 capítulos), Algebra (3) e Combinatoria (3).

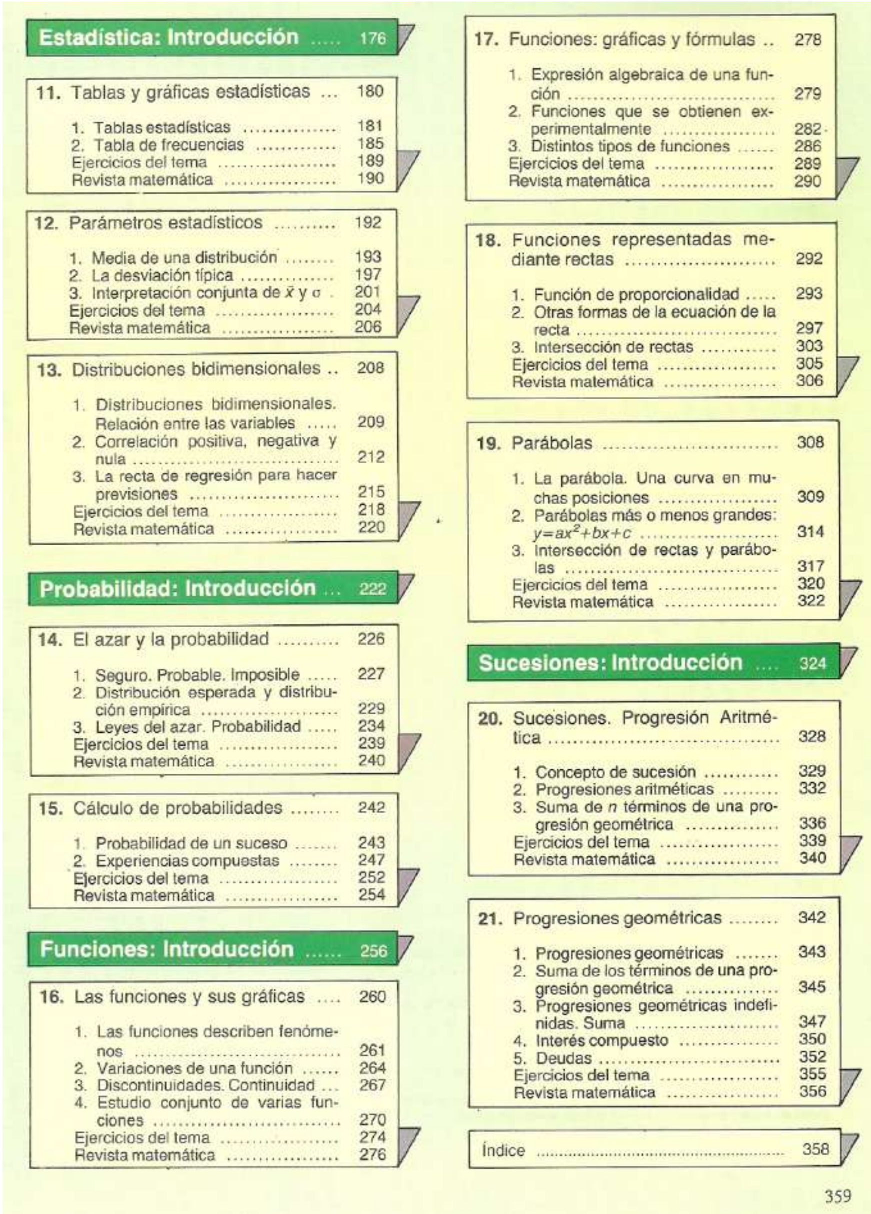


Figura 2: Índice dos últimos onze capítulos de [1], p. 359.

Nas páginas que se seguem, tal como anteriormente, apresentamos as secções de introdução, bem como a seção "Revista Matemática" de cada capítulo. Relembre-se que estas seções são muito interessantes e estão recheadas de apontamentos ricos, rigorosos e variados de história da matemática, de matemática recreativa, bem como de variadíssimas aplicações contemporâneas da matemática atual. De facto, como referimos no número anterior, este manual procura sempre fazer a ponte entre o passado (a origem das temáticas) e o presente (utilizações dessas temáticas na atualidade).

Figura 3: [1], pp. 176-177.

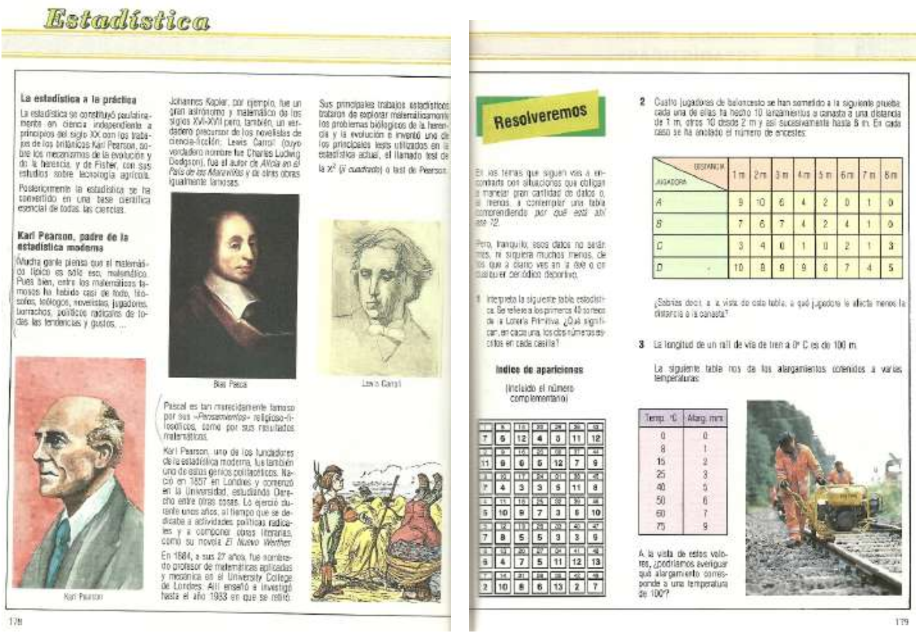


Figura 4: [1], pp. 178-179.

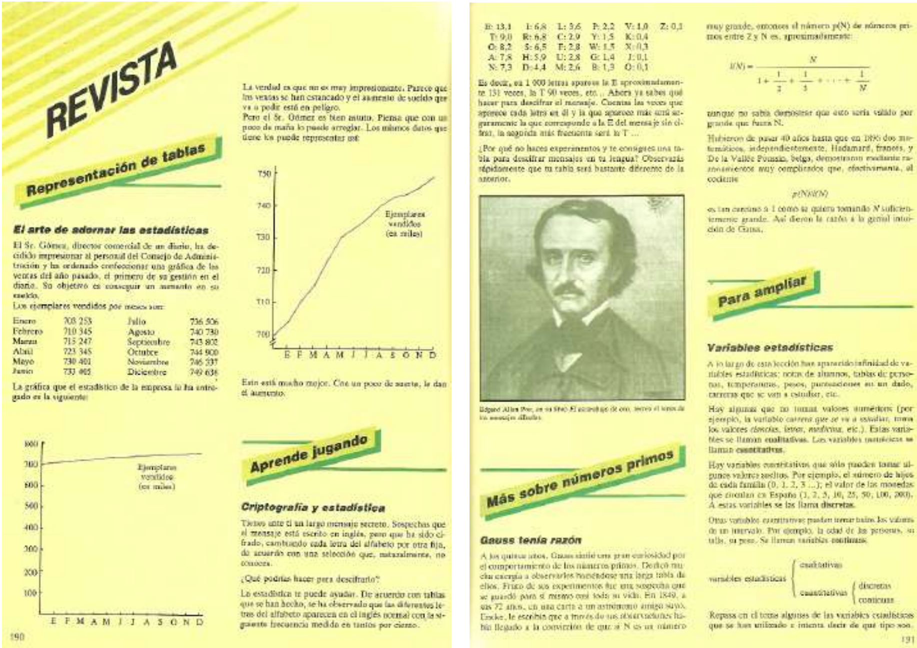
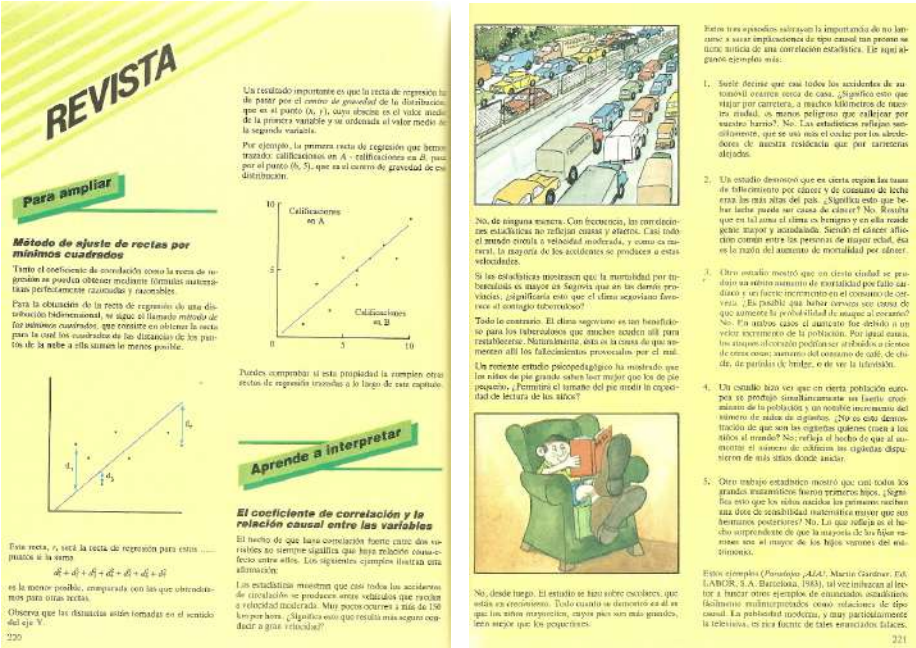


Figura 5: [1], pp. 190-191.

Figura 6: [1], pp. 206-207.


REVISTA

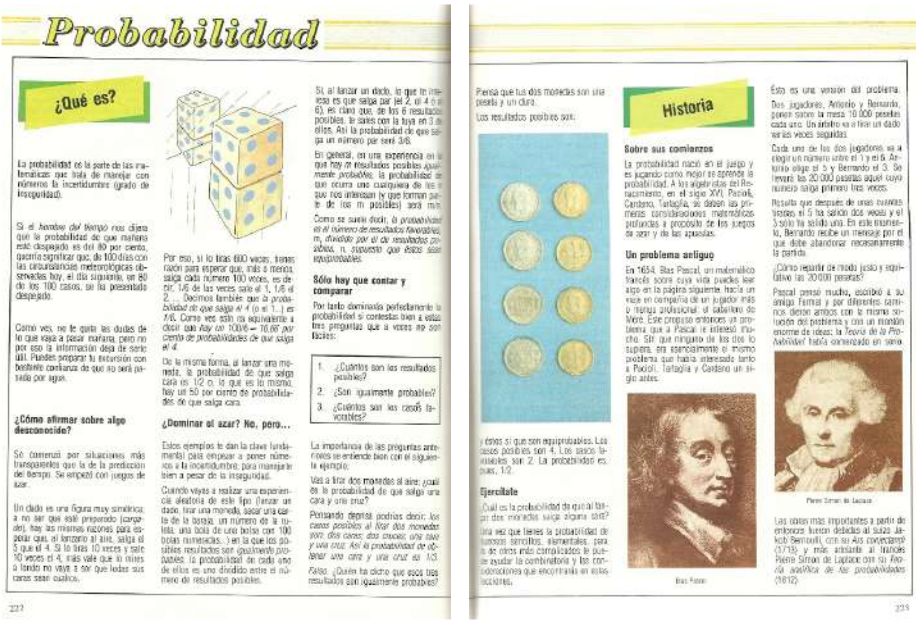
Para ampliar

Método de ajuste de rectas por mínimos cuadrados

Aprende a interpretar

El coeficiente de correlación y la relación causal entre las variables

Figura 7: [1], pp. 220-221.


Probabilidad

¿Qué es?

Historia

Figura 8: [1], pp. 222-223.

Probabilidad

La probabilidad ahora

La teoría, que comenzó como un juego, se ha convertido hoy día en una de las disciplinas matemáticas más profundas y con más aplicaciones en otras ciencias, tanto exactas, como naturales y sociales. En todas las ciencias, la incertidumbre ocupa un papel importante que es necesario cuantificar.

En las ciencias económicas y sociales, es claro que las leyes que se pueden proponer tienen su fundamento en el manejo de gran cantidad de hechos semejantes y en las leyes probabilísticas que los gobiernan.

Pero incluso el conocimiento físico de los últimos elementos constituyentes de la materia es también probabilístico. No se puede decir que un *electrón ocupa este lugar...* sino que *la probabilidad de que el electrón sea detectado en este lugar determinado es ...*

¿Quién fue?

Uno de los grandes genios matemáticos de todos los tiempos fue Blas Pascal (1623-1662), cuyo triángulo combinatorio hemos tenido ocasión de estudiar.

Nació en Clermont (Francia), siendo su padre magistrado. Su madre murió cuando Blas tenía 3 años y desde entonces su padre tomó a su cargo personalmente la educación de sus dos hijos: Jacqueline (dos años menor que Blas y que mostró un talento precoz en el terreno literario) y Blas (que lo hizo en el de las matemáticas).

El genio científico de Pascal es impresionante. Entre otros muchos resultados importantes suyos destacan sus ideas sobre la inducción completa, la invención de los principios del cálculo de probabilidades, su descubrimiento y utilización de los principios del cálculo y la construcción de lo que, probablemente, fue la primera máquina de calcular.

Hacia el año 1646 comenzó a interesarse por la hidrostática, la presión atmosférica y el vacío, yendo, en muchos puntos, más lejos que Torricelli, contemporáneo suyo. Antes de cumplir los 30 años, Pascal había adquirido un gran renombre como matemático y físico.

Sin embargo el nombre de Pascal se ha hecho aún más famoso como filósofo de la religión y como escritor, ocupando así un lugar muy peculiar en la historia del pensamiento. A partir de 1654, después de una honda experiencia religiosa, que él llamó su *noche de fuego*, decidió dedicarse enteramente a una vida de oración y de pensamiento religioso.

Sus obras más importantes en este aspecto son *Las cartas provinciales*, de gran influencia en su tiempo y, sobre todo, los fragmentos hallados después de su muerte de la gran obra que planeaba en forma de *Apología de la religión cristiana*.

Máquina calculadora de Pascal

224

Resolveremos

1 En una empresa hay un 65% de hombres y un 35% de mujeres.

La dirección evalúa que un 20% de sus empleados está capacitado para desempeñar una cierta tarea que exige gran responsabilidad y competencia. Finalmente, deciden que sea una mujer. ¿Qué proporción de sus empleados cumplen ambas condiciones, es decir ser mujer y apto para esa tarea? (Naturalmente la responsabilidad y la competencia son independientes del sexo).

2 Estamos estudiando una nueva variedad de planta tomatera con la que pretendemos conseguir tomates con una cierta característica. Se han analizado ejemplares de sucesivas cosechas y se ha observado la presencia (SI) o ausencia (NO) de la característica buscada.

	1.ª cosecha	2.ª cosecha	3.ª cosecha	4.ª cosecha	5.ª cosecha
SI	99	133	181	246	473
NO	228	278	354	495	907
TOTAL	327	411	535	741	1 380

Calcula la frecuencia relativa con la que aparece la característica buscada acumulando los datos de las sucesivas cosechas.

3 En una baraja española se llaman *figuras* a las cartas *As, Sota, Caballo* y *Rey*. La baraja francesa, que en vez de 40 cartas, tiene 52, las figuras son *As, J, Q* y *K*.

Calcula la probabilidad de sacar figura al extraer una carta en una baraja española y la de obtener figura en una baraja francesa.

4 Un juego: tenemos dos bolsas, cada una con 10 bolas entre blancas B, negras N y rojas R.

bolsa 1: 7 B y 3 N

bolsa 2: 1 B, 2 N y 7 R

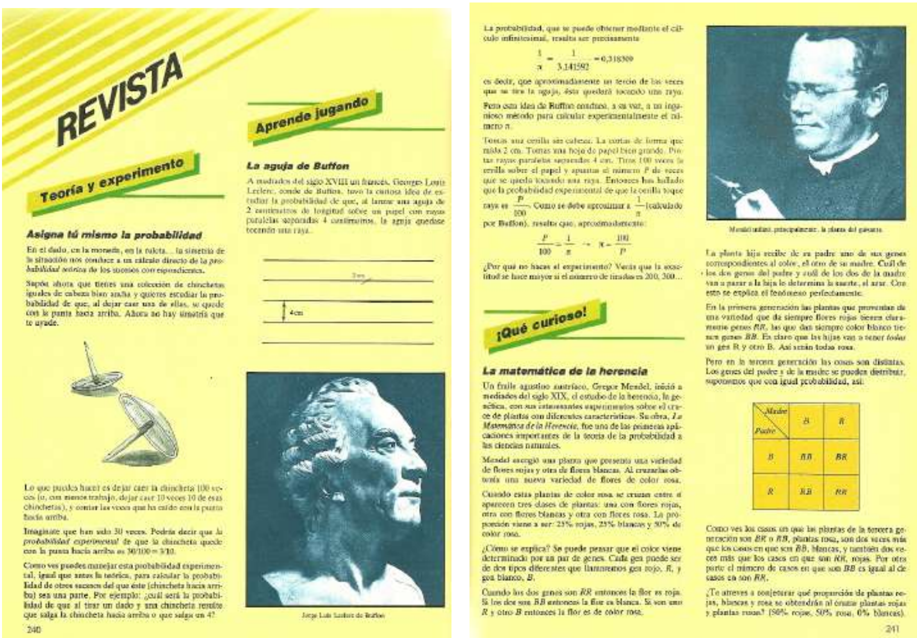
Tiramos un dado. Si sale 1 o 2 extraemos una bola de la bolsa 1. Si sale 3, 4, 5 ó 6, extraemos una bola de la bolsa 2.

Ganamos si al final sale bola roja; si no, perdemos.

¿Qué es más fácil, ganar o perder?

225

Figura 9: [1], pp. 224-225.



REVISTA

Teoría y experimento

Asigna tú mismo la probabilidad

En el dado, en la moneda, en la ruleta... la simetría de la situación nos conduce a un cálculo directo de la *probabilidad teórica* de los sucesos correspondientes.

Supón ahora que tienes una colección de chinchetas iguales de cabeza bien ancha y quieres estudiar la probabilidad de que, al dejar caer una de ellas, se quede con la punta hacia arriba. Ahora no hay simetría que te ayude.

Lo que puedes hacer es dejar caer la chincheta 100 veces (o, con menos trabajo, dejar caer 10 veces 10 de esas chinchetas), y contar las veces que ha caído con la punta hacia arriba.

Imagínate que han sido 30 veces. Podría decir que la *probabilidad experimental* de que la chincheta quede con la punta hacia arriba es 30/100 = 3/10.

Como ves puedes manejar esta probabilidad experimental, igual que antes la teórica, para calcular la probabilidad de otros sucesos del que éste (chincheta hacia arriba) sea una parte. Por ejemplo: ¿cuál será la probabilidad de que al tirar un dado y una chincheta resulte que salga la chincheta hacia arriba o que salga un 4?

240

Aprende jugando

La aguja de Buffon

A mediados del siglo XVIII un francés, Georges Louis Leclerc, conde de Buffon, tuvo la curiosa idea de estudiar la probabilidad de que, al lanzar una aguja de 2 centímetros de longitud sobre un papel con rayas paralelas separadas 4 centímetros, la aguja quedase tocando una raya.

2cm

4cm

Jorge Luis Leclerc de Buffon

La probabilidad, que se puede obtener mediante el cálculo infinitesimal, resulta ser precisamente

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3{,}141592} = 0{,}318309$$

es decir, que aproximadamente un tercio de las veces que se tire la aguja, ésta quedará tocando una raya.

Pero esta idea de Buffon conduce, a su vez, a un ingenioso método para calcular experimentalmente el número π.

Tomas una cerilla sin cabeza. La cortas de forma que mida 2 cm. Tomas una hoja de papel bien grande. Pintas rayas paralelas separadas 4 cm. Tiras 100 veces la cerilla sobre el papel y apuntas el número P de veces que se queda tocando una raya. Entonces has hallado que la probabilidad experimental de que la cerilla toque raya es $\frac{P}{100}$. Como se debe aproximar a $\frac{1}{\pi}$ (calculado por Buffon), resulta que, aproximadamente:

$$\frac{P}{100} \simeq \frac{1}{\pi} \rightarrow \pi \simeq \frac{100}{P}$$

¿Por qué no haces el experimento? Verás que la exactitud se hace mayor si el número de tiradas es 200, 300...

¡Qué curioso!

La matemática de la herencia

Un fraile agustino austríaco, Gregor Mendel, inició a mediados del siglo XIX, el estudio de la herencia, la genética, con sus interesantes experimentos sobre el cruce de plantas con diferentes características. Su obra, *La Matemática de la Herencia*, fue una de las primeras aplicaciones importantes de la teoría de la probabilidad a las ciencias naturales.

Mendel escogió una planta que presenta una variedad de flores rojas y otra de flores blancas. Al cruzarlas obtenía una nueva variedad de flores de color rosa.

Cuando estas plantas de color rosa se cruzan entre sí aparecen tres clases de plantas: una con flores rojas, otra con flores blancas y otra con flores rosa. La proporción viene a ser: 25% rojas, 25% blancas y 50% de color rosa.

¿Cómo se explica? Se puede pensar que el color viene determinado por un par de genes. Cada gen puede ser de dos tipos diferentes que llamaremos gen rojo, *R*, y gen blanco, *B*.

Cuando los dos genes son *RR* entonces la flor es roja. Si los dos son *BB* entonces la flor es blanca. Si son uno *R* y otro *B* entonces la flor es de color rosa.

Mendel utilizó, principalmente, la planta del guisante.

La planta hija recibe de su padre uno de sus genes correspondientes al color, el otro de su madre. Cuál de los dos genes del padre y cuál de los dos de la madre van a pasar a la hija lo determina la suerte, el azar. Con esto se explica el fenómeno perfectamente.

En la primera generación las plantas que provenían de una variedad que da siempre flores rojas tienen claramente genes *RR*, las que dan siempre color blanco tienen genes *BB*. Es claro que las hijas van a tener *todas* un gen R y otro B. Así serán todas rosa.

Pero en la tercera generación las cosas son distintas. Los genes del padre y de la madre se pueden distribuir, supongamos que con igual probabilidad, así:

Padre \ Madre	*B*	*R*
B	*BB*	*BR*
R	*RB*	*RR*

Como ves los casos en que las plantas de la tercera generación son *BR* o *RB*, plantas rosa, son dos veces más que los casos en que son *BB*, blancas, y también dos veces más que los casos en que son *RR*, rojas. Por otra parte el número de casos en que son *BB* es igual al de casos en son *RR*.

¿Te atreves a conjeturar qué proporción de plantas rojas, blancas y rosa se obtendrán al cruzar plantas rojas y plantas rosa? (50% rojas, 50% rosa, 0% blancas).

241

Figura 10: [1], pp. 240-241.

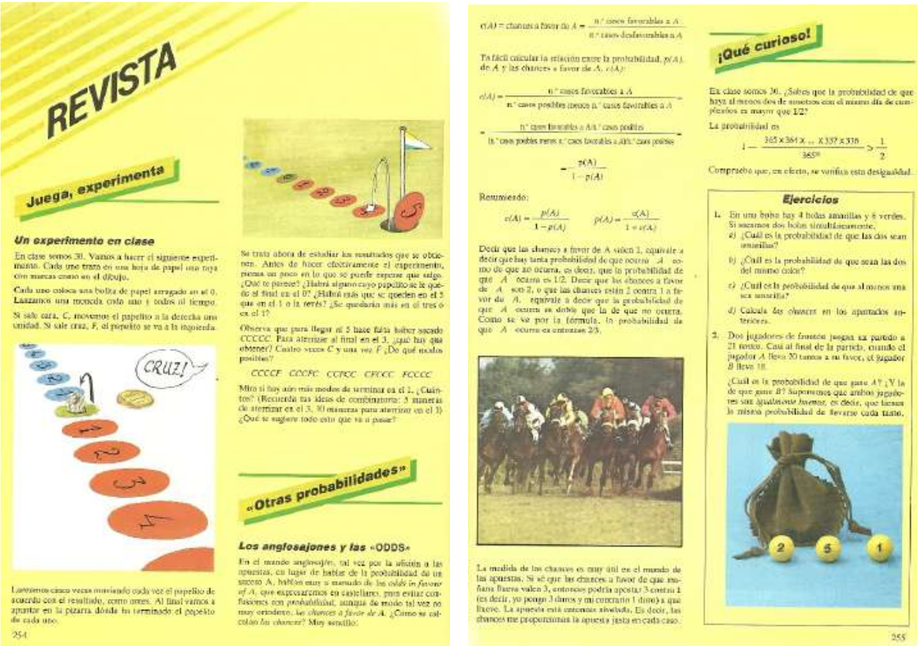


Figura 11: [1], pp. 254-255.

Figura 12: [1], pp. 256-257.

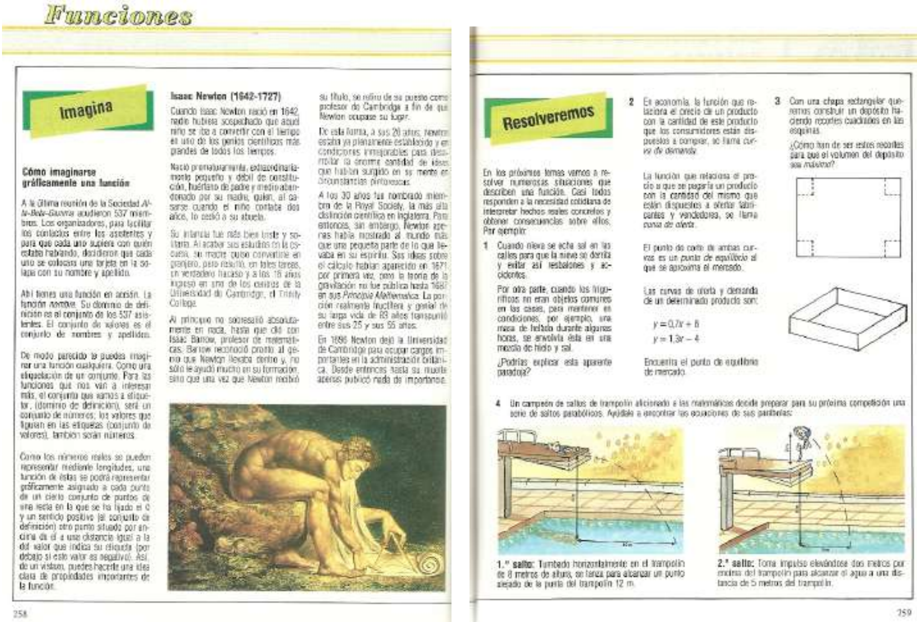


Figura 13: [1], pp. 258-259.

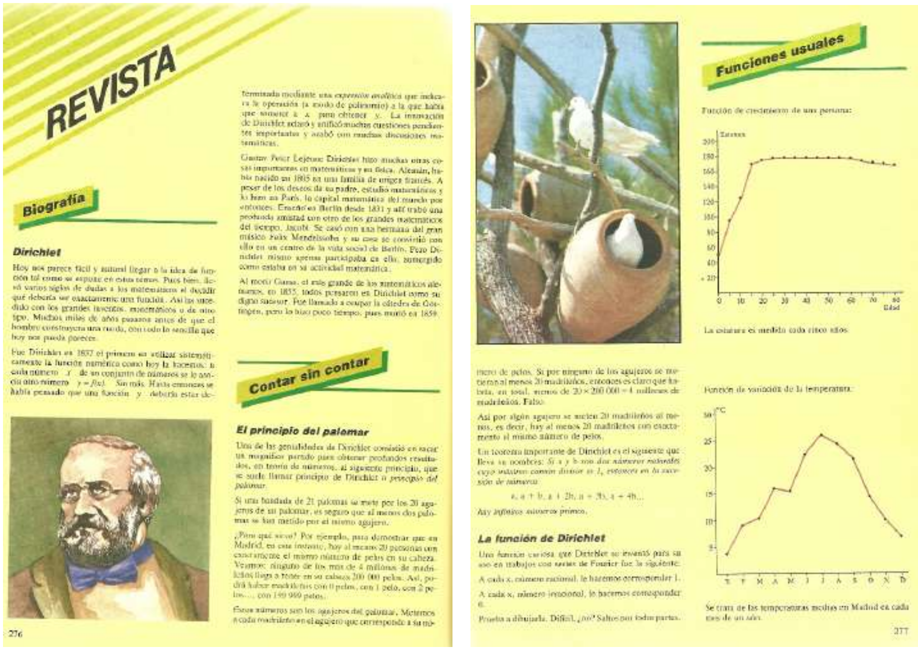


Figura 14: [1], pp. 276-277.

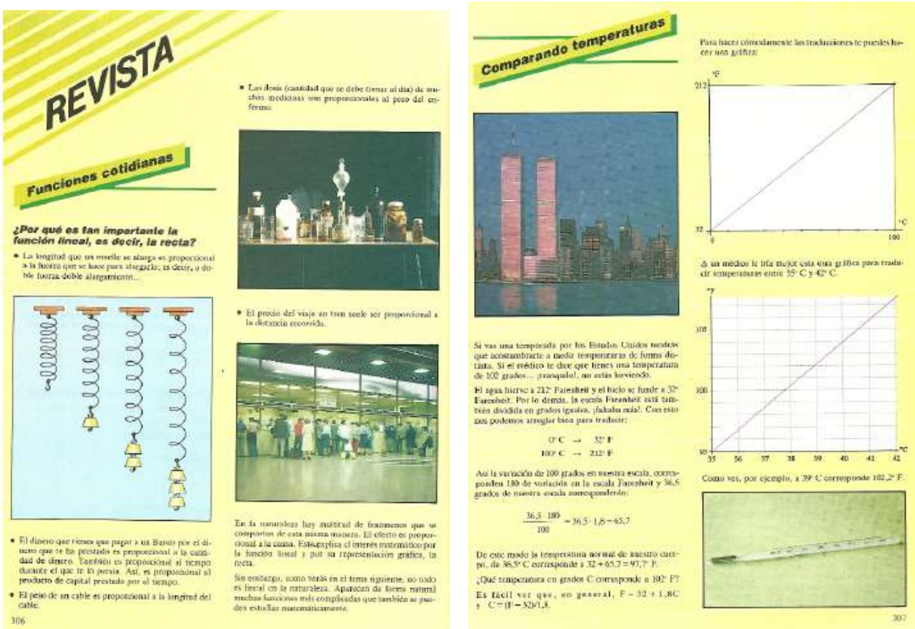


Figura 15: [1], pp. 306-307.

Figura 16: [1], pp. 322-323.

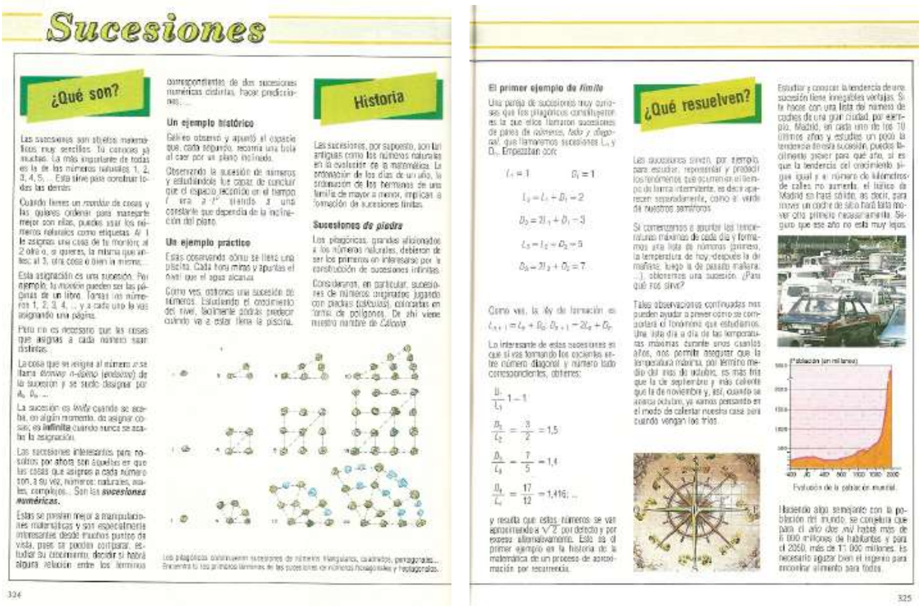


Figura 17: [1], pp. 324-325.

Figura 18: [1], pp. 326-327.

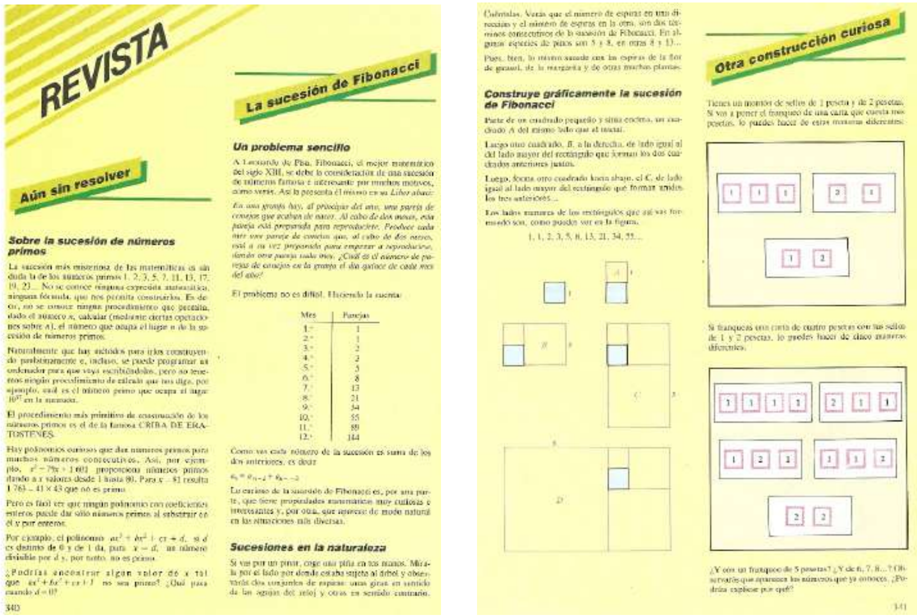


Figura 19: [1], pp. 340-341.

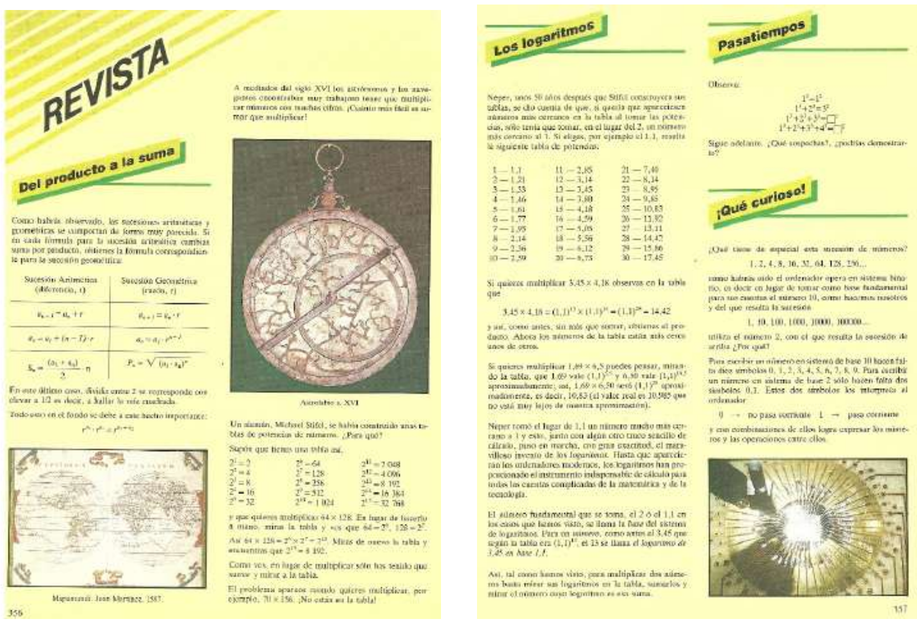


Figura 20: [1], pp. 356-357.

Tal como fizemos no número anterior, terminamos novamente com uma última referência a alguns dos *cartoons* bem-dispostos e humorísticos que ponteiam todo este manual e que, como referimos na altura, tornam este manual muito leve e agradável de se utilizar.

En un centro escolar se practican los siguientes deportes: fútbol, baloncesto, balonmano, gimnasia, atletismo y ajedrez.

Se ha hecho una encuesta entre todos los alumnos de bachillerato en la que se les pregunta: *¿Cuál de estos deportes practicas con más frecuencia?*

Los resultados se presentan en esta tabla:

	1.º curso		2.º curso		3.º curso	
	♂	♀	♂	♀	♂	♀
F	12	0	13	0	8	0
Bc	10	10	9	10	6	14
Bm	3	4	5	2	0	2
G	2	1	1	2	0	2
At	9	5	8	5	8	7
Aj	4	1	4	2	4	0
Ninguno	20	19	10	19	4	10

♂ chicos ♀ chicas

Para leer una tabla estadística como ésta es preciso conocer el significado de cada número escrito en ella.

En este caso, el número de cada casilla engloba tres conceptos: curso, sexo y deporte preferido. Así, el 12 de la primera casilla, significa el número de chicos de primer curso que practican, preferentemente, el fútbol.

Un nadador, durante los seis primeros días de la temporada, se somete al siguiente entrenamiento:

11 largos de piscina el primer día, 14 largos el segundo, 17, 20, 23 y 26 largos respectivamente los días sucesivos.

¿Cuántos largos ha hecho al cabo de los 6 días?

La respuesta es sencilla:

$$11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 = 111$$

Sumar seis sumandos tan sencillitos no ha supuesto ningún problema.

Pero imaginemos que el *sufrido nadador* siguiera, día tras día, aumentando, en 3 largos, su dosis de entrenamiento diario. ¿Cuántos largos habría hecho al cabo de 20 días, 30 días, ... 100 días, ... *n* días?

Vendría bien tener una fórmula cómoda para ahorrarnos esas larguísimas sumas.

AQUILES Y LA TORTUGA

Aquiles es un héroe troyano de la mitología griega.

Para hacerlo invulnerable su madre, recién nacido, lo sumergió en el río Estigio, sujetándolo de un talón, por lo que éste fue el único lugar de su cuerpo en el que se le podía herir.

Además de por esto, Aquiles era famoso por su velocidad corriendo. Por eso el filósofo griego Zenón se valió de él para construir su célebre paradoja:

«Aquiles, que está en A, corre para alcanzar a una tortuga, que está en B. Cuando Aquiles llega a B la tortuga ya ha avanzado hasta C. Cuando Aquiles llega a C, la tortuga ha avanzado de nuevo; y así sucesivamente.

Como siempre que Aquiles llega a donde estaba la tortuga, ésta ya ha avanzado algo, Aquiles nunca la alcanzará —acaba diciendo Zenón.

Como ya sabes, si un banco ofrece unos intereses anuales del 10 %, significa que por cada 100 PTA que depositemos en él, al cabo del año, te pagará 10 pesetas.

Sabiendo esto, ¿qué diferencia fundamental encuentras en los planteamientos de los dos problemas siguientes?

Problema 1

Depositamos 1 000 pesetas durante 5 años en un banco que da unos intereses anuales del 10 %. Cada año vamos a recoger los intereses producidos. ¿En cuánto dinero se han convertido las 1 000 pesetas?

Problema 2

Depositamos 1 000 pesetas en un banco que da unos intereses anuales del 10 %. Al cabo de 5 años vamos a recoger los intereses. ¿En cuánto se han convertido las 1 000 *pesetas*?

Figura 21: [1], pp. 181, 336, 347 e 350 (excertos).

Agradecimento

Este trabalho foi financiado pelo CIDMA-Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e pela FCT-Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito dos projectos UIDB/04106/2020 e UIDP/04106/2020.

Referências

[1] Miguel Guzmán, José Colera, Adela Salvador. *Matematicas (Bachillerato 1)*, Anaya, Barcelona (Espanha), 1987.

[2] Hélder Pinto, Ângelo Silva. "Problemas dos Nossos Avós (12)", *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 14, pp. 5–18, 2020.