# Jornal das Primeiras MATEMÁTICAS


Número 13
Dezembro, 2019

AEME
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR

Ludus

# *Problemas e Desafios*

## PROBLEMAS DOS NOSSOS AVÓS (11)

*Hélder Pinto, Ângelo Silva*
ESE - Instituto Piaget (V. N. Gaia), RECI & CIDMA - Universidade de Aveiro,
ESE - Instituto Piaget (V. N. Gaia)
hbmpinto1981@gmail.com, angelo.silva@gaia.ipiaget.pt

**Resumo:** *Nesta secção do Jornal das Primeiras Matemáticas apresentam-se regularmente alguns problemas de matemática de livros escolares portugueses do passado.*

**Palavras-chave:** manuais de matemática antigos, problemas de matemática elementar.

## Preâmbulo

Os problemas escolares utilizados no ensino da Matemática, em particular no ensino elementar, têm sofrido algumas alterações ao longo dos tempos. Muitas vezes a diferença não está nos conteúdos – pois as matérias básicas como a aritmética e a geometria, de grosso modo, mantêm-se as mesmas – mas sim na forma e no contexto com que estes problemas são apresentados.

Nesta secção do *Jornal das Primeiras Matemáticas* apresentaremos regularmente alguns problemas de matemática que foram publicados em livros escolares portugueses do passado. Contaremos com a colaboração dos nossos leitores, que poderão fazer-nos chegar cópias de problemas antigos que considerem interessantes através do e-mail hbmpinto1981@gmail.com.

## Matemática Curso Moderno de Osvaldo Sangiorgi

Desta vez trazemos um livro publicado no Brasil em 1971 por Osvaldo Sangiorgi (Figura 1). O exemplar apresentado é uma 16.ª sexta edição, revista e ampliada, de uma obra que foi premiada com o "Prêmio Jabuti (1963) em Ciências Exatas, outorgado pela Câmara Brasileira do Livro".

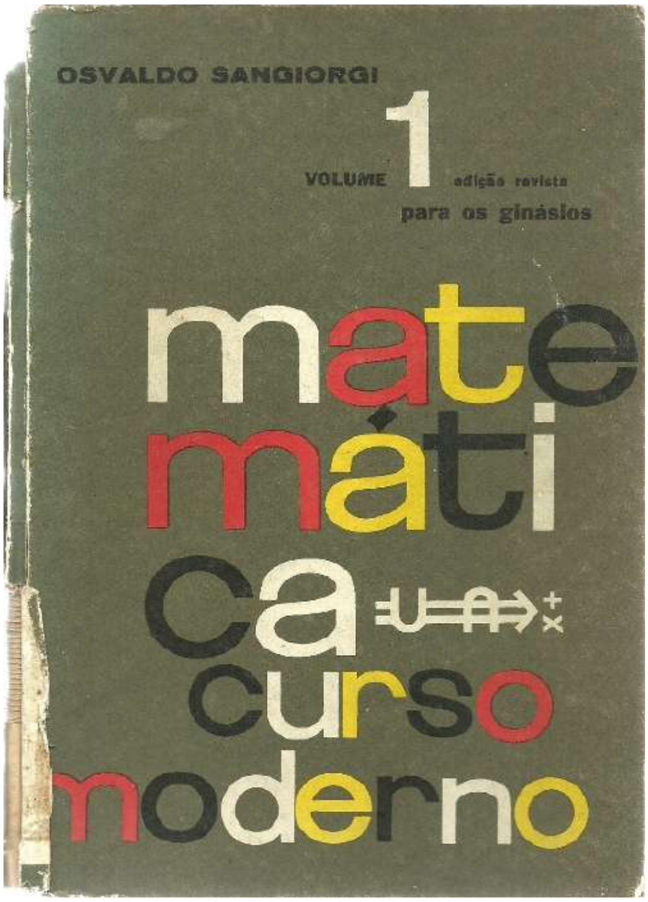



Figura 1: Capa de [1].

O autor fornece nas primeiras páginas o "Programa para um Curso Moderno de Matemática (para os cursos ginasiais)" (Figura 2), bem como uma muito interessante dedicatória aos estudantes que irão utilizar o livro (Figura 3), onde se termina com o incitamento: "Vamos, pois, estudar Matemática com prazer!". Nesta parte faz-se ainda apologia aos computadores de primeira geração, que funcionavam por meio de circuitos e válvulas eletrónicas, bem como a "semelhança" que a Matemática Moderna tem com as outras disciplinas do currículo.

PROGRAMA

*para um*

CURSO MODERNO

*de*

MATEMÁTICA

(*Para os cursos ginasiais*)*

Os seguintes assuntos, para serem desenvolvidos na Primeira Série dos Ginásios, são distribuídos nos seguintes itens:

1. noções de conjunto; operações com conjuntos; relações;
2. número natural; numerais de um número — sistemas de numeração — bases;
3. operações (operações inversas) com os números naturais — propriedades estruturais;
4. divisibilidade — múltiplos e divisores; números primos; fatoração completa;
5. conjunto dos números racionais; números fracionários — operações (operações inversas); propriedades estruturais;
6. estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais — sistemas de medidas: decimal e não-decimais.

Tais itens, explicados neste Volume 1, fazem parte da programação dos *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios*, ratificados no 5.º Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, promovido pelo GEEM de São Paulo (janeiro de 1966, São José dos Campos — SP), bem como seguem as sugestões para o *Desenvolvimento da Matemática para a Primeira Série Ginasial*, publicadas pelo Departamento de Educação do Estado de São Paulo (D. O. de 19-1-65) e, de um modo geral, atendem às *Recomendações sôbre Currículos para o Ensino Médio* da Segunda Conferência Interamericana de Educação Matemática (dezembro de 1966, Lima, Peru).

(*) Designação genérica do 1.º ciclo dos cursos médios, compreendendo os Ginásios, os Ginásios Modernos, os Ginásios Experimentais, os Ginásios Vocacionais, os Ginásios Industriais, os Ginásios Comerciais e os Ginásios Pluricurriculares.

Figura 2: Programa para um Curso Moderno de Matemática.

**Uma palavra para você que inicia o ginásio . . .**


*Meu caro estudante:*

Você, provàvelmente, já foi iniciado no estudo da *Matemática* de um modo diferente daquele pelo qual seus irmãos e colegas mais velhos estudaram.

Sabe por quê?

Porque *Matemática*, para êles, na maioria das vêzes, era um "exagêro de cálculos", "problemas complicados, trabalhosos e fora da realidade" que a tornavam, quase sempre, um *fantasma!*

Hoje, na Era Atômica em que vivemos, isto é trabalho para as máquinas (os fabulosos computadores electrônicos de que tanto falam os jornais . . .), razão pela qual você vai aproveitar o seu precioso tempo aprendendo o verdadeiro *significado* e as belas *estruturas* da *Matemática Moderna*. Então, você perceberá, por exemplo, uma certa *semelhança* entre o modo de raciocinar em *Matemática* e nas outras matérias de seus estudos, como Português, História, Geografia, Ciências, Música, Educação Física, etc.

Fazer conhecer *Matemática* dessa forma é o principal objetivo dêste livro em que você vai começar a estudar e que se completará com o auxílio indispensável de seu professor.

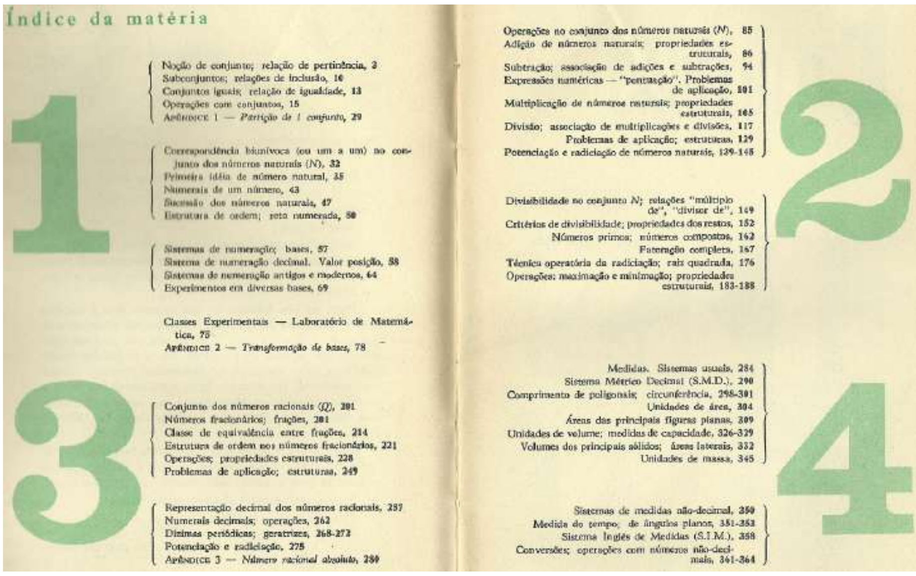
Vamos, pois, estudar *Matemática* com prazer!

Felicidades e até o próximo ano.

OSVALDO SANGIORGI

Figura 3: Prefácio do autor.

De seguida apresenta-se o índice da matéria onde merece destaque, por exemplo, as "Classes Experimentais – Laboratório de Matemática" (Figura 4).

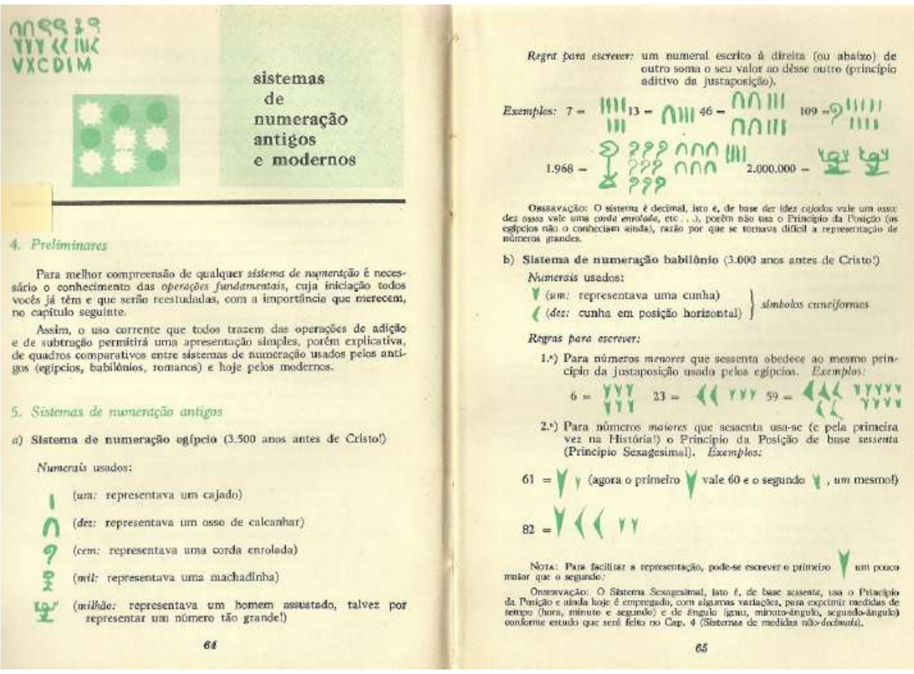


Índice da matéria



Figura 4: Índice da matéria.

Nas páginas que se seguem apresentamos a última subseção do Capítulo 1 onde se apresentam diferentes sistemas de numeração antigos e modernos (Figura 5-13). Realce-se a apresentação de diferentes sistemas de numeração utilizadas ao longo da História da Matemática (egípcios, babilónios e romanos) bem como da base 2 (sistema de numeração binária) utilizada internamente pelos computadores ("Sistemas de numeração modernos" que utilizam a "lâmpada acesa" e a "lâmpada apagada"). Apresenta-se ainda a secção dedicada ao "Laboratório de Matemática".



sistemas de numeração antigos e modernos

4. *Preliminares*

Para melhor compreensão de qualquer *sistema de numeração* é necessário o conhecimento das *operações fundamentais*, cuja iniciação todos vocês já têm e que serão reestudadas, com a importância que merecem, no capítulo seguinte.

Assim, o uso corrente que todos trazem das operações de adição e de subtração permitirá uma apresentação simples, porém explicativa, de quadros comparativos entre sistemas de numeração usados pelos antigos (egípcios, babilônios, romanos) e hoje pelos modernos.

5. *Sistemas de numeração antigos*

*a*) **Sistema de numeração egípcio** (3.500 anos antes de Cristo!)

*Numerais* usados:

(*um:* representava um cajado)

(*dez:* representava um osso de calcanhar)

(*cem:* representava uma corda enrolada)

(*mil:* representava uma machadinha)

(*milhão:* representava um homem assustado, talvez por representar um número tão grande!)

64

*Regra para escrever:* um numeral escrito à direita (ou abaixo) de outro soma o seu valor ao dêsse outro (princípio aditivo da justaposição).

*Exemplos:* 7 = 13 = 46 = 109 =

1.968 = 2.000.000 =

OBSERVAÇÃO: O sistema é decimal, isto é, de base dez (dez cajados vale um osso; dez ossos vale uma corda *enrolada*, etc...), porém não usa o Princípio da Posição (os egípcios não o conheciam ainda), razão por que se tornava difícil a representação de números grandes.

b) **Sistema de numeração babilônio** (3.000 anos antes de Cristo!)

*Numerais* usados:

(*um:* representava uma cunha)
(*dez:* cunha em posição horizontal) } *símbolos cuneiformes*

*Regras para escrever:*

1.ª) Para números *menores* que sessenta obedece ao mesmo princípio da justaposição usado pelos egípcios. *Exemplos:*

6 = 23 = 59 =

2.ª) Para números *maiores* que sessenta usa-se (e pela primeira vez na História!) o Princípio da Posição de base *sessenta* (Princípio Sexagesimal). *Exemplos:*

61 = (agora o primeiro vale 60 e o segundo , um mesmo!)

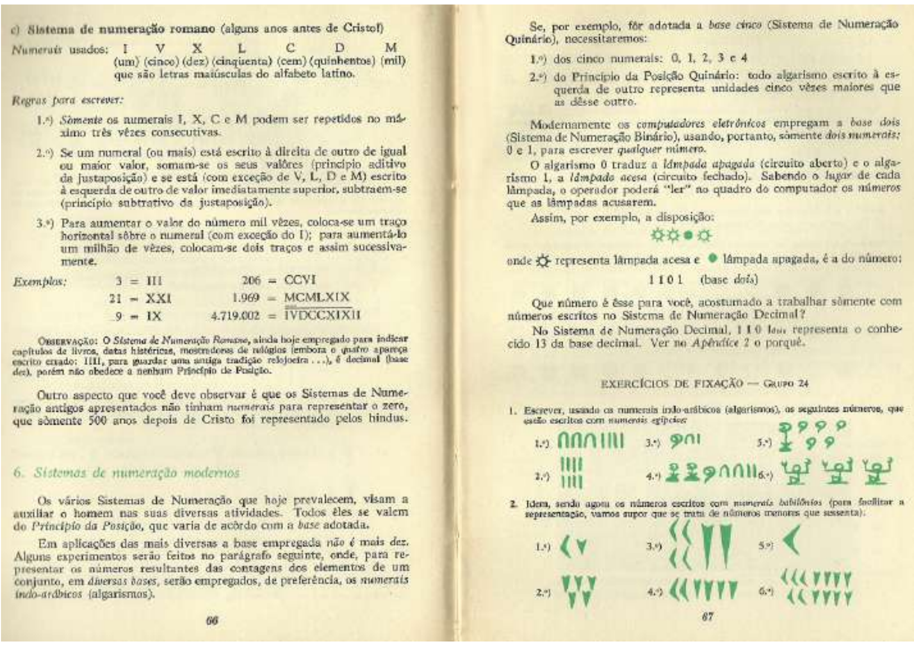
82 =

NOTA: Para facilitar a representação, pode-se escrever o primeiro um pouco maior que o segundo.

OBSERVAÇÃO: O Sistema Sexagesimal, isto é, de base *sessenta*, usa o Princípio da Posição e ainda hoje é empregado, com algumas variações, para exprimir medidas de tempo (hora, minuto e segundo) e de ângulo (grau, minuto-ângulo, segundo-ângulo) conforme estudo que será feito no Cap. 4 (Sistemas de medidas *não-decimais*).

65

Figura 5: [1], pp. 64-65.



c) **Sistema de numeração romano** (alguns anos antes de Cristo!)

*Numerais* usados: I V X L C D M
(um) (cinco) (dez) (cinquenta) (cem) (quinhentos) (mil)
que são letras maiúsculas do alfabeto latino.

*Regras para escrever:*

1.ª) *Sòmente* os numerais I, X, C e M podem ser repetidos no máximo três vêzes consecutivas.

2.ª) Se um numeral (ou mais) está escrito à direita de outro de igual ou maior valor, somam-se os seus valôres (princípio aditivo da justaposição) e se está (com exceção de V, L, D e M) escrito à esquerda de outro de valor imediatamente superior, subtraem-se (princípio subtrativo da justaposição).

3.ª) Para aumentar o valor do número mil vêzes, coloca-se um traço horizontal sôbre o numeral (com exceção do I); para aumentá-lo um milhão de vêzes, colocam-se dois traços e assim sucessivamente.

*Exemplos:* 3 = III, 206 = CCVI, 21 = XXI, 1.969 = MCMLXIX, 9 = IX, 4.719.002 = $\overline{\overline{\mathrm{IV}}}\overline{\mathrm{DCCXIX}}\mathrm{II}$

OBSERVAÇÃO: O *Sistema de Numeração Romano*, ainda hoje empregado para indicar capítulos de livros, datas históricas, mostradores de relógios (embora o *quatro* apareça escrito errado: IIII, para guardar uma antiga tradição relojoeira ...), é decimal (base dez), porém não obedece a nenhum Princípio de Posição.

Outro aspecto que você deve observar é que os Sistemas de Numeração antigos apresentados não tinham *numerais* para representar o zero, que sòmente 500 anos depois de Cristo foi representado pelos hindus.

6. *Sistemas de numeração modernos*

Os vários Sistemas de Numeração que hoje prevalecem, visam a auxiliar o homem nas suas diversas atividades. Todos êles se valem do *Princípio da Posição*, que varia de acôrdo com a *base* adotada.

Em aplicações das mais diversas a base empregada *não é* mais dez. Alguns experimentos serão feitos no parágrafo seguinte, onde, para representar os números resultantes das contagens dos elementos de um conjunto, em *diversas bases*, serão empregados, de preferência, os *numerais indo-arábicos* (algarismos).

66

Se, por exemplo, fôr adotada a *base cinco* (Sistema de Numeração Quinário), necessitaremos:

1.º) dos cinco numerais: 0, 1, 2, 3 e 4

2.º) do Princípio da Posição Quinário: todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades cinco vêzes maiores que as dêsse outro.

Modernamente os *computadores eletrônicos* empregam a *base dois* (Sistema de Numeração Binário), usando, portanto, sòmente *dois numerais:* 0 e 1, para escrever *qualquer número*.

O algarismo 0 traduz a *lâmpada apagada* (circuito aberto) e o algarismo 1, a *lâmpada acesa* (circuito fechado). Sabendo o *lugar* de cada lâmpada, o operador poderá "ler" no quadro do computador os *números* que as lâmpadas acusarem.

Assim, por exemplo, a disposição:

onde representa lâmpada acesa e lâmpada apagada, é a do número:

1 1 0 1 (base *dois*)

Que número é êsse para você, acostumado a trabalhar sòmente com números escritos no Sistema de Numeração Decimal?

No Sistema de Numeração Decimal, 1 1 0 1 representa o conhecido 13 da base decimal. Ver no *Apêndice 2* o porquê.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 24

1. Escrever, usando os numerais indo-arábicos (algarismos), os seguintes números, que estão escritos com *numerais egípcios*:

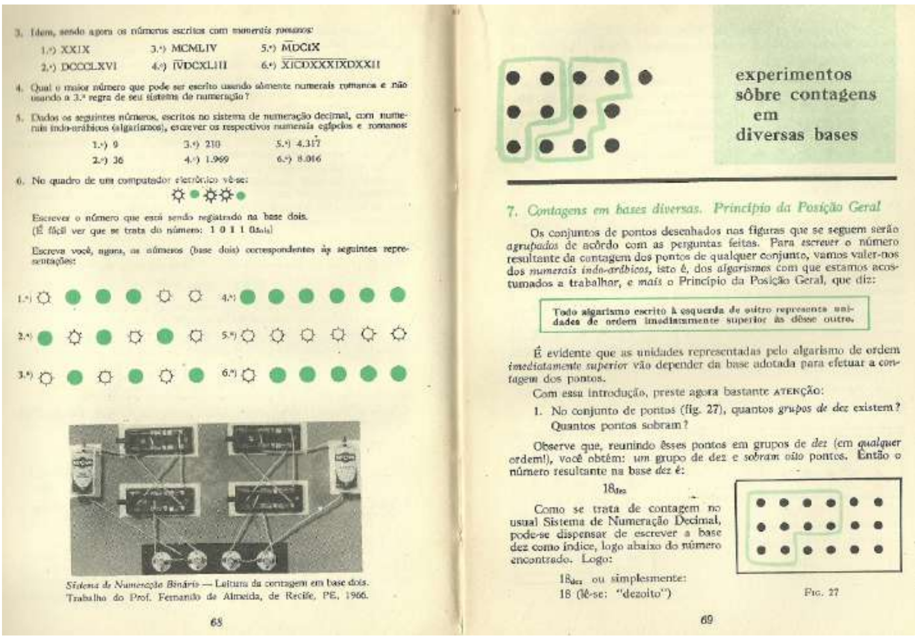
1.º) 2.º) 3.º) 4.º) 5.º) 6.º)

2. Idem, sendo agora os números escritos com *numerais babilônios* (para facilitar a representação, vamos supor que se trata de números menores que sessenta):

1.º) 2.º) 3.º) 4.º) 5.º) 6.º)

67

Figura 6: [1], pp. 66-67.


3. Idem, sendo agora os números escritos com numerais *romanos*:

1.º) XXIX 3.º) MCMLIV 5.º) $\overline{\text{M}}$DCIX

2.º) DCCCLXVI 4.º) $\overline{\text{IV}}$DCXLIII 6.º) $\overline{\text{XICDXXXIX}}$DXXII

4. Qual o maior número que pode ser escrito usando sòmente numerais romanos e não usando a 3.ª regra de seu sistema de numeração?

5. Dados os seguintes números, escritos no sistema de numeração decimal, com numerais indo-arábicos (algarismos), escrever os respectivos numerais egípcios e romanos:

1.º) 9 3.º) 210 5.º) 4.317

2.º) 36 4.º) 1.969 6.º) 8.016

6. No quadro de um computador eletrônico vê-se:

Escrever o número que está sendo registrado na base dois.
(É fácil ver que se trata do número: 1 0 1 1 $0_{dois}$)

Escreva você, agora, os números (base dois) correspondentes às seguintes representações:

1.º) 4.º) 2.º) 5.º) 3.º) 6.º)

*Sistema de Numeração Binário* — Leitura da contagem em base dois.
Trabalho do Prof. Fernando de Almeida, de Recife, PE, 1966.

68

experimentos sôbre contagens em diversas bases

7. *Contagens em bases diversas. Princípio da Posição Geral*

Os conjuntos de pontos desenhados nas figuras que se seguem serão *agrupados* de acôrdo com as perguntas feitas. Para *escrever* o número resultante da contagem dos pontos de qualquer conjunto, vamos valer-nos dos *numerais indo-arábicos*, isto é, dos *algarismos* com que estamos acostumados a trabalhar, e *mais* o Princípio da Posição Geral, que diz:

**Todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades de ordem imediatamente superior às dêsse outro.**

É evidente que as unidades representadas pelo algarismo de ordem *imediatamente superior* vão depender da base adotada para efetuar a contagem dos pontos.

Com essa introdução, preste agora bastante ATENÇÃO:

1. No conjunto de pontos (fig. 27), quantos *grupos de dez* existem? Quantos pontos sobram?

Observe que, reunindo êsses pontos em grupos de *dez* (em *qualquer ordem!*), você obtém: *um* grupo de dez e *sobram oito* pontos. Então o número resultante na base *dez* é:

$18_{dez}$

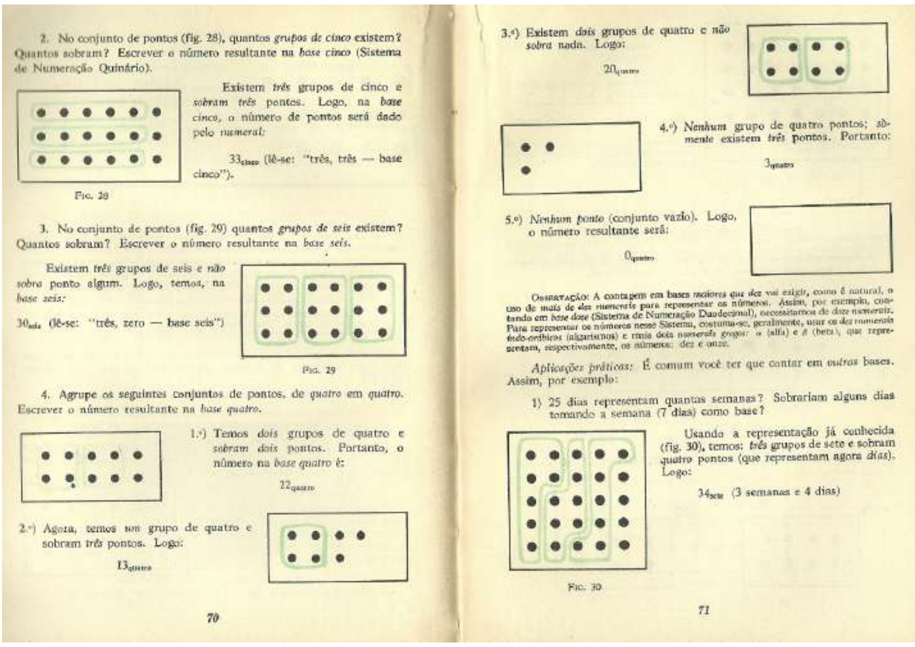
Como se trata de contagem no usual Sistema de Numeração Decimal, pode-se dispensar de escrever a base dez como índice, logo abaixo do número encontrado. Logo:

$18_{dez}$ ou simplesmente:
18 (lê-se: "dezoito")

FIG. 27

69

Figura 7: [1], pp. 68-69.


2. No conjunto de pontos (fig. 28), quantos *grupos de cinco* existem? Quantos sobram? Escrever o número resultante na *base cinco* (Sistema de Numeração Quinário).

Existem *três* grupos de cinco e *sobram três* pontos. Logo, na *base cinco*, o número de pontos será dado pelo *numeral*:

$33_{cinco}$ (lê-se: "três, três — base cinco").

FIG. 28

3. No conjunto de pontos (fig. 29) quantos *grupos de seis* existem? Quantos sobram? Escrever o número resultante na *base seis*.

Existem *três* grupos de seis e *não sobra* ponto algum. Logo, temos, na *base seis*:

$30_{seis}$ (lê-se: "três, zero — base seis")

FIG. 29

4. Agrupe os seguintes conjuntos de pontos, de *quatro* em *quatro*. Escrever o número resultante na *base quatro*.

1.º) Temos *dois* grupos de quatro e *sobram dois* pontos. Portanto, o número na *base quatro* é:

$22_{quatro}$

2.º) Agora, temos *um* grupo de quatro e sobram *três* pontos. Logo:

$13_{quatro}$

70

3.º) Existem *dois* grupos de quatro e *não sobra* nada. Logo:

$20_{quatro}$

4.º) *Nenhum* grupo de quatro pontos; sòmente existem *três* pontos. Portanto:

$3_{quatro}$

5.º) *Nenhum ponto* (conjunto vazio). Logo, o número resultante será:

$0_{quatro}$

OBSERVAÇÃO: A contagem em bases *maiores que dez* vai exigir, como é natural, o uso de *mais de dez numerais* para representar os números. Assim, por exemplo, contando em *base doze* (Sistema de Numeração Duodecimal), necessitamos de doze *numerais*. Para representar os números nesse Sistema, costuma-se, geralmente, usar os *dez numerais indo-arábicos* (algarismos) e mais dois *numerais gregos*: $\alpha$ (alfa) e $\beta$ (beta), que representam, respectivamente, os números: dez e onze.

*Aplicações práticas:* É comum você ter que contar em *outras* bases. Assim, por exemplo:

1) 25 dias representam quantas semanas? Sobrariam alguns dias tomando a semana (7 dias) como base?

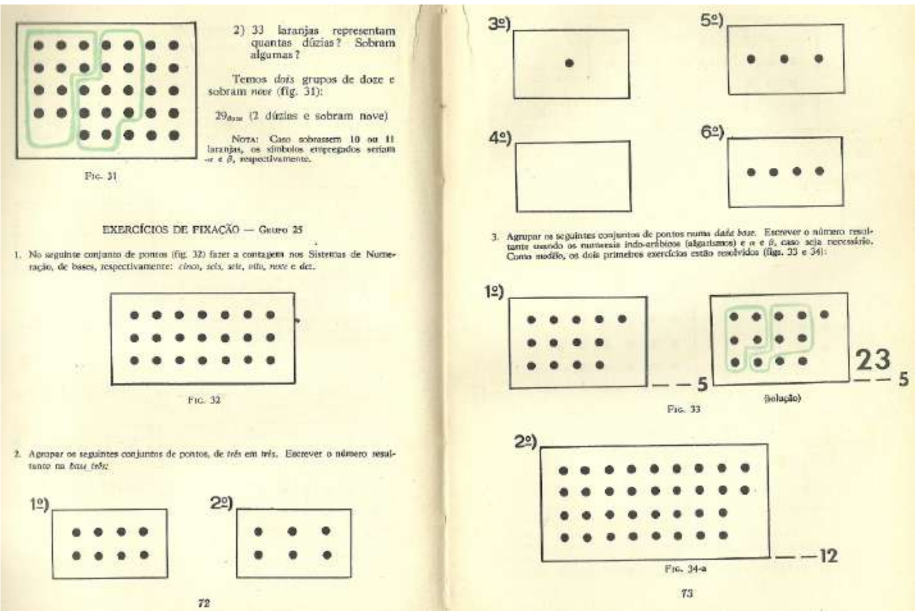
Usando a representação já conhecida (fig. 30), temos: *três* grupos de sete e sobram quatro pontos (que representam agora *dias*). Logo:

$34_{sete}$ (3 semanas e 4 dias)

FIG. 30

71

Figura 8: [1], pp. 70-71.



2) 33 laranjas representam quantas dúzias? Sobram algumas?

Temos *dois* grupos de doze e sobram *nove* (fig. 31):

$29_{doze}$ (2 dúzias e sobram nove)

NOTA: Caso sobrassem 10 ou 11 laranjas, os símbolos empregados seriam $\alpha$ e $\beta$, respectivamente.

FIG. 31

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 25

1. No seguinte conjunto de pontos (fig. 32) fazer a contagem nos Sistemas de Numeração, de bases, respectivamente: *cinco, seis, sete, oito, nove* e *dez*.

FIG. 32

2. Agrupar os seguintes conjuntos de pontos, de *três* em *três*. Escrever o número resultante na *base três*:

1º)

2º)

72

3º)

5º)

4º)

6º)

3. Agrupar os seguintes conjuntos de pontos numa *dada base*. Escrever o número resultante usando os numerais indo-arábicos (algarismos) e $\alpha$ e $\beta$, caso seja necessário. Como modêlo, os dois primeiros exercícios estão resolvidos (figs. 33 e 34):

1º)

— — 5

(solução)

$23$
— — 5

FIG. 33

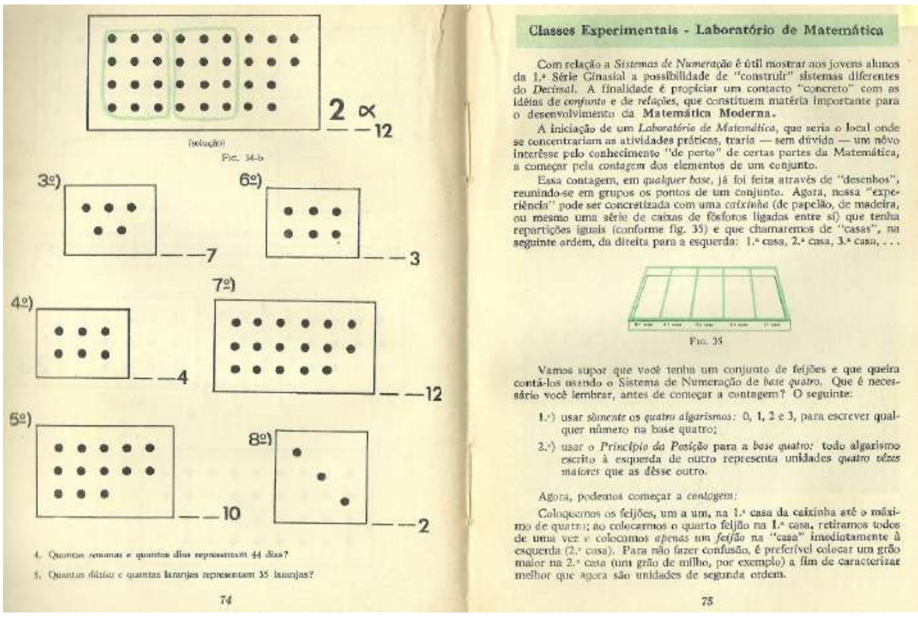
2º)

— — 12

FIG. 34-a

73

Figura 9: [1], pp. 72-73.



$2\,\alpha$
— — 12

(solução)

FIG. 34-b

3º) — — 7

6º) — — 3

7º) — — 12

4º) — — 4

5º) — — 10

8º) — — 2

4. Quantas *semanas* e quantos *dias* representam 44 dias?

5. Quantas *dúzias* e quantas *laranjas* representam 35 laranjas?

74

**Classes Experimentais - Laboratório de Matemática**

Com relação a *Sistemas de Numeração* é útil mostrar aos jovens alunos da 1.ª Série Ginasial a possibilidade de "construir" sistemas diferentes do *Decimal*. A finalidade é propiciar um contacto "concreto" com as idéias de *conjunto* e de *relações*, que constituem matéria importante para o desenvolvimento da **Matemática Moderna.**

A iniciação de um *Laboratório de Matemática*, que seria o local onde se concentrariam as atividades práticas, traria — sem dúvida — um nôvo interêsse pelo conhecimento "de perto" de certas partes da Matemática, a começar pela *contagem* dos elementos de um conjunto.

Essa contagem, em *qualquer base*, já foi feita através de "desenhos", reunindo-se em grupos os pontos de um conjunto. Agora, nossa "experiência" pode ser concretizada com uma *caixinha* (de papelão, de madeira, ou mesmo uma série de caixas de fósforos ligadas entre si) que tenha repartições iguais (conforme fig. 35) e que chamaremos de "casas", na seguinte ordem, da direita para a esquerda: 1.ª casa, 2.ª casa, 3.ª casa, . . .

FIG. 35

Vamos supor que você tenha um conjunto de feijões e que queira contá-los usando o Sistema de Numeração de *base quatro*. Que é necessário você lembrar, antes de começar a contagem? O seguinte:

1.º) usar *sòmente* os *quatro algarismos*: 0, 1, 2 e 3, para escrever qualquer número na base quatro;

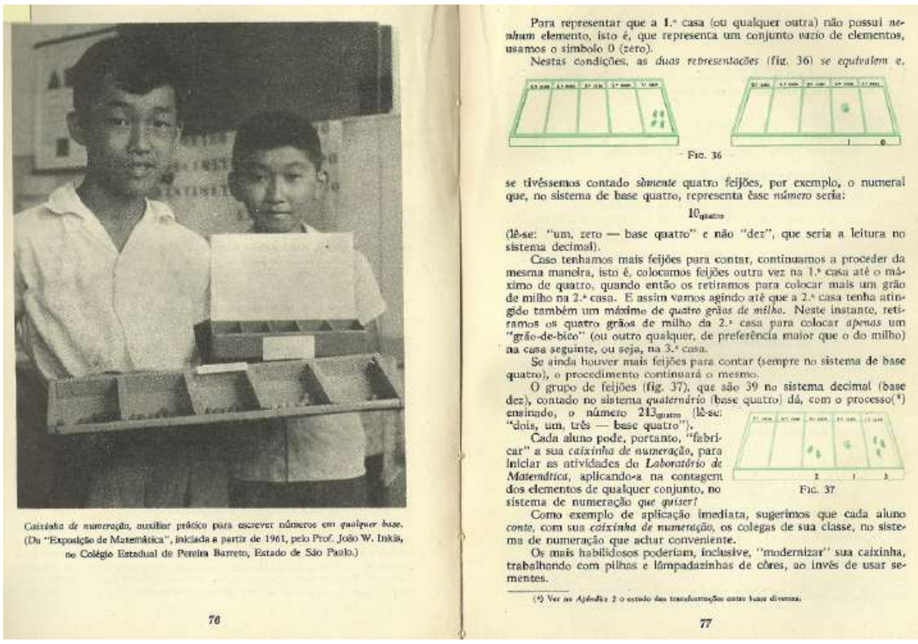
2.º) usar o *Princípio da Posição* para a *base quatro*: todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades *quatro vêzes maiores* que as dêsse outro.

Agora, podemos começar a *contagem*:

Coloquemos os feijões, um a um, na 1.ª casa da caixinha até o máximo de quatro; ao colocarmos o quarto feijão na 1.ª casa, retiramos todos de uma vez e colocamos *apenas um feijão* na "casa" imediatamente à esquerda (2.ª casa). Para não fazer confusão, é preferível colocar um grão maior na 2.ª casa (um grão de milho, por exemplo) a fim de caracterizar melhor que agora são unidades de segunda ordem.

75

Figura 10: [1], pp. 74-75.



Caixinha de numeração, auxiliar prático para escrever números em *qualquer base.* (Da "Exposição de Matemática", iniciada a partir de 1961, pelo Prof. João W. Inkis, no Colégio Estadual de Pereira Barreto, Estado de São Paulo.)

76

Para representar que a 1.ª casa (ou qualquer outra) não possui *nenhum* elemento, isto é, que representa um conjunto *vazio* de elementos, usamos o símbolo 0 (zero).

Nestas condições, as *duas representações* (fig. 36) *se equivalem* e,

FIG. 36

se tivéssemos contado *sòmente* quatro feijões, por exemplo, o numeral que, no sistema de base quatro, representa êsse *número* seria:

$$10_{\text{quatro}}$$

(lê-se: "um, zero — base quatro" e não "dez", que seria a leitura no sistema decimal).

Caso tenhamos mais feijões para contar, continuamos a proceder da mesma maneira, isto é, colocamos feijões outra vez na 1.ª casa até o máximo de quatro, quando então os retiramos para colocar mais um grão de milho na 2.ª casa. E assim vamos agindo até que a 2.ª casa tenha atingido também um máximo de *quatro grãos de milho*. Neste instante, retiramos os quatro grãos de milho da 2.ª casa para colocar *apenas* um "grão-de-bico" (ou outro qualquer, de preferência maior que o do milho) na casa seguinte, ou seja, na 3.ª casa.

Se ainda houver mais feijões para contar (sempre no sistema de base quatro), o procedimento continuará o mesmo.

O grupo de feijões (fig. 37), que são 39 no sistema decimal (base dez), contado no sistema *quaternário* (base quatro) dá, com o processo(*) ensinado, o número $213_{\text{quatro}}$ (lê-se: "dois, um, três — base quatro").

Cada aluno pode, portanto, "fabricar" a sua *caixinha de numeração*, para iniciar as atividades do *Laboratório de Matemática*, aplicando-a na contagem dos elementos de qualquer conjunto, no sistema de numeração *que quiser!*

FIG. 37

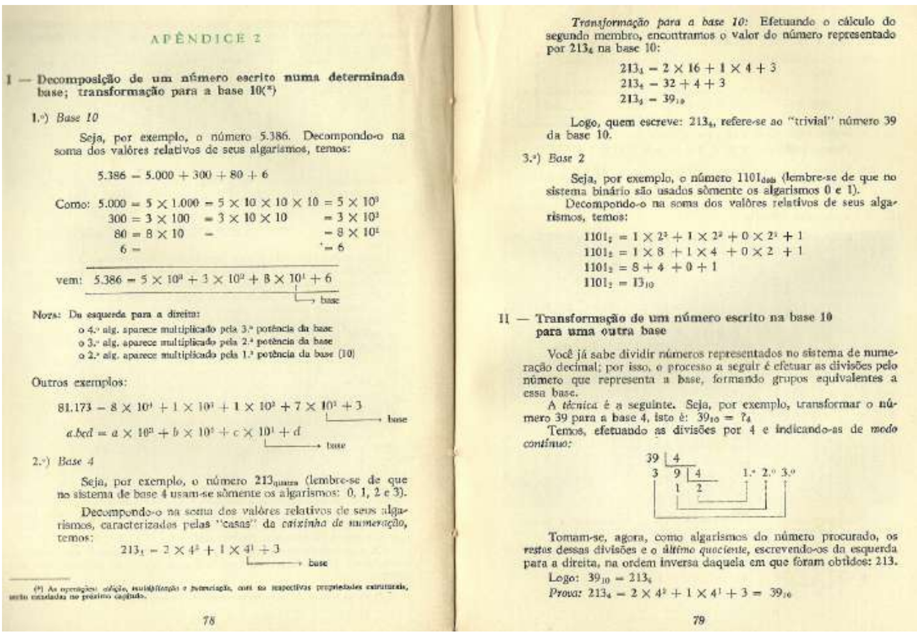
Como exemplo de aplicação imediata, sugerimos que cada aluno *conte*, com sua *caixinha de numeração*, os colegas de sua classe, no sistema de numeração que achar conveniente.

Os mais habilidosos poderiam, inclusive, "modernizar" sua caixinha, trabalhando com pilhas e lâmpadazinhas de côres, ao invés de usar sementes.

(*) Ver no *Apêndice 2* o estudo das transformações entre bases diversas.

77

Figura 11: [1], pp. 76-77.



APÊNDICE 2

**I — Decomposição de um número escrito numa determinada base; transformação para a base 10(*)**

1.º) *Base 10*

Seja, por exemplo, o número 5.386. Decompondo-o na soma dos valôres relativos de seus algarismos, temos:

$$5.386 = 5.000 + 300 + 80 + 6$$

Como:
$$\begin{aligned} 5.000 &= 5 \times 1.000 = 5 \times 10 \times 10 \times 10 = 5 \times 10^3 \\ 300 &= 3 \times 100 \quad = 3 \times 10 \times 10 \quad = 3 \times 10^2 \\ 80 &= 8 \times 10 \quad = \quad = 8 \times 10^1 \\ 6 &= \quad = 6 \end{aligned}$$

vem: $\underline{5.386 = 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 6}$ → base

NOTA: Da esquerda para a direita:

o 4.º alg. aparece multiplicado pela 3.ª potência da base
o 3.º alg. aparece multiplicado pela 2.ª potência da base
o 2.º alg. aparece multiplicado pela 1.ª potência da base (10)

Outros exemplos:

$$81.173 = 8 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 3$$ → base

$$a.bcd = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10^1 + d$$ → base

2.º) *Base 4*

Seja, por exemplo, o número $213_{\text{quatro}}$ (lembre-se de que no sistema de base 4 usam-se sòmente os algarismos: 0, 1, 2 e 3).

Decompondo-o na soma dos valôres relativos de seus algarismos, caracterizados pelas "casas" da *caixinha de numeração*, temos:

$$213_4 = 2 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 3$$ → base

(*) As operações: adição, multiplicação e potenciação, com as respectivas propriedades estruturais, serão estudadas no próximo capítulo.

78

*Transformação para a base 10:* Efetuando o cálculo do segundo membro, encontramos o valor do número representado por $213_4$ na base 10:

$$\begin{aligned} 213_4 &= 2 \times 16 + 1 \times 4 + 3 \\ 213_4 &= 32 + 4 + 3 \\ 213_4 &= 39_{10} \end{aligned}$$

Logo, quem escreve: $213_4$, refere-se ao "trivial" número 39 da base 10.

3.º) *Base 2*

Seja, por exemplo, o número $1101_{\text{dois}}$ (lembre-se de que no sistema binário são usados sòmente os algarismos 0 e 1).

Decompondo-o na soma dos valôres relativos de seus algarismos, temos:

$$\begin{aligned} 1101_2 &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \\ 1101_2 &= 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \\ 1101_2 &= 8 + 4 + 0 + 1 \\ 1101_2 &= 13_{10} \end{aligned}$$

**II — Transformação de um número escrito na base 10 para uma outra base**

Você já sabe dividir números representados no sistema de numeração decimal; por isso, o processo a seguir é efetuar as divisões pelo número que representa a base, formando grupos equivalentes a essa base.

A *técnica* é a seguinte. Seja, por exemplo, transformar o número 39 para a base 4, isto é: $39_{10} = ?_4$

Temos, efetuando as divisões por 4 e indicando-as de *modo contínuo:*

$$\begin{array}{l|l} 39 & 4 \\ \hline 3 & 9 \;|\; 4 \\ & 1 \quad 2 \end{array} \qquad 1.^{\circ}\ 2.^{\circ}\ 3.^{\circ}$$

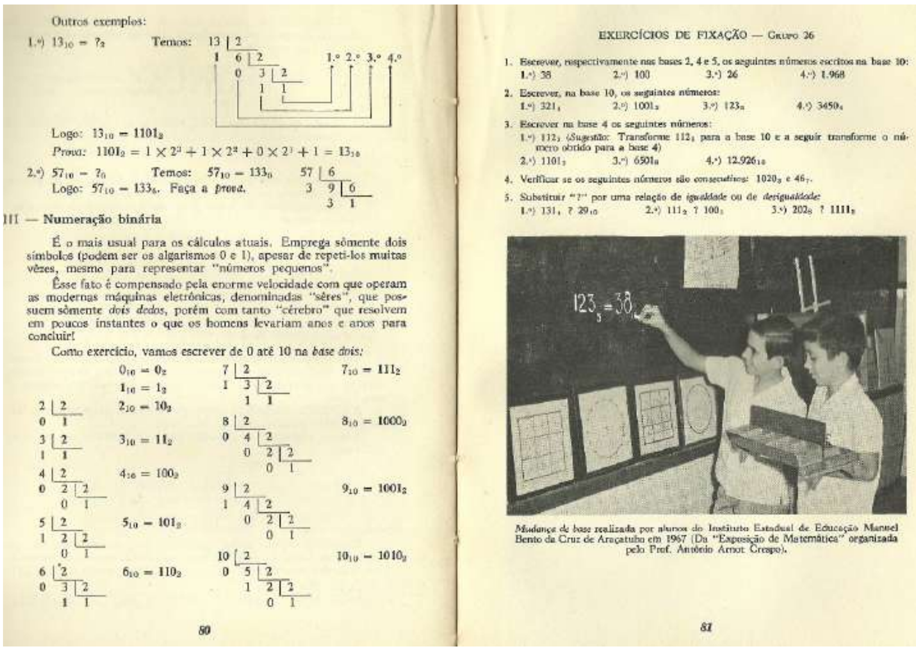
Tomam-se, agora, como algarismos do número procurado, os *restos* dessas divisões e o *último quociente*, escrevendo-os da esquerda para a direita, na ordem inversa daquela em que foram obtidos: 213.

Logo: $39_{10} = 213_4$

*Prova:* $213_4 = 2 \times 4^2 + 1 \times 4^1 + 3 = 39_{10}$

79

Figura 12: [1], pp. 78-79.



Outros exemplos:

1.º) $13_{10} = ?_2$ Temos:

Logo: $13_{10} = 1101_2$

*Prova:* $1101_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = 13_{10}$

2.º) $57_{10} = ?_6$ Temos: $57_{10} = 133_6$

Logo: $57_{10} = 133_6$. Faça a *prova*.

III — **Numeração binária**

É o mais usual para os cálculos atuais. Emprega sòmente dois símbolos (podem ser os algarismos 0 e 1), apesar de repeti-los muitas vêzes, mesmo para representar "números pequenos".

Êsse fato é compensado pela enorme velocidade com que operam as modernas máquinas eletrônicas, denominadas "sêres", que possuem sòmente *dois dedos*, porém com tanto "cérebro" que resolvem em poucos instantes o que os homens levariam anos e anos para concluir!

Como exercício, vamos escrever de 0 até 10 na *base dois:*

$0_{10} = 0_2$ $1_{10} = 1_2$ $2_{10} = 10_2$ $3_{10} = 11_2$ $4_{10} = 100_2$ $5_{10} = 101_2$ $6_{10} = 110_2$ $7_{10} = 111_2$ $8_{10} = 1000_2$ $9_{10} = 1001_2$ $10_{10} = 1010_2$

80

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — Grupo 26

1. Escrever, respectivamente nas bases 2, 4 e 5, os seguintes números escritos na base 10:
1.º) 38 2.º) 100 3.º) 26 4.º) 1.968
2. Escrever, na base 10, os seguintes números:
1.º) $321_4$ 2.º) $1001_2$ 3.º) $123_8$ 4.º) $3450_6$
3. Escrever na base 4 os seguintes números:
1.º) $112_3$ (*Sugestão:* Transforme $112_3$ para a base 10 e a seguir transforme o número obtido para a base 4)
2.º) $1101_2$ 3.º) $6501_8$ 4.º) $12.926_{10}$
4. Verificar se os seguintes números são *consecutivos:* $1020_3$ e $46_7$.
5. Substituir "?" por uma relação de *igualdade* ou de *desigualdade:*
1.º) $131_4$ ? $29_{10}$ 2.º) $111_2$ ? $100_3$ 3.º) $202_3$ ? $1111_2$

$123_5 = 38$

*Mudança de base realizada por alunos do Instituto Estadual de Educação Manuel Bento da Cruz de Araçatuba em 1967 (Da "Exposição de Matemática" organizada pelo Prof. Antônio Arnot Crespo).*

81

Figura 13: [1], pp. 80-81.

Note-se ainda que este livro é profusamente ilustrado com imagens, e muitas delas contendo "realidades vanguardistas" como a era espacial (Figura 14) e a era da robótica (Figura 15, p. 325) mas ainda persistem problemas clássicos como, por exemplo, os que reproduzimos nas Figuras 15 (p. 324) e 16.


Figura 14: [1], final da p. 344.

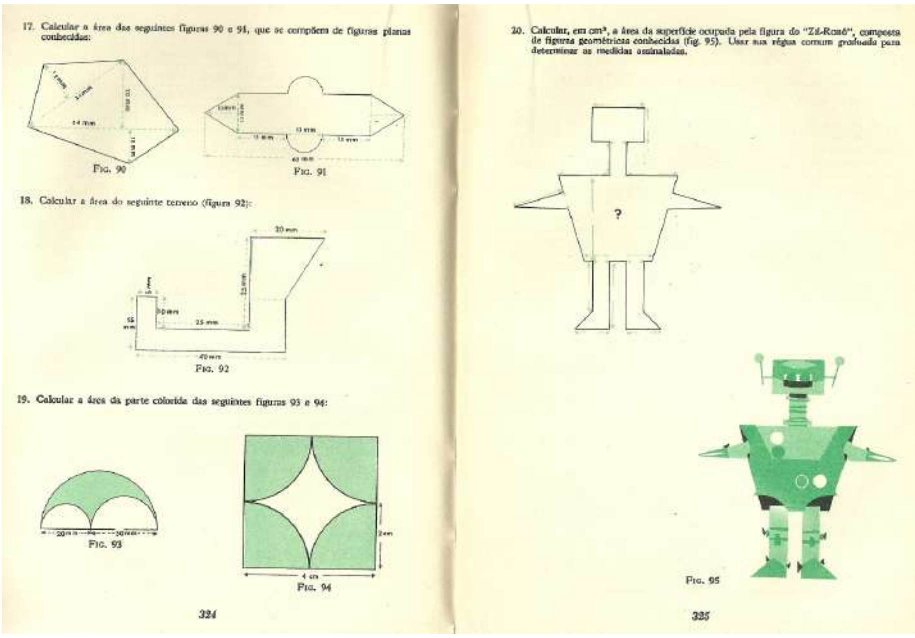

17. Calcular a área das seguintes figuras 90 e 91, que se compõem de figuras planas conhecidas:

Fig. 90

Fig. 91

18. Calcular a área do seguinte terreno (figura 92):

Fig. 92

19. Calcular a área da parte colorida das seguintes figuras 93 e 94:

Fig. 93

Fig. 94

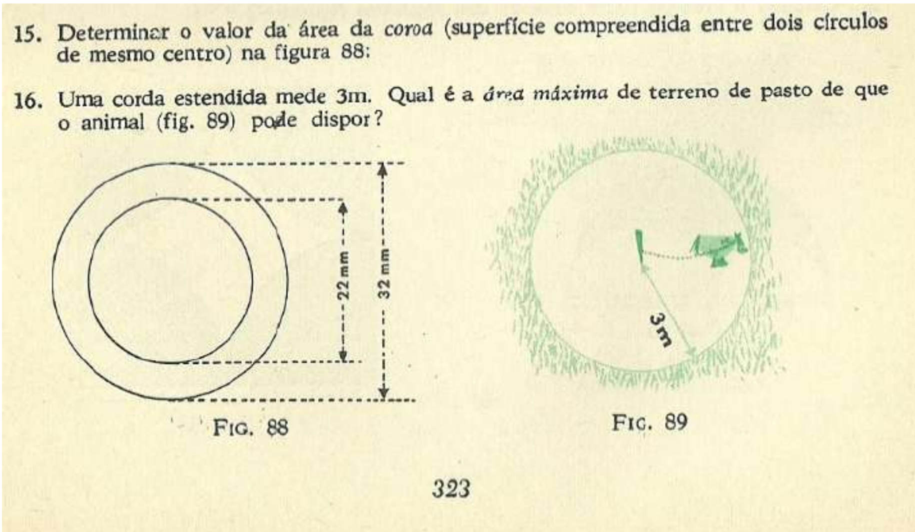
324

20. Calcular, em cm², a área da superfície ocupada pela figura do "Zé-Robô", composta de figuras geométricas conhecidas (fig. 95). Usar sua régua comum graduada para determinar as medidas assinaladas.

Fig. 95

325

Figura 15: [1], pp. 324-325.


15. Determinar o valor da área da *coroa* (superfície compreendida entre dois círculos de mesmo centro) na figura 88:

16. Uma corda estendida mede 3m. Qual é a *área máxima* de terreno de pasto de que o animal (fig. 89) pode dispor?



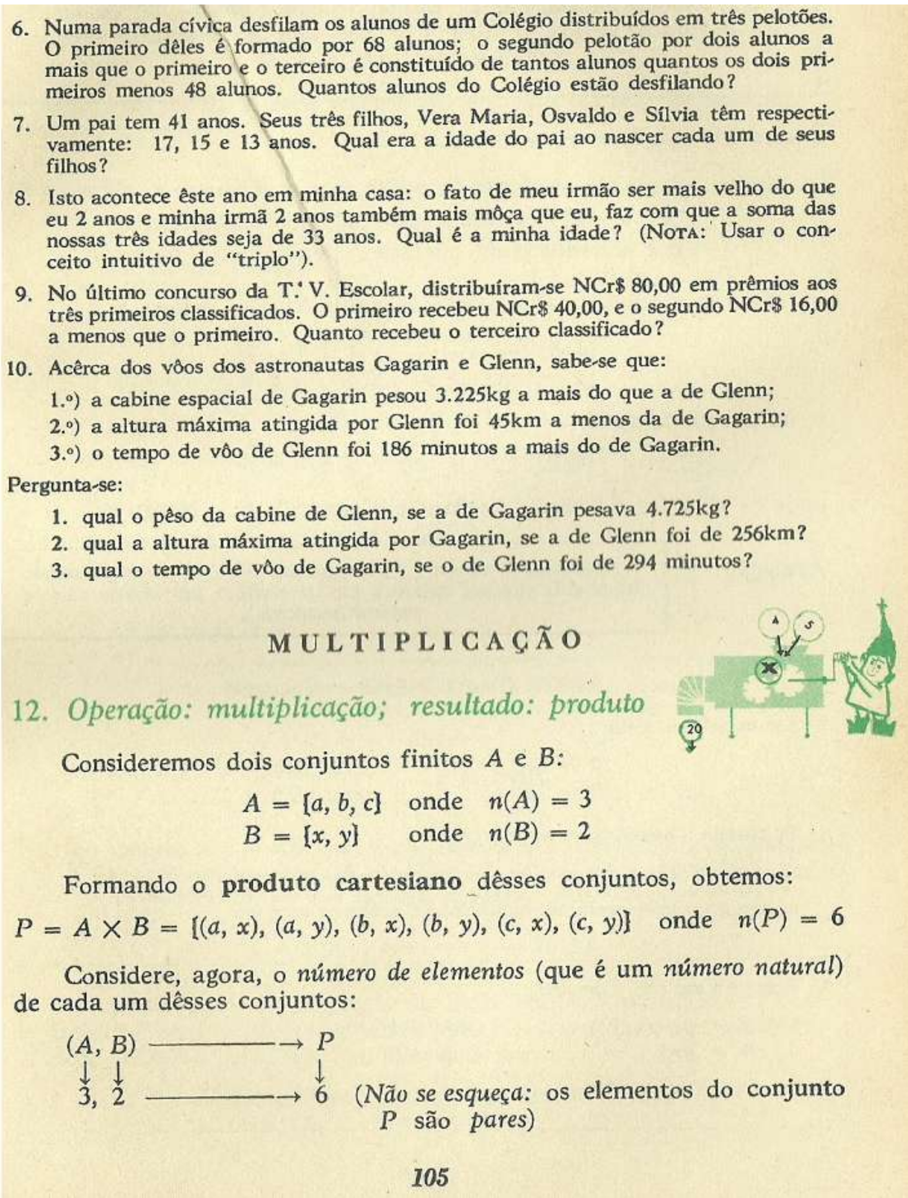
Fig. 88

Fig. 89

323

Figura 16: [1], final da p. 323.

Observe-se ainda a página 105 (Figura 17) onde se encontra uma mistura de exercícios clássicos (exercícios sobre idades, por exemplo) e outros mais "modernos nos temas" onde se utilizam personalidades muito famosas da Era Espacial (exercício 10), tais como Iuri Gagarin, que foi o primeiro ser humano a viajar pelo espaço em 1961.



6. Numa parada cívica desfilam os alunos de um Colégio distribuídos em três pelotões. O primeiro dêles é formado por 68 alunos; o segundo pelotão por dois alunos a mais que o primeiro e o terceiro é constituído de tantos alunos quantos os dois primeiros menos 48 alunos. Quantos alunos do Colégio estão desfilando?

7. Um pai tem 41 anos. Seus três filhos, Vera Maria, Osvaldo e Sílvia têm respectivamente: 17, 15 e 13 anos. Qual era a idade do pai ao nascer cada um de seus filhos?

8. Isto acontece êste ano em minha casa: o fato de meu irmão ser mais velho do que eu 2 anos e minha irmã 2 anos também mais môça que eu, faz com que a soma das nossas três idades seja de 33 anos. Qual é a minha idade? (NOTA: Usar o conceito intuitivo de "triplo").

9. No último concurso da T.' V. Escolar, distribuíram-se NCr$ 80,00 em prêmios aos três primeiros classificados. O primeiro recebeu NCr$ 40,00, e o segundo NCr$ 16,00 a menos que o primeiro. Quanto recebeu o terceiro classificado?

10. Acêrca dos vôos dos astronautas Gagarin e Glenn, sabe-se que:

1.º) a cabine espacial de Gagarin pesou 3.225kg a mais do que a de Glenn;
2.º) a altura máxima atingida por Glenn foi 45km a menos da de Gagarin;
3.º) o tempo de vôo de Glenn foi 186 minutos a mais do de Gagarin.

Pergunta-se:

1. qual o pêso da cabine de Glenn, se a de Gagarin pesava 4.725kg?
2. qual a altura máxima atingida por Gagarin, se a de Glenn foi de 256km?
3. qual o tempo de vôo de Gagarin, se o de Glenn foi de 294 minutos?

MULTIPLICAÇÃO

12. *Operação: multiplicação; resultado: produto*

Consideremos dois conjuntos finitos $A$ e $B$:

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{onde} \quad n(A) = 3$$
$$B = \{x, y\} \quad \text{onde} \quad n(B) = 2$$

Formando o **produto cartesiano** dêsses conjuntos, obtemos:

$$P = A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\} \quad \text{onde} \quad n(P) = 6$$

Considere, agora, o *número de elementos* (que é um *número natural*) de cada um dêsses conjuntos:

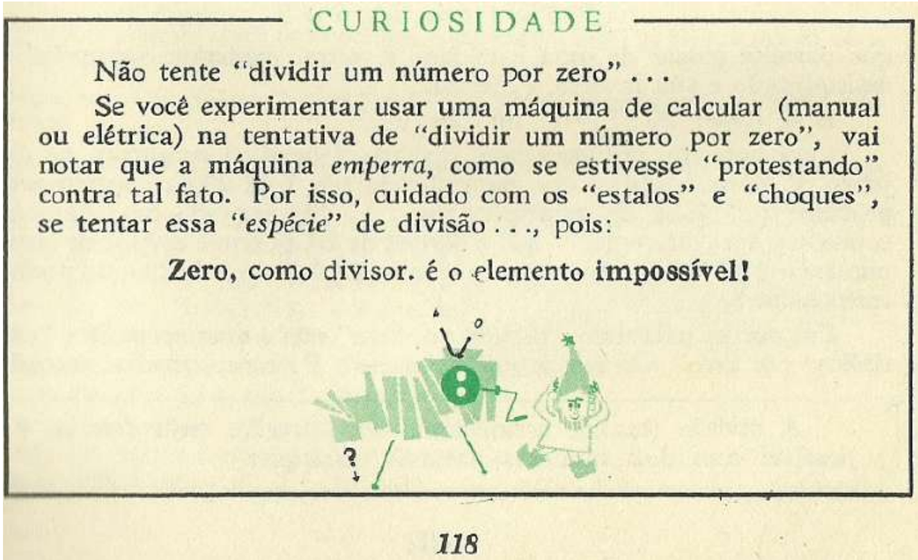
$$\begin{array}{ccc} (A, B) & \longrightarrow & P \\ \downarrow\ \downarrow & & \downarrow \\ 3,\ 2 & \longrightarrow & 6 \end{array}$$

(*Não se esqueça:* os elementos do conjunto $P$ são *pares*)

105

Figura 17: [1], p. 105.

Repare-se ainda na imagem do duende com uma curiosa "máquina de multiplicar". Noutra página do livro é também apresentada uma máquina de dividir semelhante e, mais tarde, uma "Curiosidade" onde se mostra o que acontece à máquina de dividir quando se tenta dividir um número por zero… (Figura 18).



CURIOSIDADE

Não tente "dividir um número por zero" . . .

Se você experimentar usar uma máquina de calcular (manual ou elétrica) na tentativa de "dividir um número por zero", vai notar que a máquina *emperra*, como se estivesse "protestando" contra tal fato. Por isso, cuidado com os "estalos" e "choques", se tentar essa "*espécie*" de divisão . . ., pois:

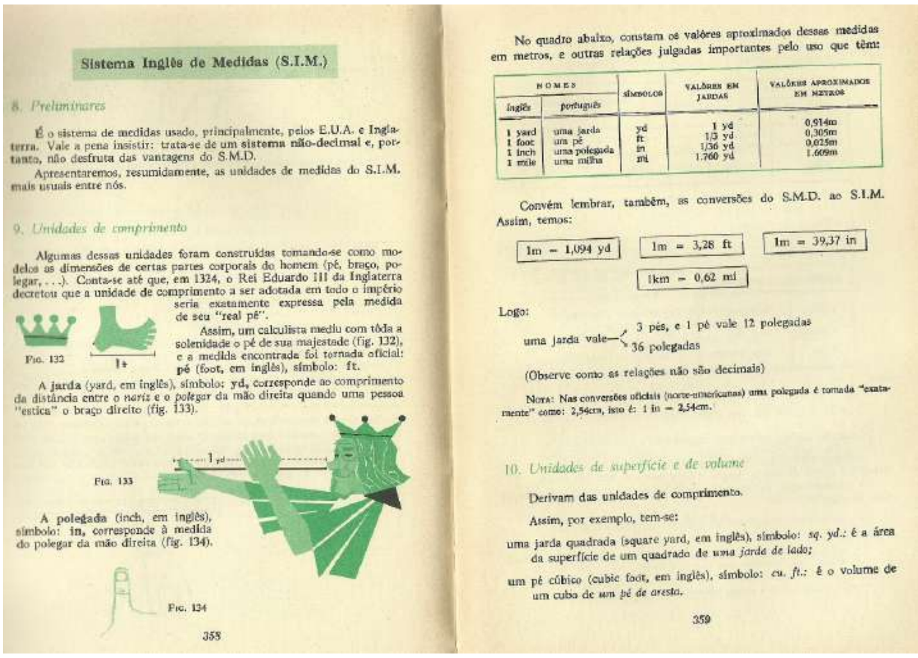
**Zero,** como divisor. é o elemento **impossível!**



118

Figura 18: [1], final da p. 118.

Neste livro de Sangiorgi apresenta-se ainda o Sistema Inglês de Medidas (Figuras 19 e 20), utilizado pelos Estados Unidos e Inglaterra, salientando-se que este "não desfruta das vantagens" do nosso sistema métrico decimal. . .



**Sistema Inglês de Medidas (S.I.M.)**

8. *Preliminares*

É o sistema de medidas usado, principalmente, pelos E.U.A. e Inglaterra. Vale a pena insistir: trata-se de um **sistema não-decimal** e, portanto, não desfruta das vantagens do S.M.D.

Apresentaremos, resumidamente, as unidades de medidas do S.I.M. mais usuais entre nós.

9. *Unidades de comprimento*

Algumas dessas unidades foram construídas tomando-se como modelos as dimensões de certas partes corporais do homem (pé, braço, polegar, . . .). Conta-se até que, em 1324, o Rei Eduardo III da Inglaterra decretou que a unidade de comprimento a ser adotada em todo o império seria exatamente expressa pela medida de seu "real pé".

Assim, um calculista mediu com tôda a solenidade o pé de sua majestade (fig. 132), e a medida encontrada foi tornada oficial: **pé** (foot, em inglês), símbolo: **ft.**



FIG. 132

A **jarda** (yard, em inglês), símbolo: **yd,** corresponde ao comprimento da distância entre o *nariz* e o *polegar* da mão direita quando uma pessoa "estica" o braço direito (fig. 133).



FIG. 133

A **polegada** (inch, em inglês), símbolo: **in,** corresponde à medida do polegar da mão direita (fig. 134).

FIG. 134

358

No quadro abaixo, constam os valôres aproximados dessas medidas em metros, e outras relações julgadas importantes pelo uso que têm:

| NOMES | | SÍMBOLOS | VALÔRES EM JARDAS | VALÔRES APROXIMADOS EM METROS |
|---|---|---|---|---|
| inglês | português | | | |
| 1 yard | uma jarda | yd | 1 yd | 0,914m |
| 1 foot | um pé | ft | 1/3 yd | 0,305m |
| 1 inch | uma polegada | in | 1/36 yd | 0,025m |
| 1 mile | uma milha | mi | 1.760 yd | 1.609m |

Convém lembrar, também, as conversões do S.M.D. ao S.I.M. Assim, temos:

$\boxed{1m = 1{,}094\ yd}$ $\boxed{1m = 3{,}28\ ft}$ $\boxed{1m = 39{,}37\ in}$

$\boxed{1km = 0{,}62\ mi}$

Logo:

uma jarda vale — 3 pés, e 1 pé vale 12 polegadas
— 36 polegadas

(Observe como as relações não são decimais)

NOTA: Nas conversões oficiais (norte-americanas) uma polegada é tomada "exatamente" como: 2,54cm, isto é: 1 in = 2,54cm.

10. *Unidades de superfície e de volume*

Derivam das unidades de comprimento.

Assim, por exemplo, tem-se:

uma jarda quadrada (square yard, em inglês), símbolo: *sq. yd.*: é a área da superfície de um quadrado de *uma jarda de lado;*

um pé cúbico (cubic foot, em inglês), símbolo: *cu. ft.*: é o volume de um cubo de *um pé de aresta.*

359

Figura 19: [1], pp. 358-359.

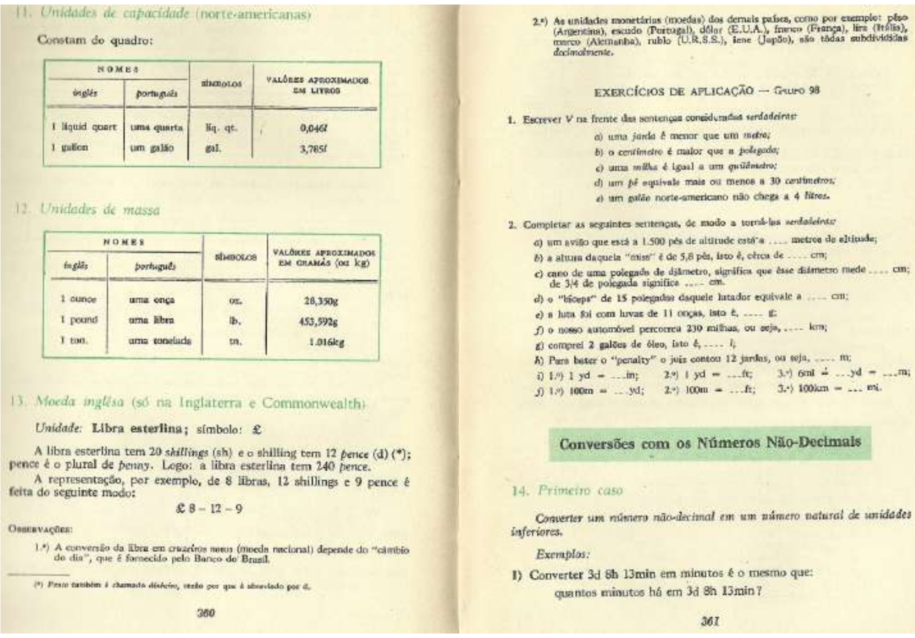


Figura 20: [1], pp. 360-361.

Para finalizar, apresentamos uma pequena seção de "bom humor" (Figura 21) que raramente se encontra em manuais escolares atuais...

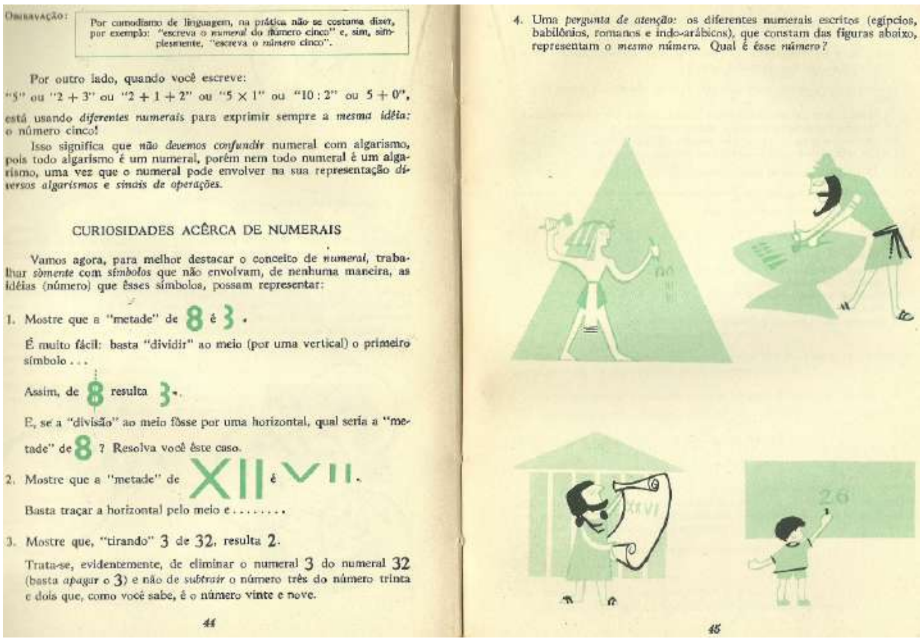


Figura 21: [1], pp. 44-45.

## Agradecimento

Este trabalho foi financiado pelo CIDMA-Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e pela FCT-Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito do projecto UID/MAT/04106/2019.

## Referências

[1] Sangiori, Osvaldo. *Matemática Curso Moderno* (1.º vol., 16.ª ed.), Companhia Editora Nacional, São Paulo (Brasil), 1971.