Jornal das Primeiras

MATEMÁTICAS

Número 12
Setembro, 2019

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR

Ludus

Problemas e Desafios

PROBLEMAS DOS NOSSOS AVÓS (10)

Hélder Pinto, Ângelo Silva
ESE - Instituto Piaget (V. N. Gaia) & CIDMA - Universidade de Aveiro,
ESE - Instituto Piaget (V. N. Gaia)
hbmpinto1981@gmail.com, angelo.silva@gaia.ipiaget.pt

Resumo: *Nesta secção do Jornal das Primeiras Matemáticas apresentam-se regularmente alguns problemas de matemática de livros escolares portugueses do passado.*

Palavras-chave: manuais de matemática antigos, problemas de matemática elementar.

Preâmbulo

Os problemas escolares utilizados no ensino da Matemática, em particular no ensino elementar, têm sofrido algumas alterações ao longo dos tempos. Muitas vezes a diferença não está nos conteúdos – pois as matérias básicas como a aritmética e a geometria, de grosso modo, mantém-se as mesmas – mas sim na forma e no contexto com que estes problemas são apresentados.

Nesta secção do *Jornal das Primeiras Matemáticas* apresentaremos regularmente alguns problemas de matemática que foram publicados em livros escolares portugueses do passado. Contaremos com a colaboração dos nossos leitores, que poderão fazer-nos chegar cópias de problemas antigos que considerem interessantes através do e-mail hbmpinto1981@gmail.com.

Exercícios de Geometria e Aritmética de Palma Fernandes

Como prometido no número anterior, voltamos ao livro de exercícios para o segundo ano dos Liceus escrito por António do Nascimento Palma Fernandes (Figura 1). Relembramos que o livro está dividido em duas partes: a Geometria que apresentámos no último Jornal das Primeiras Matemáticas e a Aritmética que abordaremos agora.

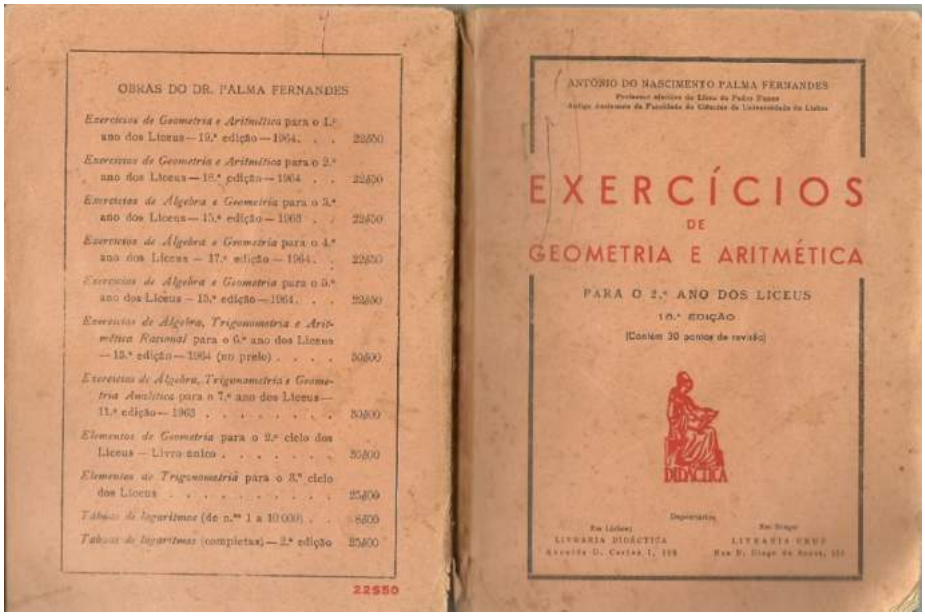


Figura 1: Capa e contracapa de [1].

O autor fornece na primeira página desta parte o programa da Aritmética abordada (Figura 2). Merecem destaque alguns tópicos que não são abordados atualmente em contexto escolar como, por exemplo, a "prova dos nove das operações" e a "regra de três composta". Note-se ainda que nesta parte o autor apresenta muitos problemas em contexto "real", a maioria deles aplicados ao comércio, à agricultura e a problemas envolvendo dinheiro e juros (que hoje designaríamos como literacia financeira...). Nas páginas que se seguem apresentamos o Programa, o Capítulo I: *Múltiplos e divisores de um número. Divisibilidade.* (Figura 3-10), o Capítulo VIII: *Regra de três simples. Percentagens. Regra de companhia.* (Figura 11-16) e Capítulo IX: *Regra de três composta. Juros.* (Figura 16-18) que tratam os assuntos referidos acima.

ARITMÉTICA

PROGRAMA

Noções de múltiplo e submúltiplo de um número: restos da divisão de um número inteiro por 10 e potências de 10, por 2 e 5, por 9 e 3; critérios de divisibilidade por estes números. Prova dos noves das operações.

Divisores comuns de dois ou mais números; máximo divisor comum de dois ou mais números: determinação do máximo divisor comum de dois números pelas divisões sucessivas. Múltiplos comuns de dois ou mais números; menor múltiplo comum de dois ou mais números; determinação do menor múltiplo comum de dois números partindo do máximo divisor comum.

Noção de número primo; decomposição de um número num produto de factores primos; cálculo do máximo divisor comum e do menor múltiplo comum de vários números utilizando a decomposição em factores primos.

Fracções; simplificação e redução ao menor denominador comum; dízimas; redução de uma fracção a dízima; operações sobre fracções. Fracções generalizadas; valores numéricos de expressões de termos fraccionários.

Proporcionalidade directa e inversa; proporções geométricas; propriedades fundamentais. Aplicações da proporcionalidade e regras de três simples e composta, percentagens, regras de companhia e juros simples.

Figura 2: Programa.

CAPÍTULO I

Múltiplos e divisores de um número
Divisibilidade

Prova dos noves às operações

EXEMPLOS

1) Determinar os múltiplos comuns de 21 e 28 inferiores a 200.

Para se obterem os múltiplos de um número basta multiplicá-los pela sucessão dos números inteiros, ou seja, por 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.

Os múltiplos de 21 até 200 são:

0, 21, 42, 63, 84, 105, 126, 147, 168, e 189

e os de 28:

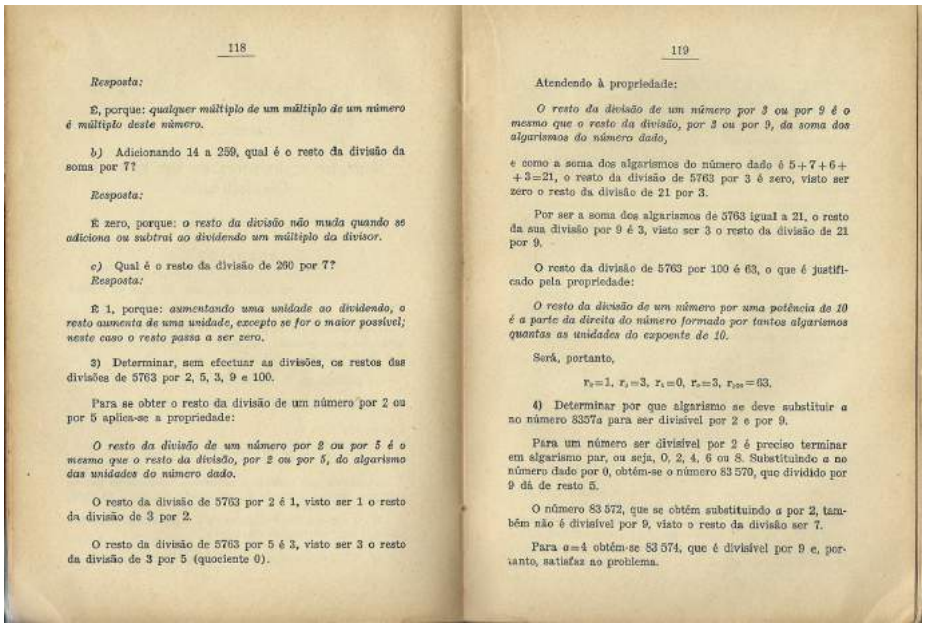
0, 28, 56, 84, 112, 140, 168 e 196

Atendendo aos resultados anteriores, verificamos que os múltiplos comuns de 21 e de 28, inferiores a 200, são 0, 84 e 168.

2) O número 259 é múltiplo de 7. Responda às seguintes questões sem efectuar as divisões:

a) 777 é divisível por 259; também é divisível por 7?

Figura 3: Capítulo I; primeira página.



118

Resposta:

É, porque: *qualquer múltiplo de um múltiplo de um número é múltiplo deste número.*

b) Adicionando 14 a 259, qual é o resto da divisão da soma por 7?

Resposta:

É zero, porque: *o resto da divisão não muda quando se adiciona ou subtrai ao dividendo um múltiplo do divisor.*

c) Qual é o resto da divisão de 260 por 7?
Resposta:

É 1, porque: *aumentando uma unidade ao dividendo, o resto aumenta de uma unidade, excepto se for o maior possível; neste caso o resto passa a ser zero.*

3) Determinar, sem efectuar as divisões, os restos das divisões de 5763 por 2, 5, 3, 9 e 100.

Para se obter o resto da divisão de um número por 2 ou por 5 aplica-se a propriedade:

O resto da divisão de um número por 2 ou por 5 é o mesmo que o resto da divisão, por 2 ou por 5, do algarismo das unidades do número dado.

O resto da divisão de 5763 por 2 é 1, visto ser 1 o resto da divisão de 3 por 2.

O resto da divisão de 5763 por 5 é 3, visto ser 3 o resto da divisão de 3 por 5 (quociente 0).

119

Atendendo à propriedade:

O resto da divisão de um número por 3 ou por 9 é o mesmo que o resto da divisão, por 3 ou por 9, da soma dos algarismos do número dado,

e como a soma dos algarismos do número dado é $5+7+6+3=21$, o resto da divisão de 5763 por 3 é zero, visto ser zero o resto da divisão de 21 por 3.

Por ser a soma dos algarismos de 5763 igual a 21, o resto da sua divisão por 9 é 3, visto ser 3 o resto da divisão de 21 por 9.

O resto da divisão de 5763 por 100 é 63, o que é justificado pela propriedade:

O resto da divisão de um número por uma potência de 10 é a parte da direita do número formado por tantos algarismos quantas as unidades do expoente de 10.

Será, portanto,

$$r_2=1,\ r_5=3,\ r_3=0,\ r_9=3,\ r_{100}=63.$$

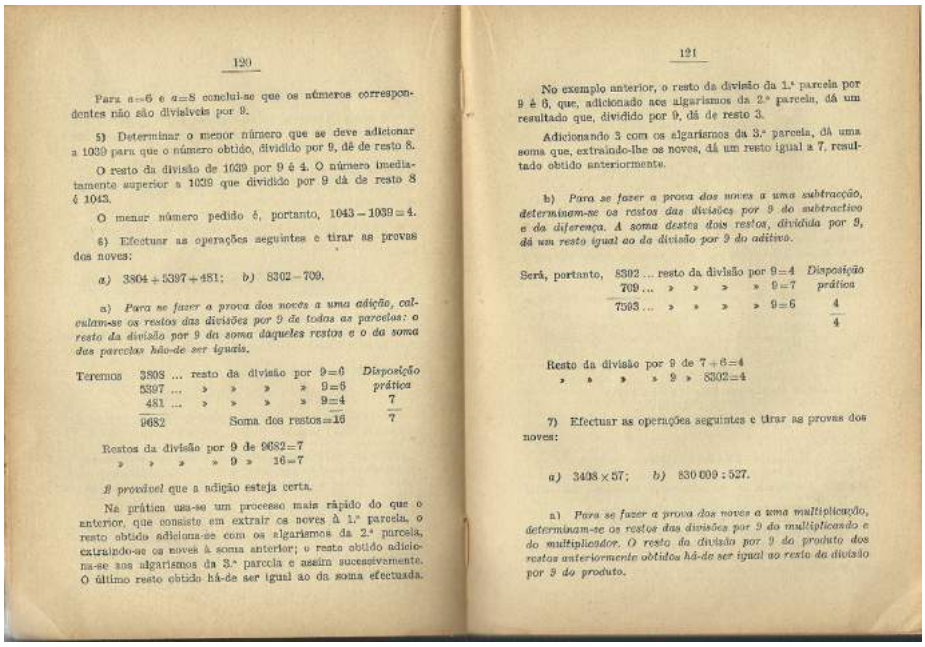
4) Determinar por que algarismo se deve substituir *a* no número 8357*a* para ser divisível por 2 e por 9.

Para um número ser divisível por 2 é preciso terminar em algarismo par, ou seja, 0, 2, 4, 6 ou 8. Substituindo *a* no número dado por 0, obtém-se o número 83 570, que dividido por 9 dá de resto 5.

O número 83 572, que se obtém substituindo *a* por 2, também não é divisível por 9, visto o resto da divisão ser 7.

Para $a=4$ obtém-se 83 574, que é divisível por 9 e, portanto, satisfaz ao problema.

Figura 4: Capítulo I; segunda e terceira páginas.



120

Para $a=6$ e $a=8$ conclui-se que os números correspondentes não são divisíveis por 9.

5) Determinar o menor número que se deve adicionar a 1039 para que o número obtido, dividido por 9, dê de resto 8.

O resto da divisão de 1039 por 9 é 4. O número imediatamente superior a 1039 que dividido por 9 dá de resto 8 é 1043.

O menor número pedido é, portanto, $1043-1039=4$.

6) Efectuar as operações seguintes e tirar as provas dos noves:

a) $3804+5397+481$; *b)* $8302-709$.

a) *Para se fazer a prova dos noves a uma adição, calculam-se os restos das divisões por 9 de todas as parcelas: o resto da divisão por 9 da soma daqueles restos e o da soma das parcelas hão-de ser iguais.*

Teremos	3808 ...	resto da divisão por	$9=6$	*Disposição prática*
	5397 ...	» » » »	$9=6$	
	481 ...	» » » »	$9=4$	7
	9682	Soma dos restos	$=16$	7

Restos da divisão por 9 de $9682=7$
» » » » 9 » $16=7$

É possível que a adição esteja certa.

Na prática usa-se um processo mais rápido do que o anterior, que consiste em extrair os noves à 1.ª parcela, o resto obtido adiciona-se com os algarismos da 2.ª parcela, extraindo-se os noves à soma anterior; o resto obtido adiciona-se aos algarismos da 3.ª parcela e assim sucessivamente. O último resto obtido há-de ser igual ao da soma efectuada.

121

No exemplo anterior, o resto da divisão da 1.ª parcela por 9 é 6, que, adicionado aos algarismos da 2.ª parcela, dá um resultado que, dividido por 9, dá de resto 3.

Adicionando 3 com os algarismos da 3.ª parcela, dá uma soma que, extraindo-lhe os noves, dá um resto igual a 7, resultado obtido anteriormente.

b) *Para se fazer a prova dos noves a uma subtracção, determinam-se os restos das divisões por 9 do subtractivo e da diferença. A soma destes dois restos, dividida por 9, dá um resto igual ao da divisão por 9 do aditivo.*

Será, portanto,	8302 ...	resto da divisão por	$9=4$	*Disposição prática*
	709 ...	» » » »	$9=7$	4
	7593 ...	» » » »	$9=6$	4

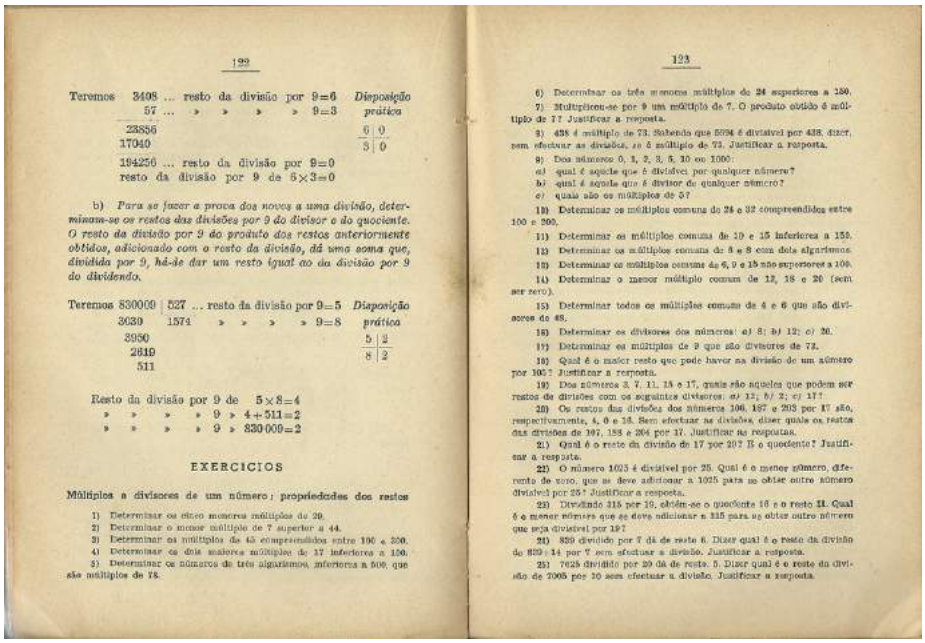
Resto da divisão por 9 de $7+6=4$
» » » » 9 » $8302=4$

7) Efectuar as operações seguintes e tirar as provas dos noves:

a) 3408×57; *b)* $830\,009:527$.

a) *Para se fazer a prova dos noves a uma multiplicação, determinam-se os restos das divisões por 9 do multiplicando e do multiplicador. O resto da divisão por 9 do produto dos restos anteriormente obtidos há-de ser igual ao resto da divisão por 9 do produto.*

Figura 5: Capítulo I; quarta e quinta páginas.



122

Teremos 3408 ... resto da divisão por 9=6 *Disposição prática*
57 ... » » » » 9=3

23856 — 6 | 0
17040 — 3 | 0
194256 ... resto da divisão por 9=0
resto da divisão por 9 de 6×3=0

b) *Para se fazer a prova dos noves a uma divisão, determinam-se os restos das divisões por 9 do divisor e do quociente. O resto da divisão por 9 do produto dos restos anteriormente obtidos, adicionado com o resto da divisão, dá uma soma que, dividida por 9, há-de dar um resto igual ao da divisão por 9 do dividendo.*

Teremos 830009 | 527 ... resto da divisão por 9=5 *Disposição prática*
3030 | 1574 » » » » 9=8
3950
2819
511

5 | 2
8 | 2

Resto da divisão por 9 de 5×8=4
» » » » 9 » 4+511=2
» » » » 9 » 830009=2

EXERCICIOS

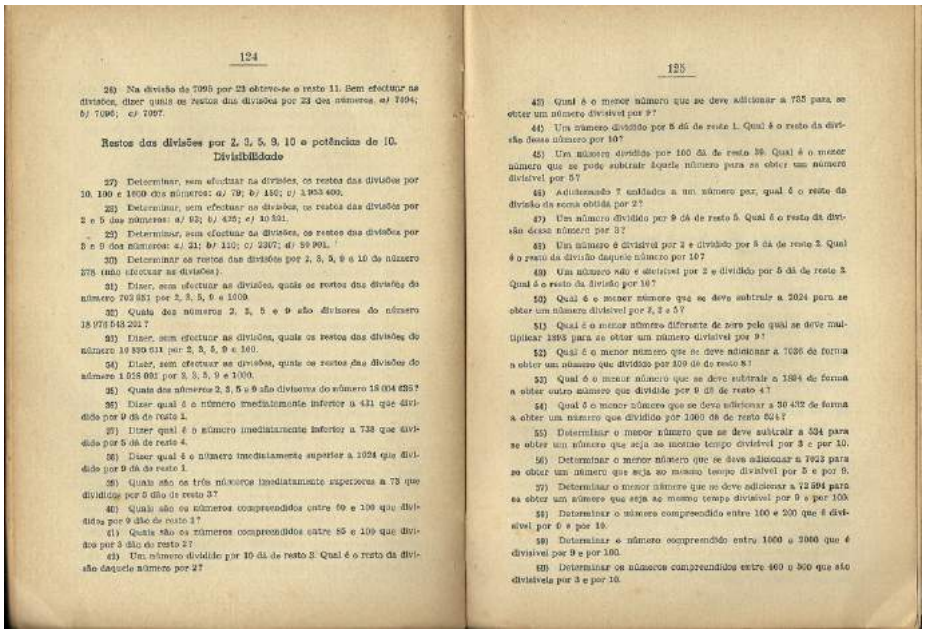
Múltiplos e divisores de um número; propriedades dos restos

1) Determinar os cinco menores múltiplos de 20.
2) Determinar o menor múltiplo de 7 superior a 44.
3) Determinar os múltiplos de 43 compreendidos entre 190 e 300.
4) Determinar os dois maiores múltiplos de 17 inferiores a 100.
5) Determinar os números de três algarismos, inferiores a 500, que são múltiplos de 75.

123

6) Determinar os três menores múltiplos de 24 superiores a 150.
7) Multiplicou-se por 9 um múltiplo de 7. O produto obtido é múltiplo de 7? Justificar a resposta.
8) 438 é múltiplo de 73. Sabendo que 5694 é divisível por 438, dizer, sem efectuar as divisões, se é múltiplo de 73. Justificar a resposta.
9) Dos números 0, 1, 2, 3, 5, 10 ou 1000:
a) qual é aquele que é divisível por qualquer número?
b) qual é aquele que é divisor de qualquer número?
c) quais são os múltiplos de 5?
10) Determinar os múltiplos comuns de 24 e 32 compreendidos entre 100 e 200.
11) Determinar os múltiplos comuns de 10 e 15 inferiores a 150.
12) Determinar os múltiplos comuns de 5 e 8 com dois algarismos.
13) Determinar os múltiplos comuns de 6, 9 e 15 não superiores a 100.
14) Determinar o menor múltiplo comum de 12, 18 e 20 (sem ser zero).
15) Determinar todos os múltiplos comuns de 4 e 6 que são divisores de 48.
16) Determinar os divisores dos números: a) 8; b) 12; c) 20.
17) Determinar os múltiplos de 9 que são divisores de 72.
18) Qual é o maior resto que pode haver na divisão de um número por 105? Justificar a resposta.
19) Dos números 3, 7, 11, 13 e 17, quais são aqueles que podem ser restos de divisões com os seguintes divisores: a) 12; b) 2; c) 17?
20) Os restos das divisões dos números 106, 187 e 203 por 17 são, respectivamente, 4, 6 e 13. Sem efectuar as divisões, dizer quais os restos das divisões de 107, 188 e 204 por 17. Justificar as respostas.
21) Qual é o resto da divisão de 17 por 20? E o quociente? Justificar a resposta.
22) O número 1025 é divisível por 25. Qual é o menor número, diferente de zero, que se deve adicionar a 1025 para se obter outro número divisível por 25? Justificar a resposta.
23) Dividindo 315 por 19, obtém-se o quociente 16 e o resto 11. Qual é o menor número que se deve adicionar a 315 para se obter outro número que seja divisível por 19?
24) 839 dividido por 7 dá de resto 6. Dizer qual é o resto da divisão de 839×14 por 7 sem efectuar a divisão. Justificar a resposta.
25) 7025 dividido por 20 dá de resto 5. Dizer qual é o resto da divisão de 7005 por 20 sem efectuar a divisão. Justificar a resposta.

Figura 6: Capítulo I; sexta e sétima páginas.



124

26) Na divisão de 7095 por 23 obteve-se o resto 11. Sem efectuar as divisões, dizer quais os restos das divisões por 23 dos números: a) 7094; b) 7096; c) 7097.

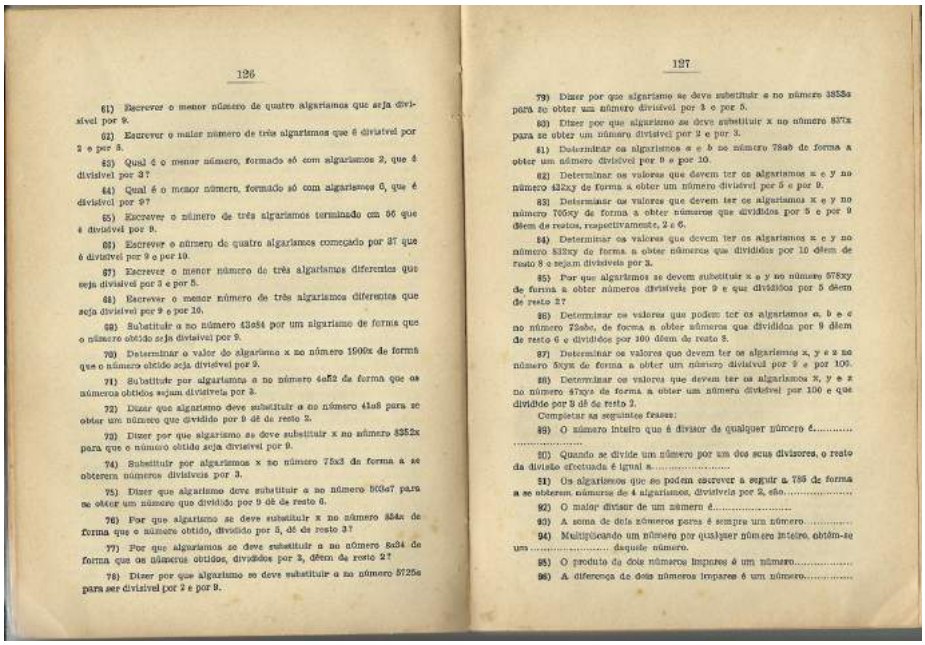
Restos das divisões por 2, 3, 5, 9, 10 e potências de 10. Divisibilidade

27) Determinar, sem efectuar as divisões, os restos das divisões por 10, 100 e 1000 dos números: a) 79; b) 150; c) 1 953 400.
28) Determinar, sem efectuar as divisões, os restos das divisões por 2 e 5 dos números: a) 93; b) 425; c) 10 321.
29) Determinar, sem efectuar as divisões, os restos das divisões por 3 e 9 dos números: a) 21; b) 110; c) 2307; d) 59 901.
30) Determinar os restos das divisões por 2, 3, 5, 9 e 10 do número 278 (não efectuar as divisões).
31) Dizer, sem efectuar as divisões, quais os restos das divisões do número 793 851 por 2, 3, 5, 9 e 1000.
32) Quais dos números 2, 3, 5 e 9 são divisores do número 18 078 543 201?
33) Dizer, sem efectuar as divisões, quais os restos das divisões do número 10 899 611 por 2, 3, 5, 9 e 100.
34) Dizer, sem efectuar as divisões, quais os restos das divisões do número 1 018 091 por 2, 3, 5, 9 e 1000.
35) Quais dos números 2, 3, 5 e 9 são divisores do número 18 004 635?
36) Dizer qual é o número imediatamente inferior a 431 que dividido por 9 dá de resto 2.
37) Dizer qual é o número imediatamente inferior a 738 que dividido por 5 dá de resto 4.
38) Dizer qual é o número imediatamente superior a 1024 que dividido por 9 dá de resto 1.
39) Quais são os três números imediatamente superiores a 73 que divididos por 5 dão de resto 3?
40) Quais são os números compreendidos entre 60 e 100 que divididos por 9 dão de resto 1?
41) Quais são os números compreendidos entre 85 e 109 que divididos por 3 dão de resto 2?
42) Um número dividido por 10 dá de resto 3. Qual é o resto da divisão daquele número por 2?

125

43) Qual é o menor número que se deve adicionar a 735 para se obter um número divisível por 9?
44) Um número dividido por 8 dá de resto 1. Qual é o resto da divisão desse número por 10?
45) Um número dividido por 100 dá de resto 99. Qual é o menor número que se pode subtrair daquele número para se obter um número divisível por 5?
46) Adicionando 7 unidades a um número par, qual é o resto da divisão da soma obtida por 2?
47) Um número dividido por 9 dá de resto 5. Qual é o resto da divisão desse número por 3?
48) Um número é divisível por 2 e dividido por 5 dá de resto 2. Qual é o resto da divisão daquele número por 10?
49) Um número não é divisível por 2 e dividido por 5 dá de resto 2. Qual é o resto da divisão por 10?
50) Qual é o menor número que se deve subtrair a 2024 para se obter um número divisível por 2, 3 e 5?
51) Qual é o menor número diferente de zero pelo qual se deve multiplicar 1395 para se obter um número divisível por 9?
52) Qual é o menor número que se deve adicionar a 7036 de forma a obter um número que dividido por 100 dá de resto 8?
53) Qual é o menor número que se deve subtrair a 1984 de forma a obter outro número que dividido por 9 dá de resto 4?
54) Qual é o menor número que se deve adicionar a 30 432 de forma a obter um número que dividido por 1000 dá de resto 524?
55) Determinar o menor número que se deve subtrair a 534 para se obter um número que seja ao mesmo tempo divisível por 3 e por 10.
56) Determinar o menor número que se deve adicionar a 7023 para se obter um número que seja ao mesmo tempo divisível por 5 e por 9.
57) Determinar o menor número que se deve adicionar a 72 504 para se obter um número que seja ao mesmo tempo divisível por 9 e por 100.
58) Determinar o número compreendido entre 100 e 200 que é divisível por 6 e por 10.
59) Determinar o número compreendido entre 1000 e 2000 que é divisível por 9 e por 100.
60) Determinar os números compreendidos entre 400 e 500 que são divisíveis por 3 e por 10.

Figura 7: Capítulo I; oitava e nona páginas.



126

61) Escrever o menor número de quatro algarismos que seja divisível por 9.

62) Escrever o maior número de três algarismos que é divisível por 2 e por 3.

63) Qual é o menor número, formado só com algarismos 2, que é divisível por 3?

64) Qual é o menor número, formado só com algarismos 6, que é divisível por 9?

65) Escrever o número de três algarismos terminado em 56 que é divisível por 9.

66) Escrever o número de quatro algarismos começado por 37 que é divisível por 9 e por 10.

67) Escrever o menor número de três algarismos diferentes que seja divisível por 3 e por 5.

68) Escrever o menor número de três algarismos diferentes que seja divisível por 9 e por 10.

69) Substituir a no número 43a84 por um algarismo de forma que o número obtido seja divisível por 9.

70) Determinar o valor do algarismo x no número 1909x de forma que o número obtido seja divisível por 9.

71) Substituir por algarismos a no número 4a52 de forma que os números obtidos sejam divisíveis por 3.

72) Dizer que algarismo deve substituir a no número 41a8 para se obter um número que dividido por 9 dê de resto 2.

73) Dizer por que algarismo se deve substituir x no número 8352x para que o número obtido seja divisível por 9.

74) Substituir por algarismos x no número 75x3 de forma a se obterem números divisíveis por 3.

75) Dizer que algarismo deve substituir a no número 506a7 para se obter um número que dividido por 9 dê de resto 6.

76) Por que algarismo se deve substituir x no número 854x de forma que o número obtido, dividido por 3, dê de resto 2?

77) Por que algarismos se deve substituir a no número 5a34 de forma que os números obtidos, divididos por 3, dêem de resto 2?

78) Dizer por que algarismo se deve substituir a no número 5725a para ser divisível por 2 e por 9.

127

79) Dizer por que algarismo se deve substituir a no número 3858a para se obter um número divisível por 3 e por 5.

80) Dizer por que algarismo se deve substituir x no número 837x para se obter um número divisível por 2 e por 3.

81) Determinar os algarismos a e b no número 78ab de forma a obter um número divisível por 9 e por 10.

82) Determinar os valores que devem ter os algarismos x e y no número 432xy de forma a obter um número divisível por 5 e por 9.

83) Determinar os valores que devem ter os algarismos x e y no número 765xy de forma a obter números que divididos por 5 e por 9 dêem de restos, respectivamente, 2 e 6.

84) Determinar os valores que devem ter os algarismos x e y no número 832xy de forma a obter números que divididos por 10 dêem de resto 8 e sejam divisíveis por 3.

85) Por que algarismos se devem substituir x e y no número 578xy de forma a obter números divisíveis por 9 e que divididos por 5 dêem de resto 2?

86) Determinar os valores que podem ter os algarismos a, b e c no número 72abc, de forma a obter números que divididos por 9 dêem de resto 6 e divididos por 100 dêem de resto 8.

87) Determinar os valores que devem ter os algarismos x, y e z no número 8xyz de forma a obter um número divisível por 9 e por 100.

88) Determinar os valores que devem ter os algarismos x, y e z no número 47xyz de forma a obter um número divisível por 100 e que dividido por 9 dê de resto 2.

Completar as seguintes frases:

89) O número inteiro que é divisor de qualquer número é.....

90) Quando se divide um número por um dos seus divisores, o resto da divisão efectuada é igual a.....

91) Os algarismos que se podem escrever a seguir a 789 de forma a se obterem números de 4 algarismos, divisíveis por 2, são.....

92) O maior divisor de um número é.....

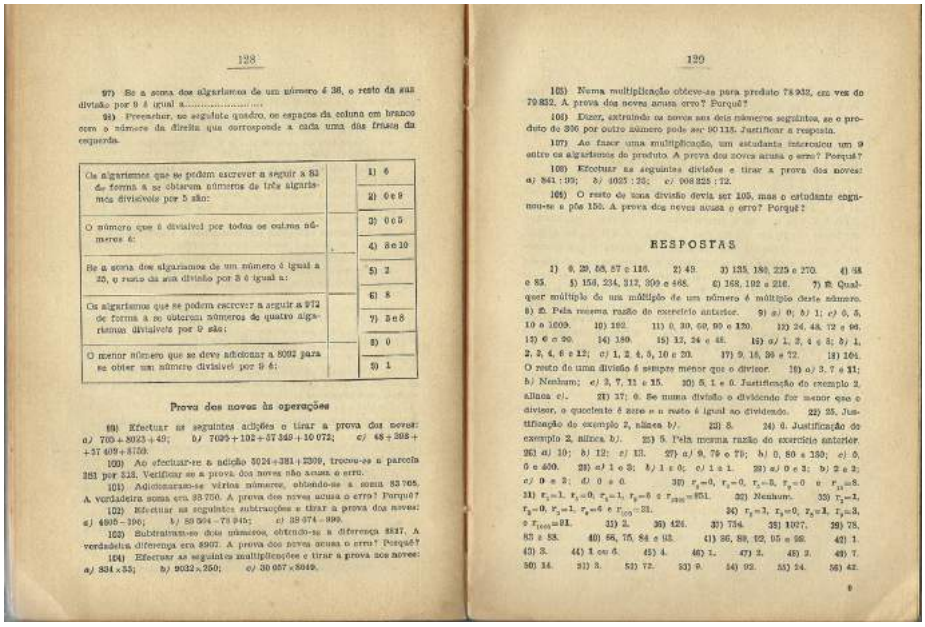
93) A soma de dois números pares é sempre um número.....

94) Multiplicando um número por qualquer número inteiro, obtém-se um..... daquele número.

95) O produto de dois números ímpares é um número.....

96) A diferença de dois números ímpares é um número.....

Figura 8: Capítulo I; décima e décima primeira páginas.



128

97) Se a soma dos algarismos de um número é 36, o resto da sua divisão por 9 é igual a.....

98) Preencher, no seguinte quadro, os espaços da coluna em branco com o número da direita que corresponde a cada uma das frases da esquerda.

Os algarismos que se podem escrever a seguir a 83 de forma a se obterem números de três algarismos divisíveis por 5 são:	1) 6
	2) 0 e 9
O número que é divisível por todos os outros números é:	3) 0 e 5
	4) 3 e 10
Se a soma dos algarismos de um número é igual a 25, o resto da sua divisão por 3 é igual a:	5) 2
	6) 8
Os algarismos que se podem escrever a seguir a 972 de forma a se obterem números de quatro algarismos divisíveis por 9 são:	7) 3 e 8
	8) 0
O menor número que se deve adicionar a 8092 para se obter um número divisível por 9 é:	9) 1

Prova dos noves às operações

99) Efectuar as seguintes adições e tirar a prova dos noves: *a)* 705 + 8023 + 49; *b)* 7025 + 102 + 57 349 + 10 072; *c)* 48 + 398 + + 57 409 + 8150.

100) Ao efectuar-se a adição 5024 + 381 + 2309, trocou-se a parcela 283 por 213. Verificou-se a prova dos noves não acusa o erro.

101) Adicionaram-se várias números, obtendo-se a soma 83 765. A verdadeira soma era 83 750. A prova dos noves acusa o erro? Porquê?

102) Efectuar as seguintes subtracções e tirar a prova dos noves: *a)* 4905 − 396; *b)* 89 504 − 78 945; *c)* 38 074 − 899.

103) Subtraíram-se dois números, obtendo-se a diferença 8837. A verdadeira diferença era 8907. A prova dos noves acusa o erro? Porquê?

104) Efectuar as seguintes multiplicações e tirar a prova nos noves: *a)* 834 × 53; *b)* 9032 × 250; *c)* 30 057 × 8049.

129

105) Numa multiplicação obteve-se para produto 78 932, em vez de 79 832. A prova dos noves acusa erro? Porquê?

106) Dizer, extraindo os noves aos dois números seguintes, se o produto de 336 por outro número pode ser 90 115. Justificar a resposta.

107) Ao fazer uma multiplicação, um estudante intercalou um 9 entre os algarismos do produto. A prova dos noves acusa o erro? Porquê?

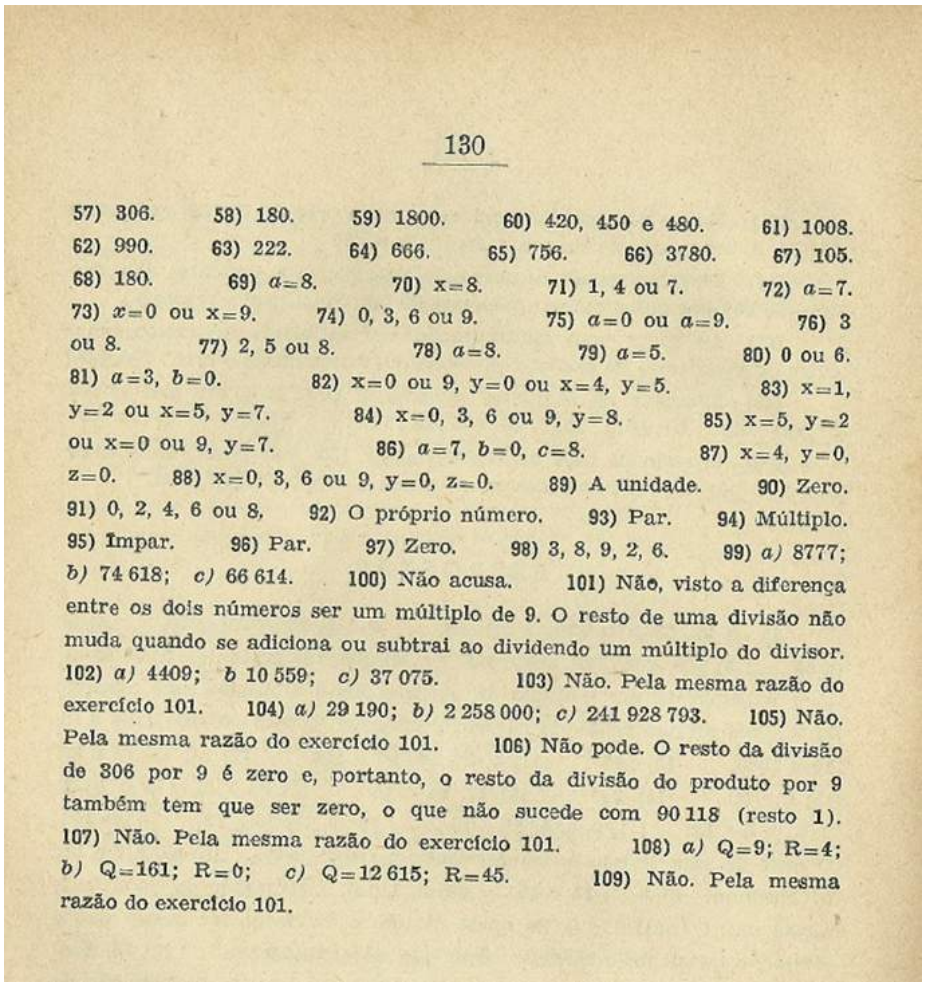
108) Efectuar as seguintes divisões e tirar a prova dos noves: *a)* 841 : 93; *b)* 4025 : 26; *c)* 908 325 : 72.

109) O resto de uma divisão devia ser 105, mas o estudante enganou-se e pôs 150. A prova dos noves acusa o erro? Porquê?

RESPOSTAS

1) 9, 29, 58, 87 e 116. 2) 49. 3) 135, 180, 225 e 270. 4) 48 e 83. 5) 156, 234, 312, 390 e 468. 6) 168, 192 e 216. 7) 2. Qualquer múltiplo de um múltiplo de um número é múltiplo deste número. 8) 2. Pela mesma razão do exercício anterior. 9) *a)* 0; *b)* 1; *c)* 0, 5, 10 e 1009. 10) 192. 11) 0, 30, 60, 90 e 120. 12) 24, 48, 72 e 96. 13) 6 e 90. 14) 180. 15) 12, 24 e 48. 16) *a)* 1, 2, 4 e 8; *b)* 1, 2, 3, 4, 6 e 12; *c)* 1, 2, 4, 5, 10 e 20. 17) 9, 18, 36 e 72. 18) 104. O resto de uma divisão é sempre menor que o divisor. 19) *a)* 3, 7 e 11; *b)* Nenhum; *c)* 3, 7, 11 e 15. 20) 5, 1 e 0. Justificação do exemplo 2, alínea *c)*. 21) 37; 0. Se numa divisão o dividendo for menor que o divisor, o quociente é zero e o resto é igual ao dividendo. 22) 25. Justificação do exemplo 2, alínea *b)*. 23) 8. 24) 0. Justificação do exemplo 2, alínea *b)*. 25) 5. Pela mesma razão do exercício anterior. 26) *a)* 10; *b)* 12; *c)* 13. 27) *a)* 9, 79 e 79; *b)* 0, 80 e 150; *c)* 0, 5 e 400. 28) *a)* 1 e 3; *b)* 1 e 0; *c)* 1 e 1. 29) *a)* 0 e 3; *b)* 2 e 2; *c)* 0 e 2; *d)* 0 e 0. 30) $r_3=0$, $r_5=0$, $r_7=5$, $r_9=0$ e $r_{11}=8$. 31) $r_2=1$, $r_3=0$, $r_5=1$, $r_9=6$ e $r_{100}=951$. 32) Nenhum. 33) $r_2=1$, $r_3=0$, $r_5=1$, $r_9=4$ e $r_{100}=21$. 34) $r_2=1$, $r_3=0$, $r_5=1$, $r_9=3$, e $r_{1000}=81$. 35) 2. 36) 424. 37) 734. 38) 1007. 39) 78, 83 e 88. 40) 66, 75, 84 e 93. 41) 86, 89, 92, 95 e 98. 42) 1. 43) 3. 44) 1 ou 6. 45) 4. 46) 1. 47) 2. 48) 2. 49) 7. 50) 14. 51) 3. 52) 72. 53) 9. 54) 92. 55) 24. 56) 42.

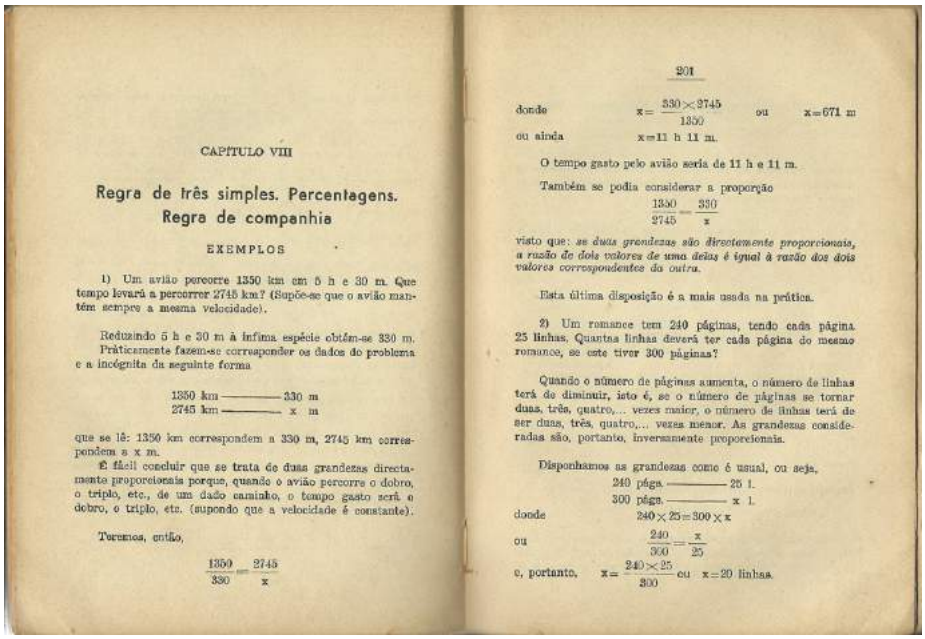
Figura 9: Capítulo I; décima segunda e décima terceira páginas.



130

57) 306. 58) 180. 59) 1800. 60) 420, 450 e 480. 61) 1008. 62) 990. 63) 222. 64) 666. 65) 756. 66) 3780. 67) 105. 68) 180. 69) $a=8$. 70) $x=8$. 71) 1, 4 ou 7. 72) $a=7$. 73) $x=0$ ou $x=9$. 74) 0, 3, 6 ou 9. 75) $a=0$ ou $a=9$. 76) 3 ou 8. 77) 2, 5 ou 8. 78) $a=8$. 79) $a=5$. 80) 0 ou 6. 81) $a=3$, $b=0$. 82) $x=0$ ou 9, $y=0$ ou $x=4$, $y=5$. 83) $x=1$, $y=2$ ou $x=5$, $y=7$. 84) $x=0$, 3, 6 ou 9, $y=8$. 85) $x=5$, $y=2$ ou $x=0$ ou 9, $y=7$. 86) $a=7$, $b=0$, $c=8$. 87) $x=4$, $y=0$, $z=0$. 88) $x=0$, 3, 6 ou 9, $y=0$, $z=0$. 89) A unidade. 90) Zero. 91) 0, 2, 4, 6 ou 8. 92) O próprio número. 93) Par. 94) Múltiplo. 95) Impar. 96) Par. 97) Zero. 98) 3, 8, 9, 2, 6. 99) *a)* 8777; *b)* 74 618; *c)* 66 614. 100) Não acusa. 101) Não, visto a diferença entre os dois números ser um múltiplo de 9. O resto de uma divisão não muda quando se adiciona ou subtrai ao dividendo um múltiplo do divisor. 102) *a)* 4409; *b* 10 559; *c)* 37 075. 103) Não. Pela mesma razão do exercício 101. 104) *a)* 29 190; *b)* 2 258 000; *c)* 241 928 793. 105) Não. Pela mesma razão do exercício 101. 106) Não pode. O resto da divisão de 306 por 9 é zero e, portanto, o resto da divisão do produto por 9 também tem que ser zero, o que não sucede com 90 118 (resto 1). 107) Não. Pela mesma razão do exercício 101. 108) *a)* $Q=9$; $R=4$; *b)* $Q=161$; $R=0$; *c)* $Q=12\,615$; $R=45$. 109) Não. Pela mesma razão do exercício 101.

Figura 10: Capítulo I; décima quarta página.



CAPÍTULO VIII

Regra de três simples. Percentagens. Regra de companhia

EXEMPLOS

1) Um avião percorre 1350 km em 5 h e 30 m. Que tempo levará a percorrer 2745 km? (Supõe-se que o avião mantém sempre a mesma velocidade).

Reduzindo 5 h e 30 m à ínfima espécie obtém-se 330 m. Pràticamente fazem-se corresponder os dados do problema e a incógnita da seguinte forma

1350 km ——— 330 m
2745 km ——— x m

que se lê: 1350 km correspondem a 330 m, 2745 km correspondem a x m.

É fácil concluir que se trata de duas grandezas directamente proporcionais porque, quando o avião percorre o dobro, o triplo, etc., de um dado caminho, o tempo gasto será o dobro, o triplo, etc. (supondo que a velocidade é constante).

Teremos, então,

$$\frac{1350}{330}=\frac{2745}{x}$$

201

donde $x=\frac{330\times 2745}{1350}$ ou $x=671$ m

ou ainda $x=11$ h 11 m.

O tempo gasto pelo avião seria de 11 h e 11 m.

Também se podia considerar a proporção

$$\frac{1350}{2745}=\frac{330}{x}$$

visto que: *se duas grandezas são directamente proporcionais, a razão de dois valores de uma delas é igual à razão dos dois valores correspondentes da outra.*

Esta última disposição é a mais usada na prática.

2) Um romance tem 240 páginas, tendo cada página 25 linhas. Quantas linhas deverá ter cada página do mesmo romance, se este tiver 300 páginas?

Quando o número de páginas aumenta, o número de linhas terá de diminuir, isto é, se o número de páginas se tornar duas, três, quatro,... vezes maior, o número de linhas terá de ser duas, três, quatro,... vezes menor. As grandezas consideradas são, portanto, inversamente proporcionais.

Disponhamos as grandezas como é usual, ou seja,

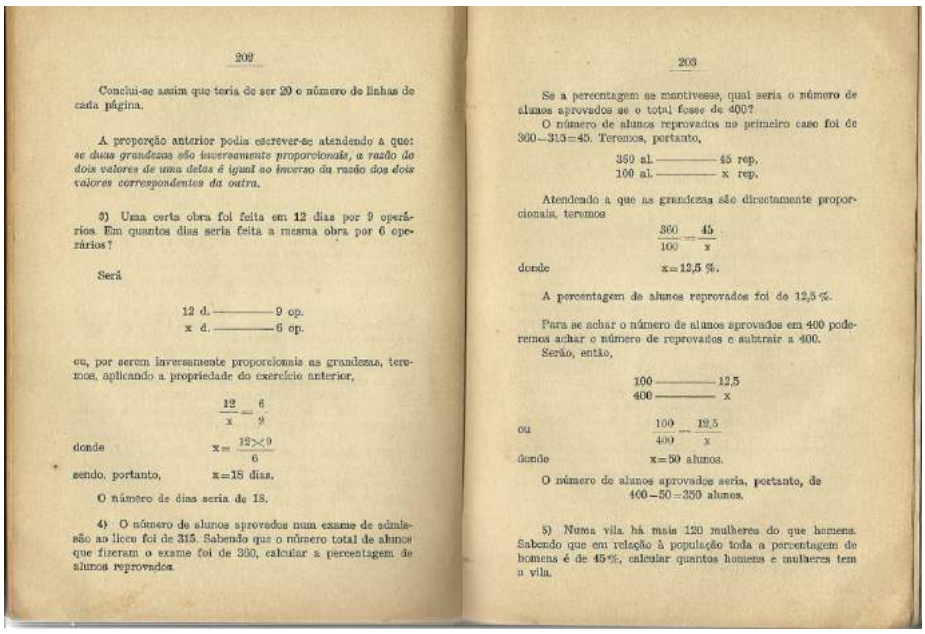
240 págs. ——— 25 l.
300 págs. ——— x l.

donde $240\times 25=300\times x$

ou $\frac{240}{300}=\frac{x}{25}$

e, portanto, $x=\frac{240\times 25}{300}$ ou $x=20$ linhas.

Figura 11: Capítulo VIII; primeira e segunda páginas.



202

Conclui-se assim que teria de ser 20 o número de linhas de cada página.

A proporção anterior podia escrever-se atendendo a que: *se duas grandezas são inversamente proporcionais, a razão de dois valores de uma delas é igual ao inverso da razão dos dois valores correspondentes da outra.*

3) Uma certa obra foi feita em 12 dias por 9 operários. Em quantos dias seria feita a mesma obra por 6 operários?

Será

12 d. ——— 9 op.
x d. ——— 6 op.

ou, por serem inversamente proporcionais as grandezas, teremos, aplicando a propriedade do exercício anterior,

$$\frac{12}{x}=\frac{6}{9}$$

donde $x=\frac{12\times 9}{6}$

sendo, portanto, $x=18$ dias.

O número de dias seria de 18.

4) O número de alunos aprovados num exame de admissão ao liceu foi de 315. Sabendo que o número total de alunos que fizeram o exame foi de 360, calcular a percentagem de alunos reprovados.

203

Se a percentagem se mantivesse, qual seria o número de alunos aprovados se o total fosse de 400?

O número de alunos reprovados no primeiro caso foi de $360-315=45$. Teremos, portanto,

360 al. ——— 45 rep.
100 al. ——— x rep.

Atendendo a que as grandezas são directamente proporcionais, teremos

$$\frac{360}{100}=\frac{45}{x}$$

donde $x=12{,}5$ %.

A percentagem de alunos reprovados foi de 12,5 %.

Para se achar o número de alunos aprovados em 400 poderemos achar o número de reprovados e subtrair a 400.

Serão, então,

100 ——— 12,5
400 ——— x

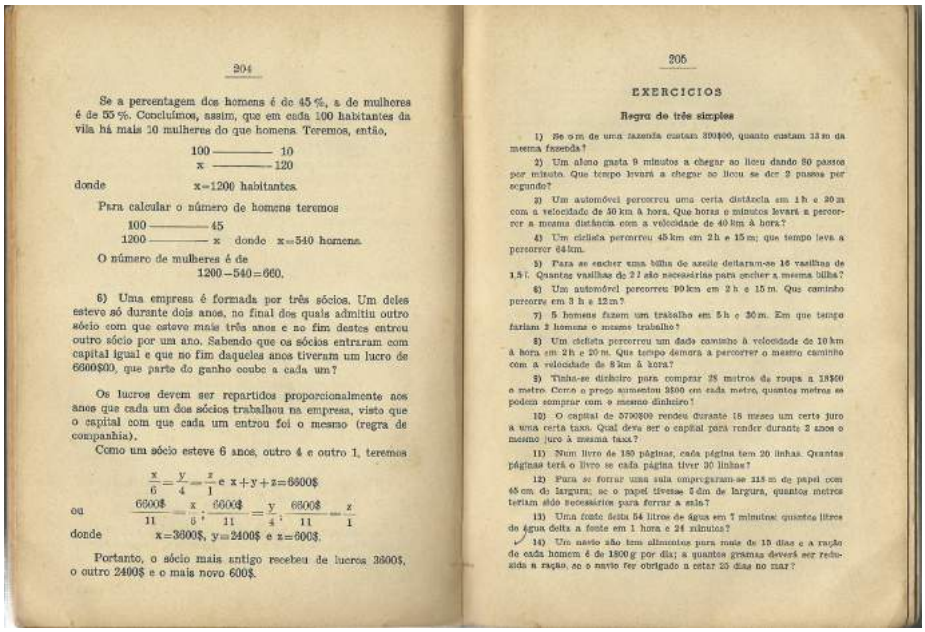
ou $\frac{100}{400}=\frac{12{,}5}{x}$

donde $x=50$ alunos.

O número de alunos aprovados seria, portanto, de $400-50=350$ alunos.

5) Numa vila há mais 120 mulheres do que homens. Sabendo que em relação à população toda a percentagem de homens é de 45 %, calcular quantos homens e mulheres tem a vila.

Figura 12: Capítulo VIII; terceira e quarta páginas.



204

Se a percentagem dos homens é de 45 %, a de mulheres é de 55 %. Concluímos, assim, que em cada 100 habitantes da vila há mais 10 mulheres do que homens. Teremos, então,

$$100 \text{ ——— } 10$$
$$x \text{ ——— } 120$$

donde $x=1200$ habitantes.

Para calcular o número de homens teremos

$$100 \text{ ——— } 45$$
$$1200 \text{ ——— } x \quad \text{donde} \quad x=540 \text{ homens.}$$

O número de mulheres é de

$$1200-540=660.$$

6) Uma empresa é formada por três sócios. Um deles esteve só durante dois anos, no final dos quais admitiu outro sócio com que esteve mais três anos e no fim destes entrou outro sócio por um ano. Sabendo que os sócios entraram com capital igual e que no fim daqueles anos tiveram um lucro de 6600$00, que parte do ganho coube a cada um?

Os lucros devem ser repartidos proporcionalmente aos anos que cada um dos sócios trabalhou na empresa, visto que o capital com que cada um entrou foi o mesmo (regra de companhia).

Como um sócio esteve 6 anos, outro 4 e outro 1, teremos

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1} \text{ e } x+y+z=6600\$$$

ou

$$\frac{6600\$}{11}=\frac{x}{6};\ \frac{6600\$}{11}=\frac{y}{4};\ \frac{6600\$}{11}=\frac{z}{1}$$

donde $x=3600\$,\ y=2400\$$ e $z=600\$$.

Portanto, o sócio mais antigo recebeu de lucros 3600$, o outro 2400$ e o mais novo 600$.

205

EXERCICIOS

Regra de três simples

1) Se 9 m de uma fazenda custam 300$00, quanto custam 13 m da mesma fazenda?

2) Um aluno gasta 9 minutos a chegar ao liceu dando 80 passos por minuto. Que tempo levará a chegar ao liceu se der 2 passos por segundo?

3) Um automóvel percorreu uma certa distância em 1 h e 20 m com a velocidade de 50 km à hora. Que horas e minutos levará a percorrer a mesma distância com a velocidade de 40 km à hora?

4) Um ciclista percorreu 45 km em 2 h e 15 m; que tempo leva a percorrer 64 km.

5) Para se encher uma bilha de azeite deitaram-se 16 vasilhas de 1,5 l. Quantas vasilhas de 2 l são necessárias para encher a mesma bilha?

6) Um automóvel percorreu 90 km em 2 h e 15 m. Que caminho percorre em 3 h e 12 m?

7) 5 homens fazem um trabalho em 5 h e 30 m. Em que tempo fariam 2 homens o mesmo trabalho?

8) Um ciclista percorreu um dado caminho à velocidade de 10 km à hora em 2 h e 20 m. Que tempo demora a percorrer o mesmo caminho com a velocidade de 8 km à hora?

9) Tinha-se dinheiro para comprar 28 metros de roupa a 18$00 o metro. Como o preço aumentou 2$00 em cada metro, quantos metros se podem comprar com o mesmo dinheiro?

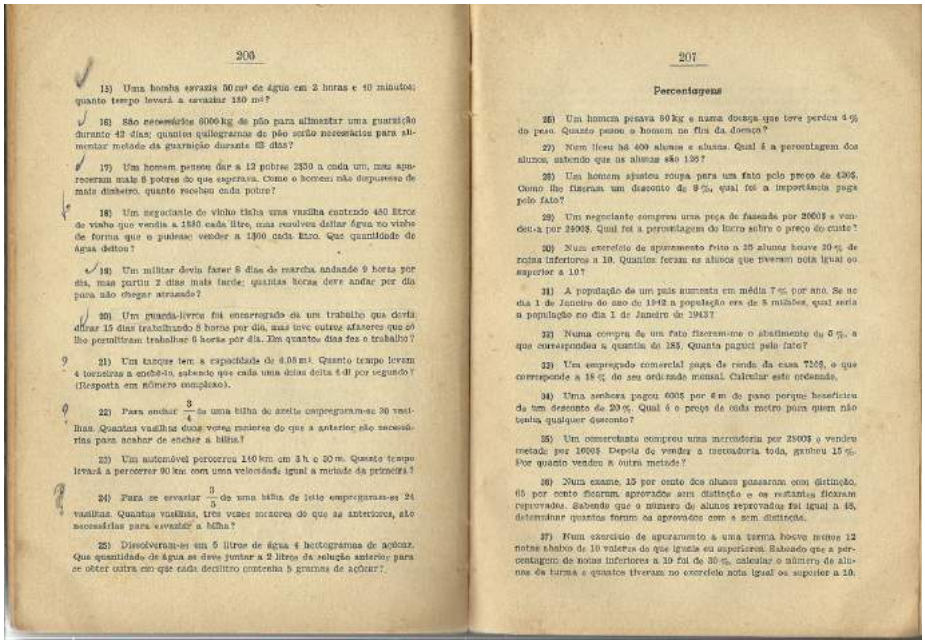
10) O capital de 5700$00 rendeu durante 18 meses um certo juro a uma certa taxa. Qual deve ser o capital para render durante 2 anos o mesmo juro à mesma taxa?

11) Num livro de 180 páginas, cada página tem 20 linhas. Quantas páginas terá o livro se cada página tiver 30 linhas?

12) Para se forrar uma sala empregaram-se 218 m de papel com 45 cm de largura; se o papel tivesse 6 dm de largura, quantos metros teriam sido necessários para forrar a sala?

13) Uma fonte deita 54 litros de água em 7 minutos; quantos litros de água deita a fonte em 1 hora e 24 minutos?

14) Um navio não tem alimentos para mais de 15 dias e a ração de cada homem é de 1800 g por dia; a quantos gramas deverá ser reduzida a ração, se o navio for obrigado a estar 25 dias no mar?



206

15) Uma bomba esvazia 50 m³ de água em 2 horas e 40 minutos; quanto tempo levará a esvaziar 150 m³?

16) São necessários 6000 kg de pão para alimentar uma guarnição durante 42 dias; quantos quilogramas de pão serão necessários para alimentar metade da guarnição durante 63 dias?

17) Um homem pensou dar a 12 pobres 2$50 a cada um, mas apareceram mais 8 pobres do que esperava. Como o homem não dispusesse de mais dinheiro, quanto recebeu cada pobre?

18) Um negociante de vinho tinha uma vasilha contendo 450 litros de vinho que vendia a 18$0 cada litro, mas resolveu deitar água no vinho de forma que o pudesse vender a 15$00 cada litro. Que quantidade de água deitou?

19) Um militar devia fazer 8 dias de marcha andando 9 horas por dia, mas partiu 2 dias mais tarde; quantas horas deve andar por dia para não chegar atrasado?

20) Um guarda-livros foi encarregado de um trabalho que devia durar 15 dias trabalhando 8 horas por dia, mas teve outros afazeres que só lhe permitiram trabalhar 6 horas por dia. Em quantos dias fez o trabalho?

21) Um tanque tem a capacidade de 6.08 m³. Quanto tempo levam 4 torneiras a enchê-lo, sabendo que cada uma deles deita 6 dl por segundo? (Resposta em número complexo).

22) Para encher $\frac{3}{4}$ de uma bilha de azeite empregaram-se 30 vasilhas. Quantas vasilhas duas vezes maiores do que a anterior são necessárias para acabar de encher a bilha?

23) Um automóvel percorreu 140 km em 3 h e 20 m. Quanto tempo levará a percorrer 90 km com uma velocidade igual a metade da primeira?

24) Para se esvaziar $\frac{3}{5}$ de uma bilha de leite empregaram-se 24 vasilhas. Quantas vasilhas, três vezes menores do que as anteriores, são necessárias para esvaziar a bilha?

25) Dissolveram-se em 5 litros de água 4 hectogramas de açúcar. Que quantidade de água se deve juntar a 2 litros da solução anterior para se obter calda em que cada decilitro contenha 5 gramas de açúcar?

207

Percentagens

26) Um homem pesava 80 kg e numa doença que teve perdeu 4 % do peso. Quanto pesou o homem no fim da doença?

27) Num liceu há 400 alunos e alunas. Qual é a percentagem dos alunos, sabendo que as alunas são 136?

28) Um homem ajustou roupa para um fato pelo preço de 430$. Como lhe fizeram um desconto de 8 %, qual foi a importância paga pelo fato?

29) Um negociante comprou uma peça de fazenda por 2000$ e vendeu-a por 2500$. Qual foi a percentagem do lucro sobre o preço do custo?

30) Num exercício de aparamento feito a 25 alunos houve 20 % de notas inferiores a 10. Quantos foram os alunos que tiveram nota igual ou superior a 10?

31) A população de um país aumenta em média 7 % por ano. Se no dia 1 de Janeiro do ano de 1942 a população era de 8 milhões, qual seria a população no dia 1 de Janeiro de 1943?

32) Numa compra de um fato fizeram-me o abatimento de 5 %, a que corresponde a quantia de 18$. Quanto paguei pelo fato?

33) Um empregado comercial paga de renda da casa 720$, o que corresponde a 18 % do seu ordenado mensal. Calcular este ordenado.

34) Uma senhora pagou 600$ por 6 m de pano porque beneficiou de um desconto de 20 %. Qual é o preço de cada metro para quem não tenha qualquer desconto?

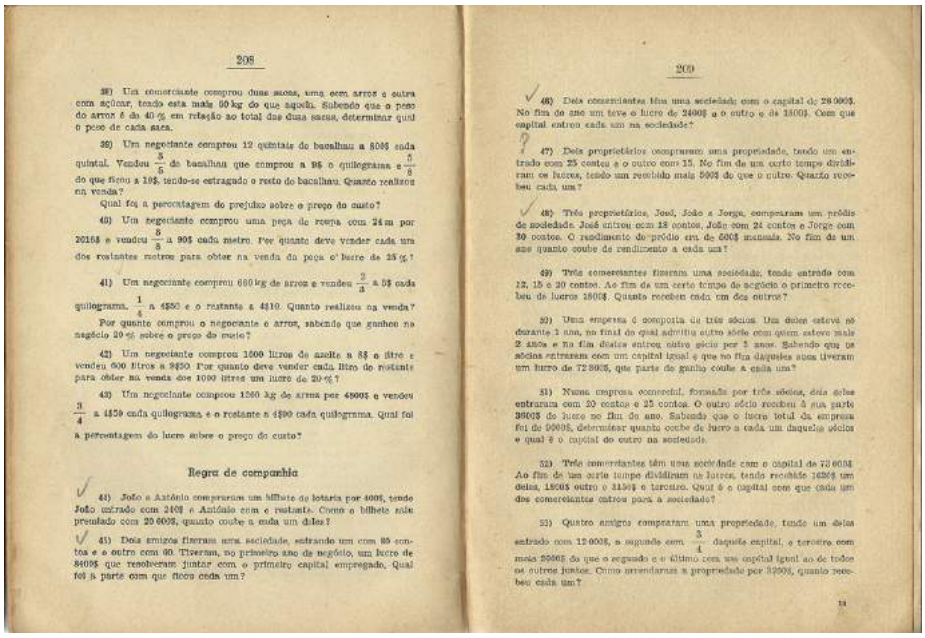
35) Um comerciante comprou uma mercadoria por 2800$ e vendeu metade por 1600$. Depois de vender a mercadoria toda, ganhou 15 %. Por quanto vendeu a outra metade?

36) Num exame, 15 por cento dos alunos passaram com distinção, 65 por cento ficaram aprovados sem distinção e os restantes ficaram reprovados. Sabendo que o número de alunos reprovados foi igual a 48, determinar quantos foram os aprovados com e sem distinção.

37) Num exercício de aparamento a uma turma houve menos 12 notas abaixo de 10 valores do que iguais ou superiores. Sabendo que a percentagem de notas inferiores a 10 foi de 30 %, calcular o número de alunos da turma e quantos tiveram no exercício nota igual ou superior a 10.

Figura 13: Capítulo VIII; quinta e sexta páginas.

Figura 14: Capítulo VIII; sétima e oitava páginas.



208

38) Um comerciante comprou duas sacas, uma com arroz e outra com açúcar, tendo esta mais 50 kg do que aquela. Sabendo que o peso do arroz é de 40 % em relação ao total das duas sacas, determinar qual o peso de cada saca.

39) Um negociante comprou 12 quintais de bacalhau a 80$ cada quintal. Vendeu $\frac{3}{5}$ do bacalhau que comprou a 95 o quilograma e $\frac{1}{3}$ do que ficou a 19$, tendo-se estragado o resto do bacalhau. Quanto realizou em venda?

Qual foi a percentagem do prejuízo sobre o preço do custo?

40) Um negociante comprou uma peça de renda com 24 m por 2016$ e vendeu $\frac{3}{8}$ a 90$ cada metro. Por quanto deve vender cada um dos restantes metros para obter na venda da peça o lucro de 25 %?

41) Um negociante comprou 680 kg de arroz e vendeu $\frac{2}{3}$ a 5$ cada quilograma, $\frac{1}{4}$ a 4$50 e o restante a 4$10. Quanto realizou na venda?

Por quanto comprou o negociante o arroz, sabendo que ganhou no negócio 20 % sobre o preço do custo?

42) Um negociante comprou 1000 litros de aguardente a 8$ o litro e vendeu 600 litros a 9$50. Por quanto deve vender cada litro do restante para obter na venda dos 1000 litros um lucro de 20 %?

43) Um negociante comprou 1260 kg de arroz por 4800$ e vendeu $\frac{3}{4}$ a 4$50 cada quilograma e o restante a 4$90 cada quilograma. Qual foi a percentagem do lucro sobre o preço do custo?

Regra de companhia

44) João e António compraram um bilhete de lotaria por 400$, tendo João entrado com 240$ e António com o restante. Como o bilhete saiu premiado com 20 000$, quanto coube a cada um deles?

45) Dois amigos fizeram uma sociedade, entrando um com 80 contos e o outro com 60. Tiveram, no primeiro ano de negócio, um lucro de 8400$ que resolveram juntar com o primeiro capital empregado. Qual foi a parte com que ficou cada um?

209

46) Dois comerciantes têm uma sociedade com o capital de 28 000$. No fim de ano um teve o lucro de 2400$ e o outro o de 1800$. Com que capital entrou cada um na sociedade?

47) Dois proprietários compraram uma propriedade, tendo um entrado com 25 contos e o outro com 15. No fim de um certo tempo dividiram os lucros, tendo um recebido mais 500$ do que o outro. Quanto recebeu cada um?

48) Três proprietários, José, João e Jorge, compraram um prédio de sociedade. José entrou com 18 contos, João com 24 contos e Jorge com 30 contos. O rendimento do prédio era de 600$ mensais. No fim de um ano quanto coube de rendimento a cada um?

49) Três comerciantes fizeram uma sociedade, tendo entrado com 12, 15 e 20 contos. Ao fim de um certo tempo de negócio o primeiro recebeu de lucros 180$. Quanto receberam cada um dos outros?

50) Uma empresa é composta de três sócios. Um deles esteve só durante 1 ano, no final do qual admitiu outro sócio com quem esteve mais 2 anos e no fim disto entrou outro sócio por 3 anos. Sabendo que os sócios entraram com um capital igual e que no fim daqueles anos tiveram um lucro de 72 000$, que parte do ganho coube a cada um?

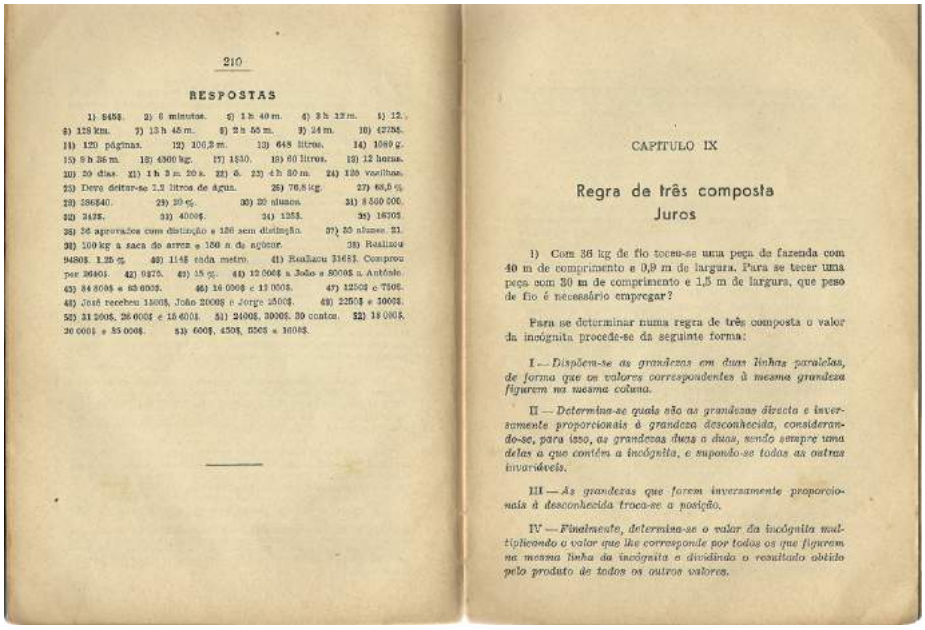
51) Numa empresa comercial, formada por três sócios, dois deles entraram com 20 contos e 25 contos. O outro sócio recebeu à sua parte 3600$ de lucro no fim do ano. Sabendo que o lucro total da empresa foi de 9000$, determinar quanto coube de lucro a cada um daqueles sócios e qual é o capital do outro na sociedade.

52) Três comerciantes têm uma sociedade com o capital de 73 600$. Ao fim de um certo tempo dividiram os lucros, tendo recebido 16200$ um deles, 18000$ outro e 21500$ o terceiro. Qual é o capital com que cada um dos comerciantes entrou para a sociedade?

53) Quatro amigos compraram uma propriedade, tendo um deles entrado com 12 000$, o segundo com $\frac{3}{4}$ daquele capital, o terceiro com mais 2000$ do que o segundo e o último com um capital igual ao de todos os outros juntos. Como arrendaram a propriedade por 32000$, quanto recebeu cada um?

14

Figura 15: Capítulo VIII; nona e décima páginas.



210

RESPOSTAS

1) 8450$. 2) 6 minutos. 3) 1 h 40 m. 4) 3 h 12 m. 5) 12. 6) 128 km. 7) 13 h 45 m. 8) 2 h 55 m. 9) 24 m. 10) 42750$. 11) 120 páginas. 12) 106,2 m. 13) 648 litros. 14) 1080 g. 15) 8 h 36 m. 16) 4800 kg. 17) 1$50. 18) 60 litros. 19) 12 horas. 20) 20 dias. 21) 1 h 3 m. 20 s. 22) 6. 23) 4 h 30 m. 24) 135 vasilhas. 25) Deve deitar-se 2,2 litros de água. 26) 76,8 kg. 27) 68,5 %. 28) 386$40. 29) 20 %. 30) 20 alunos. 31) 8 500 000. 32) 2425. 33) 4000$. 34) 1255. 35) 1870$. 36) 26 aprovados com distinção e 126 sem distinção. 37) 20 alunos. 38) 100 kg a saca do arroz e 150 a de açúcar. 39) Realizou 9480$. 1,25 %. 40) 114$ cada metro. 41) Realizou 3168$. Comprou por 2640$. 42) 9$75. 43) 15 %. 44) 12 000$ a João e 8000$ a António. 45) 84 000$ e 63 000$. 46) 16 000$ e 12 000$. 47) 1250$ e 750$. 48) José recebeu 180$, João 200$ e Jorge 250$. 49) 225$ e 300$. 50) 31 200$, 26 000$ e 15 600$. 51) 2400$, 3000$, 30 contos. 52) 18 000$, 20 000$ e 35 000$. 53) 600$, 450$, 525$ e 1050$.

CAPÍTULO IX

Regra de três composta
Juros

1) Com 36 kg de fio teceu-se uma peça de fazenda com 40 m de comprimento e 0,9 m de largura. Para se tecer uma peça com 30 m de comprimento e 1,5 m de largura, que peso de fio é necessário empregar?

Para se determinar numa regra de três composta o valor da incógnita procede-se da seguinte forma:

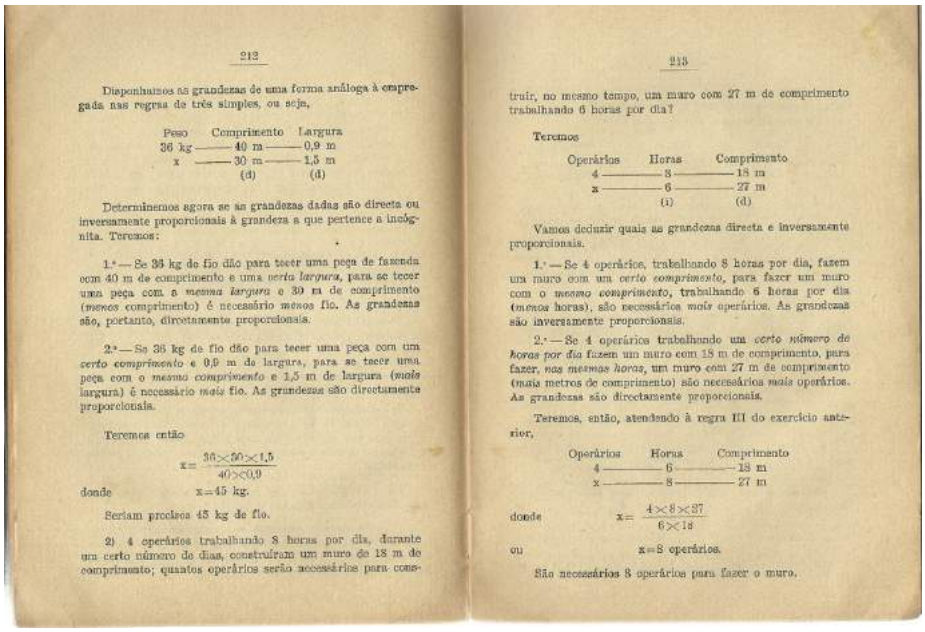
I — *Dispõem-se as grandezas em duas linhas paralelas, de forma que os valores correspondentes à mesma grandeza figurem na mesma coluna.*

II — *Determina-se quais são as grandezas directa e inversamente proporcionais à grandeza desconhecida, considerando-se, para isso, as grandezas duas a duas, sendo sempre uma delas a que contém a incógnita, e supondo-se todas as outras invariáveis.*

III — *As grandezas que forem inversamente proporcionais à desconhecida troca-se a posição.*

IV — *Finalmente, determina-se o valor da incógnita multiplicando o valor que lhe corresponde por todos os que figurem na mesma linha da incógnita e dividindo o resultado obtido pelo produto de todos os outros valores.*

Figura 16: Capítulo VIII; décima primeira página e Capítulo IX; primeira página.



212

Disponhamos as grandezas de uma forma análoga à empregada nas regras de três simples, ou seja,

Peso	Comprimento	Largura
36 kg	40 m	0,9 m
x	30 m	1,5 m
	(d)	(d)

Determinemos agora se as grandezas dadas são directa ou inversamente proporcionais à grandeza a que pertence a incógnita. Teremos:

1.º — Se 36 kg de fio dão para tecer uma peça de fazenda com 40 m de comprimento e uma *certa largura*, para se tecer uma peça com a *mesma largura* e 30 m de comprimento (*menos* comprimento) é necessário *menos* fio. As grandezas são, portanto, directamente proporcionais.

2.º — Se 36 kg de fio dão para tecer uma peça com um *certo comprimento* e 0,9 m de largura, para se tecer uma peça com o *mesmo comprimento* e 1,5 m de largura (*mais* largura) é necessário *mais* fio. As grandezas são directamente proporcionais.

Teremos então

$$x = \frac{36 \times 30 \times 1{,}5}{40 \times 0{,}9}$$

donde $x = 45$ kg.

Seriam precisos 45 kg de fio.

2) 4 operários trabalhando 8 horas por dia, durante um certo número de dias, construíram um muro de 18 m de comprimento; quantos operários serão necessários para construir, no mesmo tempo, um muro com 27 m de comprimento trabalhando 6 horas por dia?

213

Teremos

Operários	Horas	Comprimento
4	8	18 m
x	6	27 m
	(i)	(d)

Vamos deduzir quais as grandezas directa e inversamente proporcionais.

1.º — Se 4 operários, trabalhando 8 horas por dia, fazem um muro com um *certo comprimento*, para fazer um muro com o *mesmo comprimento*, trabalhando 6 horas por dia (*menos* horas), são necessários *mais* operários. As grandezas são inversamente proporcionais.

2.º — Se 4 operários trabalhando um *certo número de horas por dia* fazem um muro com 18 m de comprimento, para fazer, *nas mesmas horas*, um muro com 27 m de comprimento (mais metros de comprimento) são necessários *mais* operários. As grandezas são directamente proporcionais.

Teremos, então, atendendo à regra III do exercício anterior,

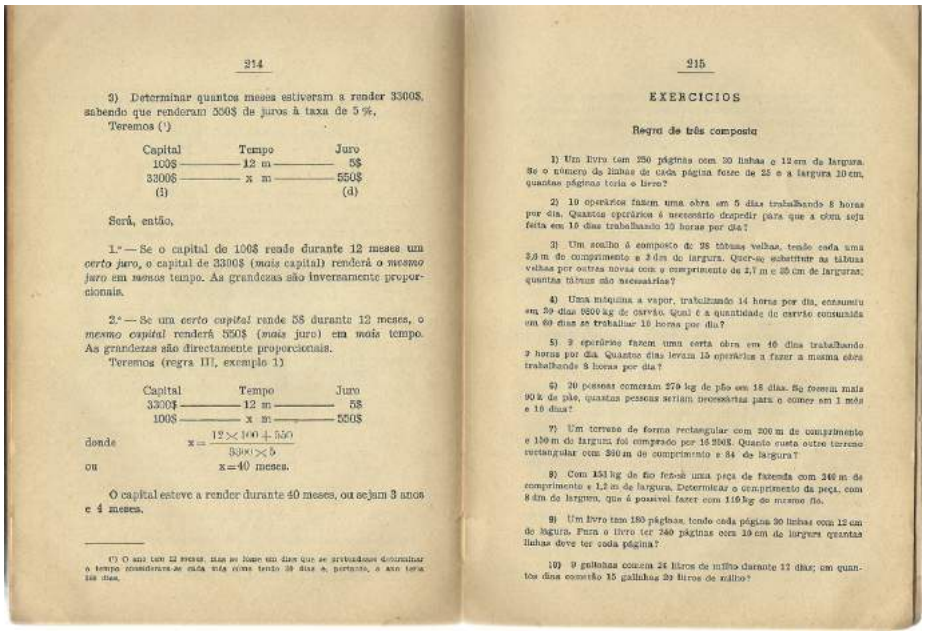
Operários	Horas	Comprimento
4	6	18 m
x	8	27 m

donde $x = \frac{4 \times 8 \times 27}{6 \times 18}$

ou $x = 8$ operários.

São necessários 8 operários para fazer o muro.

Figura 17: Capítulo IX; segunda e terceira páginas.



214

3) Determinar quantos meses estiveram a render 3300$, sabendo que renderam 550$ de juros à taxa de 5 %.

Teremos (1)

Capital	Tempo	Juro
100$	12 m	5$
3300$	x m	550$
(i)		(d)

Será, então,

1.º — Se o capital de 100$ rende durante 12 meses um *certo juro*, o capital de 3300$ (*mais* capital) renderá o *mesmo juro* em *menos* tempo. As grandezas são inversamente proporcionais.

2.º — Se um *certo capital* rende 5$ durante 12 meses, o *mesmo capital* renderá 550$ (*mais* juro) em *mais* tempo. As grandezas são directamente proporcionais.

Teremos (regra III, exemplo 1)

Capital	Tempo	Juro
3300$	12 m	5$
100$	x m	550$

donde $x = \frac{12 \times 100 \times 550}{3300 \times 5}$

ou $x = 40$ meses.

O capital esteve a render durante 40 meses, ou sejam 3 anos e 4 meses.

(1) O ano tem 12 meses, mas se fosse em dias que se pretendesse determinar o tempo consideram-se cada mês como tendo 30 dias e, portanto, o ano teria 360 dias.

215

EXERCÍCIOS

Regra de três composta

1) Um livro tem 250 páginas com 30 linhas e 12 cm de largura. Se o número de linhas de cada página fosse de 25 e a largura 10 cm, quantas páginas teria o livro?

2) 10 operários fazem uma obra em 5 dias trabalhando 8 horas por dia. Quantos operários é necessário despedir para que a obra seja feita em 15 dias trabalhando 10 horas por dia?

3) Um soalho é composto de 28 tábuas velhas, tendo cada uma 3,5 m de comprimento e 3 dm de largura. Quer-se substituir as tábuas velhas por outras novas com o comprimento de 2,7 m e 35 cm de largura; quantas tábuas são necessárias?

4) Uma máquina a vapor, trabalhando 14 horas por dia, consumiu em 30 dias 9600 kg de carvão. Qual é a quantidade de carvão consumida em 60 dias se trabalhar 16 horas por dia?

5) 9 operários fazem uma certa obra em 16 dias trabalhando 7 horas por dia. Quantos dias levam 15 operários a fazer a mesma obra trabalhando 8 horas por dia?

6) 20 pessoas comeram 270 kg de pão em 18 dias. Se fossem mais 90 k de pão, quantas pessoas seriam necessárias para o comer em 1 mês e 10 dias?

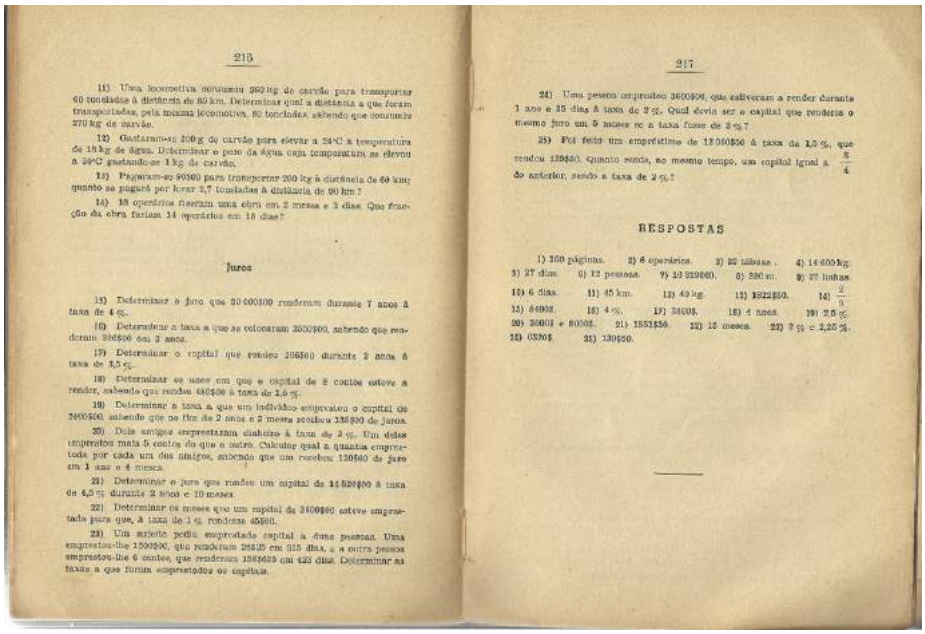
7) Um terreno de forma rectangular com 200 m de comprimento e 130 m de largura foi comprado por 16 200$. Quanto custa outro terreno rectangular com 360 m de comprimento e 84 de largura?

8) Com 151 kg de fio fez-se uma peça de fazenda com 240 m de comprimento e 1,2 m de largura. Determinar o comprimento da peça, com 8 dm de largura, que é possível fazer com 116 kg do mesmo fio.

9) Um livro tem 180 páginas, tendo cada página 30 linhas com 12 cm de largura. Para o livro ter 240 páginas com 20 cm de largura quantas linhas deve ter cada página?

10) 9 galinhas comem 24 litros de milho durante 12 dias; em quantos dias comerão 15 galinhas 30 litros de milho?

Figura 18: Capítulo IX; quarta e quinta páginas.



216

11) Uma locomotiva consumiu 362 kg de carvão para transportar 60 toneladas à distância de 80 km. Determinar qual a distância a que foram transportadas, pela mesma locomotiva, 80 toneladas sabendo que consumiu 270 kg de carvão.

12) Gastaram-se 200 g de carvão para elevar a 24°C a temperatura de 18 kg de água. Determinar o peso de água cuja temperatura se elevou a 24°C gastando-se 1 kg de carvão.

13) Pagaram-se 90$60 para transportar 200 kg à distância de 60 km; quanto se pagará por levar 2,7 toneladas à distância de 90 km?

14) 18 operários fizeram uma obra em 2 meses e 3 dias. Que fração da obra fariam 14 operários em 18 dias?

Juros

15) Determinar o juro que 30 000$00 renderam durante 7 anos à taxa de 4 %.

16) Determinar a taxa a que se colocaram 2000$00, sabendo que renderam 396$00 em 3 anos.

17) Determinar o capital que rendeu 206$60 durante 2 anos à taxa de 3,5 %.

18) Determinar os anos em que o capital de 8 contos esteve a render, sabendo que rendeu 480$00 à taxa de 1,6 %.

19) Determinar a taxa a que um indivíduo emprestou o capital de 2400$00, sabendo que no fim de 2 anos e 2 meses recebeu 135$00 de juros.

20) Dois amigos emprestaram dinheiro à taxa de 3 %. Um deles emprestou mais 5 contos do que o outro. Calcular qual a quantia emprestada por cada um dos amigos, sabendo que um recebeu 120$60 de juro em 1 ano e 4 meses.

21) Determinar o juro que rendeu um capital de 14 520$00 à taxa de 4,5 % durante 2 anos e 10 meses.

22) Determinar os meses que um capital de 2400$00 esteve emprestado para que, à taxa de 1 %, rendesse 45$00.

23) Um sujeito pediu emprestado capital a duas pessoas. Uma emprestou-lhe 1500$00, que renderam 28$25 em 315 dias, e a outra pessoa emprestou-lhe 6 contos, que renderam 158$025 em 423 dias. Determinar as taxas a que foram emprestados os capitais.

217

24) Uma pessoa emprestou 3600$00, que estiveram a render durante 1 ano e 35 dias à taxa de 2 %. Qual devia ser o capital que renderia o mesmo juro em 5 meses se a taxa fosse de 3 %?

25) Foi feito um empréstimo de 12 000$00 à taxa de 1,5 %, que rendeu 139$50. Quanto sendo, ao mesmo tempo, um capital igual a $\frac{3}{4}$ do anterior, sendo a taxa de 2 %?

RESPOSTAS

1) 300 páginas. 2) 6 operários. 3) 82 libras. 4) 14 600 kg. 5) 27 dias. 6) 12 pessoas. 7) 10 329$60. 8) 380 m. 9) 27 linhas. 10) 6 dias. 11) 45 km. 12) 49 kg. 13) 1822$50. 14) $\frac{2}{9}$. 15) 840$. 16) 4 %. 17) 34$06. 18) 4 anos. 19) 2,5 %. 20) 360$ e 800$. 21) 1851$50. 22) 15 meses. 23) 2 % e 2,25 %. 24) 6370$. 25) 130$00.

Agradecimento

Este trabalho foi financiado pelo CIDMA-Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e pela FCT-Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito do projecto UID/MAT/04106/2019.

Referências

[1] Fernandes, António do Nascimento Palma. *Exercícios de Geometria e Aritmética para o 2.º ano dos Liceus* (18.ª edição), Lisboa, 1964.