

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Jornal das Primeiras

# MATEMÁTICAS



QUADRADO



CÍRCULO



TRIÂNGULO  
ISÓSCELES



RETÂNGULO



HEXÁGONO



ELIPSE



PENTÁGONO



**Propriedade e Edição**

Associação para a Educação Matemática Elementar, Escola EB1 da Arcela  
Rua Nossa Sra. de Fátima, Azurém, 4800-007 Guimarães, Portugal  
Associação Ludus, Museu de Ciência, Rua da Escola Politécnica 56  
1250-102 Lisboa, Portugal  
Email: [jpm@ludus-opuscula.org](mailto:jpm@ludus-opuscula.org) URL: <http://jpm.ludus-opuscula.org>

**Director**

Carlos Pereira dos Santos

**Conselho Editorial**

Alexandra Gomes, [magomes@ie.uminho.pt](mailto:magomes@ie.uminho.pt), Universidade do Minho  
Carlos P. Santos, [carlos.santos@isec.universitas.pt](mailto:carlos.santos@isec.universitas.pt), Universidade de Lisboa  
Carlota Simões, [carlota@mat.uc.pt](mailto:carlota@mat.uc.pt), Universidade de Coimbra  
Jorge Nuno Silva, [jnsilva@cal.berkeley.edu](mailto:jnsilva@cal.berkeley.edu), Universidade de Lisboa  
Pedro Palhares, [palhares2307@gmail.com](mailto:palhares2307@gmail.com), Universidade do Minho  
Ricardo Cunha Teixeira, [rteixeira@uac.pt](mailto:rteixeira@uac.pt), Universidade dos Açores

**Informações**

O *Jornal das Primeiras Matemáticas* é semestral, eletrónico e incide sobre a matemática do pré-escolar e dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. Apesar disso, a comissão editorial poderá aceitar artigos focados noutros níveis de ensino desde que o conteúdo se mostre suficientemente relevante para permitir o devido aproveitamento para os níveis que constituem o objeto do jornal. O público alvo é constituído preferencialmente por educadores e por professores dos 1.º e 2.º ciclos, mas poderá estender-se a pais, encarregados de educação e crianças. Os números saem nos exatos momentos de Solstício. As secções serão as seguintes (em cada número poderá haver mais de um artigo por secção ou secções que não sejam contempladas):

*Entrevistas*

*Jogos*

*Matemática no Quotidiano*

*Necessidades Educativas Especiais*

*Notícias*

*Os Primeiros Livros*

*Problemas e Desafios*

*Recursos Didáticos*

*Vária*

Os autores são matemáticos, professores, educadores, formadores e investigadores, próximos da realidade do pré-escolar e dos 1.º e 2.º ciclos. Isto é uma norma geral não obrigatória. Os textos são da inteira responsabilidade dos autores, não refletindo qualquer posição editorial do jornal.

# Índice

	Página
<b>Vária: <i>Carlos Pereira dos Santos e Ricardo Cunha Teixeira</i></b> PROPRIEDADES E CRITÉRIOS NO PRÉ-ESCOLAR . . . . .	<b>3</b>
<b>Vária: <i>Carlos Pereira dos Santos e Ricardo Cunha Teixeira</i></b> MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO PRÉ-ESCOLAR: A PRIMEIRA DEZENA	<b>17</b>
<b>Problemas e Desafios: <i>Gabriela Rodrigues e Alexandra Gomes</i></b> VAMOS À QUINTA PEDAGÓGICA! USANDO PROBLEMAS REAIS PARA EXPLORAR A OTD NO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO . . . . .	<b>47</b>
<b>Problemas e Desafios: <i>Helder Pinto</i></b> PROBLEMAS DOS NOSSOS AVÓS (1) . . . . .	<b>59</b>
<b>Necessidades Educativas Especiais: <i>Alda Carvalho, Carlos Pereira dos Santos e Laura Nunes</i></b> JOGOS MATEMÁTICOS: REGRAS EM LÍNGUA GESTUAL PORTUGUESA	<b>69</b>

## PROPRIEDADES E CRITÉRIOS NO PRÉ-ESCOLAR

*Carlos Pereira dos Santos, Ricardo Cunha Teixeira*

Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias, Universidade dos Açores

cmfsantos@fc.ul.pt, rteixeira@uac.pt

**Resumo:** *O texto que se apresenta constitui um resumo documentado de algumas ideias-chave sobre o tratamento do tema Propriedades e Critérios na educação pré-escolar. O artigo, além de poder ser lido por investigadores ligados a esta área, foi escrito de forma a constituir um documento de apoio para os profissionais que estão “no terreno” (educadores, auxiliares, entre outros) e uma fonte de consulta para pais, encarregados de educação e todos aqueles que se interessam por crianças (no fundo, praticamente todos nós). Os assuntos tratados, além de incidirem sobre ideias basilares como a oralidade infantil, a identificação de propriedades e o estabelecimento de critérios, estendem-se à análise de tarefas didáticas típicas como agrupamentos, associações, correspondências, identificação do intruso, observa e fala, etc. O texto é fundamentado em diversos estudos científicos e inclui o contributo, igualmente importante, de inúmeros educadores que partilharam o seu olhar e a sua experiência. Sendo assim, além da abordagem teórica, são apresentados bastantes exemplos práticos e alguma multimédia.*

**Palavras-chave:** Propriedades de objetos, critérios, agrupamentos, associações, correspondências, identificação do intruso, matemática, pré-escolar, oralidade, cognição infantil.

### 1 Introdução

Talvez a melhor forma de iniciar este texto dedicado ao tema *Propriedades e Critérios na Educação Pré-Escolar* seja uma citação do Psicólogo Jerome Bruner (1915-):

Proficiency in oral language provides children with a vital tool for thought. Without fluent and structured oral language, children will find it very difficult to think [4].

Esta afirmação traduz uma ideia que é quase do foro do senso comum: quanto melhor uma pessoa fala e se exprime, melhor pensa e argumenta. Uma pessoa, criança ou adulta, que apenas se exprime por monossílabos, tendencialmente pensa pior. Em oposição, uma pessoa com desenvoltura quanto à sua capacidade de expressão e de argumentação, e que seja conhecedora de um vocabulário rico, entre outros aspetos, normalmente pensa melhor. Este pilar fundamental já foi alvo de uma vasta análise científica que o suporta. Muitos estudos sobre a relação entre experiências que promovem a oralidade no pré-escolar e a abordagem da leitura e da escrita em anos posteriores revelaram a importância vital dessas mesmas experiências (ver por exemplo [8]). Mas, é algo mais basilar do que a leitura e escrita: está em causa o desenvolvimento do próprio pensamento [3]. Alguns investigadores defendem mesmo que a linguagem pode ter um papel importante na conceção do mundo, dos números, de aspetos espaciais, de aspetos culturais, entre outros. Ou seja, levantam questões muito para lá da simples utilização da linguagem como sistema de mapeamento humano ao serviço da comunicação. Segundo esta corrente, a língua utilizada pelos diferentes povos, na medida em que tem influência na sua expressão e forma de pensar é, por si só, um fator importante a considerar quando se estudam aspetos cognitivos, culturais, de conceção do mundo, etc.

Para este artigo, interessa frisar com toda a força o que talvez seja a regra número um dos educadores de infância:

**Quando se concebe uma atividade para o pré-escolar deve-se, em primeiríssimo lugar, pensar no diálogo e no tipo de questões orais que esta vai proporcionar.**

O simples facto do educador pensar nestes termos já o ajuda a ter um guião para a tarefa, a estabelecer os seus objetivos e a pensar no que pretende dessa tarefa. Todas as atividades apresentadas ao longo deste artigo têm por base este princípio norteador. Todas elas têm a si associadas questões a colocar às crianças e certo tipo de vocabulário a estimular.

Este aspeto pode e deve ser acompanhado por todo um leque de questões motoras importantíssimas no pré-escolar, nomeadamente o desenho e o traço. Ainda assim, há estudos chamando a atenção para o papel da oralidade levada em simultâneo com a feitura de desenhos [7]. Este tipo de atividade é altamente promotora do desenvolvimento cognitivo infantil.

Segundo a empresa de pesquisa de marketing *Nielsen Corporation*, as crianças vêem televisão, em média, 21-23 horas por semana (sem contar com vídeos). É claro que nem toda a televisão é má e há muita aprendizagem realizada neste tempo. Mas não é uma atividade virada para a promoção da oralidade e da capacidade argumentativa. As crianças devem variar contextos (para adquirir vocabulário) e devem interagir de forma rica e expressiva com adultos e com outras crianças.

## 2 Os primeiros contactos

Provavelmente o primeiro contacto com a temática *Propriedades e Critérios* da vida das crianças relaciona-se com o triplo *Tamanho-Cor-Posição*. Embora por volta dos dezoito meses as crianças já consigam diferenciar substantivos de adjetivos [9], o domínio lógico e linguístico de termos relacionados com esta trilogia básica demora algum tempo. Além disso, as três temáticas também apresentam diferenças a assinalar.

### 2.1 Cor

Desde cedo, sensivelmente aos dois anos de idade, as crianças parecem compreender que os termos relacionados com a cor constituem uma categoria semântica. Isso verifica-se com a interessante observação de que as crianças costumam responder à pergunta “De que cor é isto?” com um termo de cor, ainda que eventualmente errado. E isso não se verifica com todas as categorias [2, 11]. O facto é relevante, uma vez que aponta para a ideia de que uma categoria simples como *a cor* pode ser prévia aos seus termos exatos.

Duas ideias didáticas fundamentais devem ser tidas em conta. A primeira pode ser explicada da seguinte forma: a aprendizagem inicial de uma cor como o vermelho não deve ser feita com um gato vermelho. Isto porque vermelho não é cor que se associe a um gato. É muito mais inteligente utilizar um morango, uma vez que os morangos são vermelhos. Em síntese, deve tentar-se utilizar objetos do universo infantil fortemente associados às diversas cores. A Figura 1 é ilustrativa do que se pretende dizer<sup>1</sup>.



Figura 1: Objetos fortemente associados a cores específicas.

A segunda ideia diz respeito à forma como se ensina. Alguns estudos revelam que o ensino por contraste pode ser consideravelmente mais eficaz do que o explícito. Quando se diz “Este morango é vermelho”, não se está de forma

<sup>1</sup>A música da Rua Sésamo *Eat Your Colors* reflete exatamente a mesma ideia. Veja-se o link: <http://youtu.be/tngqLhW-hcY>.

alguma a frisar a categoria em causa. Em vez disso, imagine-se que a criança já conhece alguns termos e, em particular, que o Sol é amarelo. Uma frase como “Este morango não é amarelo como o Sol; este morango é vermelho” foca primeiro na categoria pretendida e só depois transmite o termo. Com requinte, o contraste pode ser feito tentando acertar em erros comuns (por exemplo, roxo em oposição ao vermelho) – “Esta uva não é vermelha como um morango; esta uva é roxa.” – este tipo de cuidado didático é transversal a outras temáticas [1, 5].

## 2.2 Tamanho

Quanto ao tamanho, ainda antes das cores, as crianças costumam ser capazes de diferenciar objetos grandes e pequenos (“É a bolinha pequenina!”). Vários motivos podem ser apontados para justificar este facto. Por um lado, o tamanho está relacionado não só com o aspeto visual, mas também com o manipulável e espacial. As crianças sentem a diferença entre pegar com as mãos em coisas pequenas ou em coisas grandes. Além disso, o tamanho com que as coisas entram no nosso campo de visão está relacionado com a perspetiva e com o facto de estarem longe ou de estarem perto. Todos estes fatores não aparecem na cor. Um segundo aspeto diferenciador é a questão relacional e linguística [6, 12]. Nós perguntamos às crianças “De que cor é isto?”, em relação à cor, e “Qual é o maior?”, em relação ao tamanho. Se repararmos, a segunda pergunta aponta para o aspeto relacional da categoria *tamanho* (Grande em relação a quê?). Aliás, as crianças só compreendem a globalidade dos aspetos relacionais muito mais tarde. Se um pássaro for rotulado de “grande”, torna-se difícil a mudança do rótulo quando este aparece misturado com outros objetos muito maiores do que ele. Esta simultaneidade e possibilidade de uma coisa poder ser grande ou pequena, dependendo do contexto, apresenta uma dificuldade acrescida para crianças muito pequenas. É por estas razões que as categorias *cor* e *tamanho* apresentam diferenças na análise científica, associando-se a processos cognitivos infantis diferentes.

## 2.3 Posição

A posição dos objetos é um aspeto importante no âmbito da cognição infantil, estando relacionada com a lateralização, com aspetos espaciais, entre outros. A sua análise exaustiva escapa um pouco ao propósito principal deste artigo. Ainda assim, faremos observações simples relativas aos primeiros passos (3 anos de idade). Quanto à posição de objetos, existe a ideia sustentada de que os adultos são muito mais egocêntricos do que as crianças [15]. Quer isto dizer que os adultos olham para os objetos com imediata preocupação com aspetos posicionais como esquerda/direita, cima/baixo, etc. Tudo isto em relação à sua pessoa. O “Eu” é a referência posicional do adulto. As crianças são mais desprendidas, sendo muito flexíveis no que diz respeito a imagens invertidas, inclinadas, etc. Para as crianças, uma imagem de pernas para o ar ou um perfil espelhado pode não fazer confusão alguma. Consequentemente, as primeiras conversas sobre posições de objetos devem ser ligadas a ações concretas como, por exemplo: “Este está a dançar e o outro está sentado” ou “Estes amigos



estão a olhar um para o outro e estes estão de costas voltadas”.

Um procedimento bastante adequado para as primeiras abordagens consiste em apresentar objetos iguais em tudo, exceto numa categoria. Isso vai ao encontro de uma ideia didática fundamental que consiste em “não causar ruído”. Nas primeiras vezes que se tenta ensinar algo a uma criança pequena deve encontrar-se uma maneira de focar a atenção no aspeto essencial e em nada mais. Esta forma simples permite mais facilmente à criança perceber a categoria em que estamos interessados. Um exemplo típico pode ser visto na Figura 2 (Manual de atividades para o pré-escolar do ensino de Singapura [10]). Como de costume, a criança é convidada a falar muito e a explicar-se. Por vezes, o educador aponta e pergunta: “Estas conchas são mesmo iguais ou são diferentes? Porquê?”. Repare-se que este último “Porquê?” só deve ser feito em relação a objetos diferentes em alguma coisa, para puxar por uma explicação oral da criança. Em relação a objetos totalmente iguais não há grande coisa para explicar. A conversa em relação aos golfinhos é bem mais sofisticada, uma vez que são iguais em tudo estando apenas em posições diferentes; talvez algo do tipo “O rabo deste está para um lado e o rabo do outro está para o outro”<sup>2</sup>.



Figura 2: Observa e fala.

O exemplo da Figura 3, uma tarefa de correspondência, está totalmente relacionado com a primeira abordagem do triplo *Tamanho-Cor-Posição* [10]. Além da habitual conversa sobre animais e correspondências, em que a criança deverá utilizar o dedo indicador (eventualmente um lápis, dependendo do seu desenvolvimento motor à data), o educador deve pedir algo mais. Por exemplo, “Esses são coelhos. Está certo. Mas são mesmo iguais ou há alguma diferença?”. O assunto mais desafiador é, sem dúvida, o caso dos ursos, uma vez que se prende com a posição; a ideia será levar a conversa para o facto de os ursos serem os únicos que olham um para o outro (ideia de ligar o aspeto posicional a uma ação).

<sup>2</sup>Mais um magnífico exemplo retirado da série *Rua Sésamo* relativo a esta temática, disponível em: <http://youtu.be/SRldYzvSDKE>.

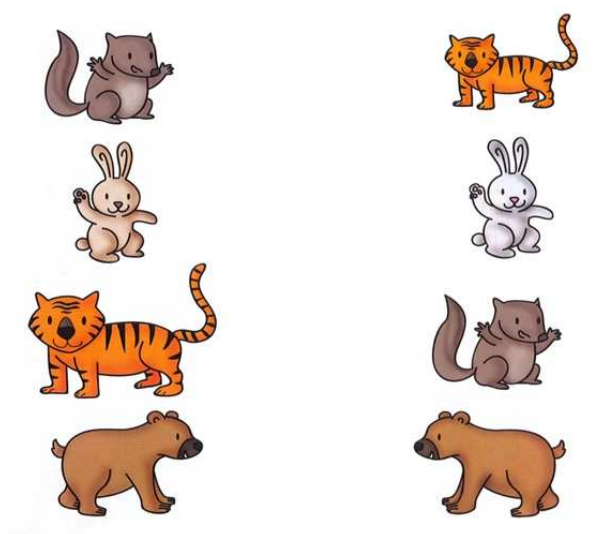


Figura 3: Corresponde, mas fala.

A ideia de posição-ação é magnificamente tratada no exemplo da Figura 4 [10]. Há ursos deitados, sentados, com braços cruzados, a segurar em flores, a dançar, etc. Naturalmente que deve ser essa a conversa a seguir, uma vez que essas posturas são as causadoras de posições diferentes.



Figura 4: Por que estão em posições diferentes? Estão a fazer o quê?

### 3 Propriedades dos objetos e atividades típicas relacionadas

Algumas das tarefas mais simples que se podem conceber associam-se a perguntas do tipo “De que cor é este carrinho?” ou “Estes dois bonecos são iguais ou são diferentes?”. São baseadas na mera identificação de propriedades. Associada a essas identificações há uma série de atividades mais ou menos sofisticadas de que falaremos no próximo parágrafo. Uma ideia distinta relaciona-se com o critério escolhido. Imagine-se que se pede a uma criança para que separe brinquedos conforme tenham rodas ou não. Nesse caso, quem estabelece o critério é o educador (ter ou não rodas) e a criança executa a tarefa segundo um critério que lhe é imposto. Um cenário completamente diferente seria o caso em que a criança entrava na sala e via os brinquedos já separados, seguindo-se a pergunta do educador “Por que estão separados assim?”. Nesse caso, é solicitada a identificação de um critério e não a mera constatação de uma propriedade. Ainda diferente seria o caso em que a criança estabelece o critério, separa e explica ao educador. As diferenças destes casos são a “alma” deste tema e, obviamente, não têm todas o mesmo grau de dificuldade.

Convém distinguir tema de tipo de atividade. Este artigo aborda o tema *Propriedades e Critérios*, um dos grandes temas do ensino da matemática no pré-escolar, a par de outros como *A Primeira Dezena*, *Forma*, *Espaço*, *Padrões*, *Medida*, *Separações*, *Somas e Subtrações* ou *A Ordem das Dezenas*. Todos eles, com o cuidado próprio, podem ser tratados em idade pré-escolar. Já os tipos de atividade dizem respeito ao dispositivo didático que se usa. Esses dispositivos são transversais aos vários temas, podendo ser aplicados a todos. Um tipo de atividade não é um tema em si mesmo. No entanto, estes assuntos não são estanques, contendo muitas interseções. Isto é tanto assim que o tipo de atividade, por ser tão comum e importante, é muitas vezes considerado um tema independente por vários autores e nas planificações dos educadores. Vejamos uma lista de 5 tipos de atividade particularmente comuns e aconselháveis.

- **Observa e Fala:** Este tipo de atividade está exemplificado na Figura 2. Perante, por exemplo, uma imagem ou uma construção no tapete, a criança é levada a dialogar com o educador, que lhe faz perguntas e conduz a conversa.
- **Correspondência:** Este tipo de atividade está exemplificado nas Figuras 3 e 4. Dentro da correspondência, pode haver subtilezas de construção. Por exemplo, pode haver mais itens de um lado do que do outro (para evitar a exclusão de partes), pode haver bolinhas ou divisórias para a questão motora do traço com lápis ser melhor orientada, pode ser um simples emparelhamento de objetos, o que constitui um caso particular de correspondência em que os conjuntos em causa têm o mesmo número de itens.
- **Associação:** Numa associação são apresentados um objeto isolado e um conjunto de vários objetos. A ideia consiste em solicitar à criança que indique qual é o objeto do conjunto que se relaciona com o objeto isolado e que explique por palavras suas a razão da sua escolha. No exemplo da

Figura 5, em relação à primeira linha, é a pasta de dentes que se associa com a escova de dentes.

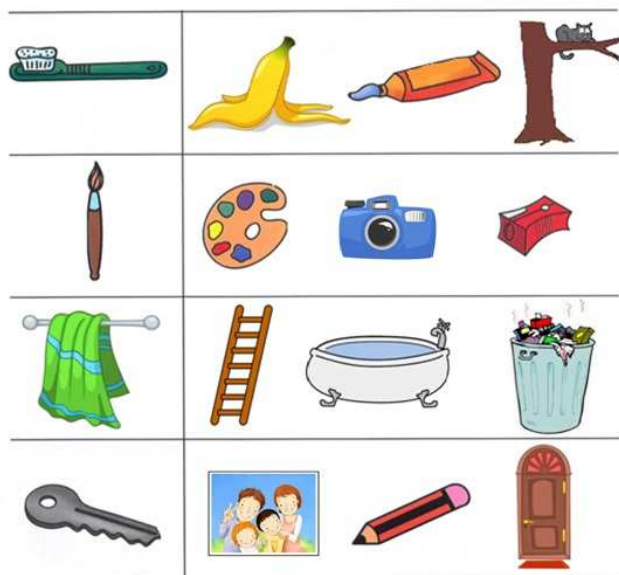


Figura 5: Associação.

Repare-se como este exemplo está bem construído. Além de cada linha constituir uma tarefa de associação, o educador pode continuar a conversa com a criança sobre a globalidade dos objetos da imagem. Por exemplo, a casca de banana coloca-se no caixote do lixo. Tudo na imagem se associa, promovendo o debate e a oralidade.

- **Agrupamento ou Classificação:** Num agrupamento são apresentados vários itens e é pedido à criança para que os separe em grupos de acordo com algum critério. Este tipo de tarefa tem sido sujeita a muito análise científica. Conhecidas são as “questões de inclusão” levadas a cabo pelos famosos investigadores Jean Piaget e Bärbel Inhelder, do tipo “Há mais rosas ou mais flores?” [13]. Mesmo na idade de 5 anos, a criança é facilmente enganada por este tipo de questão por não ser imediatamente evidente que a classe das flores *inclui* a das rosas. Simultaneidade de propriedades num mesmo objeto, subjetividade de propriedades (ser pequeno ou grande dependendo do contexto), inclusões, interseções, etc., são fatores que habitualmente não são fáceis para a criança do pré-escolar (especialmente na faixa dos 3-4 anos de idade). Interessante é o trabalho da psicóloga Stephanie Thornton que defende a ideia de que, para uma criança em idade de pré-escolar, a tarefa de agrupar pode não se basear numa visão integrada e de complementaridade de classes [14]. Considere-se a Figura 6. A criança é convidada a “fazer dois pares” de acordo com alguma lógica. O critério correto é a cor (dois azuis e dois amarelos). Imagine-se que uma criança em idade do pré-escolar começa por consi-

derar o par de bonecas. É-lhe multíssimo difícil voltar atrás na medida em que as bonecas foram agrupadas de forma independente das outras duas peças. As outras duas peças deixam de fazer sentido, mas as bonecas fazem e isso é o que importa.

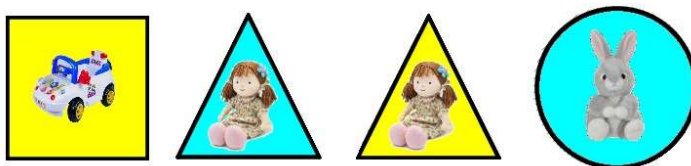


Figura 6: Visão independente *versus* visão integrada.

Numa idade mais avançada (6-7 anos de idade) já é comum observar a criança a fazer experiências. Paradoxalmente, pode parecer que a criança ficou menos hábil, mas é precisamente o contrário – está a adquirir uma visão integrada das várias classes. Esta dualidade, *visão independente versus visão integrada*, é a explicação para muitos dos procedimentos infantis. Algumas ideias podem ser usadas para trabalhar no pré-escolar a simultaneidade de propriedades, inclusões e interseções, sendo a mais conhecida a utilização do material estruturado *Blocos Lógicos*. No entanto, o que não deve mesmo faltar é trabalho importante a partir de conjuntos que não levistem este tipo de problemas. Por exemplo, o critério subjacente à Figura 7 é “animais domésticos *versus* animais selvagens”. Todo um trabalho oral sobre este tipo de atividade é aconselhável: “Por que é que os ursos não vivem nas casas das pessoas?” (grandes demais, ocupam muito espaço, ...), “Por que é que os leões não vivem nas casas das pessoas?” (porque comiam as pessoas, ...), entre outras questões.



Figura 7: Animais domésticos *versus* animais selvagens.

Numa fase mais avançada, ainda sem levantar a difícil questão relacionada

com inclusões e estruturas lógicas mais sofisticadas, podem ser usados conjuntos de itens mais abertos em que os agrupamentos podem ser feitos diferentemente através de critérios diversos. Exemplificaremos na próxima secção. Uma última observação relativa ao número de conjuntos resultantes de uma tarefa de agrupamento. Numa primeira fase, é aconselhável desenvolver atividades em que o critério que se possa estabelecer conduza à criação de dois conjuntos de objetos, como se exemplificou na Figura 7. Já numa fase posterior, poderá ser interessante apresentar tarefas de agrupamento que conduzam a um maior número de conjuntos, por exemplo, disponibilizando imagens de meios de transporte aéreos, terrestres e aquáticos.

- **Intruso:** Neste tipo de tarefa são apresentados vários objetos ou imagens a uma criança e o educador pergunta qual é o que destoa (naturalmente, a questão tem de ser feita de forma a que a criança perceba, mesmo que com português não muito erudito, “Qual está mal?” ou “Qual está a mais?”). Um *intruso* de resposta e razão únicas está exemplificado na Figura 8; a criança só pode escolher um intruso e a única razão para essa escolha está relacionada com a orientação da marca do pé.



Figura 8: *Intruso* de resposta e razão únicas.

Há também *intrusos* de resposta única, mas com várias explicações para essa resposta. Considere-se o caso da Figura 9. Embora a resposta seja única, a criança tem mais de uma forma de a explicar (na primeira linha, tanto podia ser o casaco como as bolinhas verdes ou o espaçamento dos olhos)<sup>3</sup>.

Também podem ser construídos *intrusos* de múltiplas respostas. Nesse caso, está a estimular-se a criança para o estabelecimento de um critério, que é o assunto da próxima secção.

Outras atividades fundamentais como ordenações ou seriações também se relacionam com este tema. No entanto, na medida em que também se relacionam com outras temáticas como os termos ordinais, o seu tratamento teórico é adequado em artigos sobre a abordagem dos números no pré-escolar. Por esse motivo, não as tratamos neste texto<sup>4</sup>.

Chamamos a atenção para outro aspeto muito importante: A escolha de contextos deve ser o mais variada possível, na medida em que isso proporciona riqueza de diálogo e desenvolve a criança, tal como vincado na introdução deste

<sup>3</sup>Um exemplo em <http://youtu.be/6fuNsH08dzE>.

<sup>4</sup>Ver artigo “Matemática na Educação Pré-Escolar: A Primeira Dezena”, escrito pelos mesmos autores e submetido para o mesmo número deste jornal.



Figura 9: *Intruso* de resposta única, com mais do que uma explicação.

artigo. Por isso, não se deve utilizar apenas temáticas comuns como a quinta ou a escola. Toda uma panóplia de contextos deve ser pensada e utilizada.

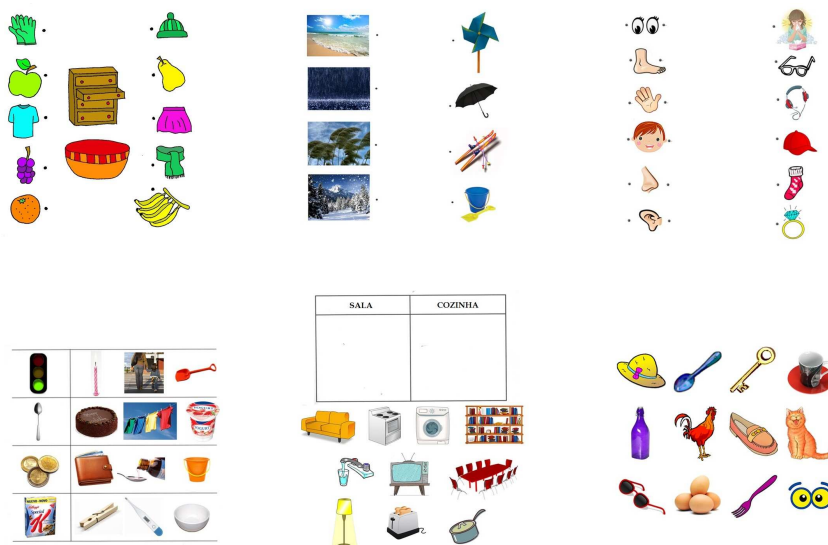


Figura 10: Vários exemplos de contextos.

Na Figura 10, podemos ver alguns exemplos, entre centenas de contextos que podem ser escolhidos: frutos, peças de vestuário, clima, assuntos quotidianos, divisões da casa. O exemplo do canto inferior direito é interessante por relacio-



nar a sonoridade das palavras “chapéu”, “chávena” e “chave”, que começam com o mesmo som; neste caso, a “colher” é o intruso. É também de frisar que muitos educadores defendem a inclusão de imagens reais nas tarefas (por oposição ao desenho ou ao cartoon). Por vezes, há conceitos que são descritos com maior eficácia por uma imagem fotográfica do que por um desenho (por exemplo, “dar a mão à mãe” associado ao “sinal de trânsito verde”). Algum realismo também é fundamental e importante para o desenvolvimento da criança.

A escolha de contextos, bem como a existência de estruturas lógicas mais sofisticadas, é o que determina a idade de aplicação das atividades relacionadas com *Propriedades e Critérios*. Cores e animais da quinta é ótimo logo na idade dos 3 anos, instrumentos de várias profissões já cai mais na faixa dos 4-5 anos, estruturas lógicas envolvendo interseções e inclusões, 5 anos, etc. A prática e experiência do educador é vital para esta sensibilidade mas, o que é certo, é que este tema é transversal a todo o pré-escolar.

## 4 Identificação e estabelecimento de critérios

O “Santo Graal” do tema *Propriedades e Critérios* consiste em conseguir com que sejam as crianças a estabelecer os critérios. Isso pode ser feito utilizando os tipos de atividade expostos na secção anterior, mas com o cuidado de apresentarem múltiplas respostas possíveis. Considere-se o exemplo da Figura 11.



Figura 11: Um *Agrupamento*, múltiplos critérios.

O critério óbvio consiste em separar os itens por cores. No entanto, o educador pode “insistir” com a criança: “Vamos fazer de outra forma!”. Em relação a este exemplo, outros critérios são apelativos, tais como: “Ter ou não ter rodas”, “Ser ou não ser um animal”. O educador deve ter como objetivo principal deixar ser a criança a estabelecer e a explicar o critério usado. Literalmente todos os tipos de atividade podem ser utilizados desde que com o cuidado de terem resposta múltipla. No entanto, o que funciona melhor, a par da *associação*, é o



*intruso*. A Figura 12 constitui um excelente exemplo.



Figura 12: Um *Intruso*, múltiplos critérios.

Neste exemplo, podemos observar que todas as respostas estão certas, desde que apresentado um critério em conformidade. A bola de basquetebol é maior do que as outras, a de futebol é a única que tem a cor branca, a de *rugby* é a única que não é redonda, a laranja é a única que se come.

Este tipo de abordagem didática é tão eficaz que costuma estar presente em muitos conjuntos de propostas para o pré-escolar. A famosa série de televisão *Sesame Street* criou mesmo um *sketch* periódico e uma canção com rima:

*One of these things is not like the others.  
One of these things doesn't belong.  
Can you tell me which thing is not like the others?  
Before the time I finish this song.*

Num exemplo paradigmático que se pode ver no *Youtube*, a questão tem mais do que uma resposta<sup>5</sup>. É interessante ver em grupos de discussão alguns observadores referir que o exemplo está *errado* por ter essa característica. É exactamente o contrário, é esse facto que o enriquece!

## Referências

- [1] Au, K., Laframboise, D., “Acquiring color names via linguistic contrast: the influence of contrasting terms”, *Child Development*, 61, 1808-1823, 1990.
- [2] Bartlett, J., “Semantic organization and reference: acquisition of two aspects of the meaning of color terms”, *Mind and Language*, artigo apresentado no *Biennial meeting of the Society for Research on Child Development*, New Orleans, 1977.
- [3] Bloom, P., Keil, F., “Thinking through language. *Mind and Language*”, *Mind and Language*, 16, 351-367, 2001.
- [4] Bruner, J., *Child's talk: Learning to use language*, Norton, 1983.
- [5] Carey, S., Bartlett, E., “Acquiring a single new word”, *Papers and Reports in Child Language Development*, 15, 17-29, 1978.
- [6] Clark, H., “The primitive nature of children's relational concepts”, *Cognition and the development of language*, 269-278, 1970.

---

<sup>5</sup>[http://youtu.be/0gf\\_uvyh-sE](http://youtu.be/0gf_uvyh-sE)

- [7] Coates, E., Coates, A., “Young children talking and drawing”, *International Journal of Early Years Education*, 14(3), 221-241, 2006.
- [8] Dickinson, D., Porche, M., “Relation between language experiences in preschool classrooms and childrens kindergarten and fourth-grade language and reading abilities”, *Child Development*, 82, 870-886, 2011.
- [9] Golinkoff, M., Mervis, B., Hirsch-Pasek, K., “Early object labels: The case for a developmental lexical principles framework”, *Journal of Child Language*, 21, 125-156, 1994.
- [10] Marshall Cavendish Int (S) Pte Ltd, *Earlybird Kindergarten Math, STD ED, Textbook A*, Singapore, 2003.
- [11] O’Hanlon, G., Roberson, D., “Learning in context: linguistic and attentional constraints on children’s color term learning”, *Journal of Experimental Child Psychology*, 94(4), 275-300, 2006.
- [12] Smith, L., Sera, M., “A developmental analysis of the polar structure of dimensions”, *Cognitive Psychology*, 24, 99-142, 1992.
- [13] Piaget, J., Inhelder, B., *The Early Growth of logic in the Child*, Harper & Row, 1964.
- [14] Thornton, S., “Challenging «early competence»: A process oriented analysis of children’s classifying”, *Cognitive Science*, 6, 77-100, 1982.
- [15] Trowbridge, C., “The importance of lateral vision in its relation to orientation”, *Science*, 44(1135), 470-474, 1916.

## MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO PRÉ-ESCOLAR: A PRIMEIRA DEZENA

*Carlos Pereira dos Santos, Ricardo Cunha Teixeira*

Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias, Universidade dos Açores  
cmfsantos@fc.ul.pt, rteixeira@uac.pt

**Resumo:** *Este trabalho constitui um resumo documentado de algumas ideias-chave sobre os números, normalmente tratadas no pré-escolar. O texto, além de poder ser lido por investigadores ligados a esta área, foi escrito de forma a constituir um documento de apoio com interesse para os profissionais que estão “no terreno” (educadores, auxiliares, entre outros) e uma fonte de consulta para pais, encarregados de educação e todos aqueles que se interessam por crianças (no fundo, quase todos nós). Os assuntos tratados, basicamente relativos à primeira dezena e subdivididos nas temáticas “Cardinalidade”, “Numerais” e “Ordinalidade”, são fundamentados com estudos e opiniões de matemáticos, psicólogos e neurocientistas. Além disso, teve-se em conta o contributo, igualmente importante, de inúmeros educadores que partilharam o seu olhar e a sua experiência. Sendo assim, além da abordagem teórica, são apresentados bastantes exemplos práticos e alguma multimédia.*

**Palavras-chave:** Matemática, pré-escolar, cardinalidade, ordinalidade, numerais, cognição infantil.

### 1 Introdução

Os especialistas em cognição e psicologia infantis têm-se dividido em duas perspetivas opostas. Os pessimistas concentram-se naquilo que não está ao alcance das crianças. As suas conclusões negativas em relação a muitos aspetos apontam para a ideia de que a matemática só deve ser tratada “a sério” a partir dos 6 anos de idade (1º ciclo do ensino básico). Um exemplo paradigmático é o do psicólogo americano Edward Thorndike (1874-1949), que afirmou em [24]

(...) little is gained by [doing] arithmetic before grade 2, though there are many arithmetic facts that can [be memorized by rote] in grade 1 (...)

Outro exemplo é o de Jean Piaget (1896-1980), investigador da Universidade de Genebra, cujas experiências ilustrativas de muitas limitações infantis ficaram famosas [16, 17]. A visão pessimista tende a considerar que o trabalho informal baseado nas rotinas diárias e no quotidiano infantil é suficiente para cumprir os objetivos relativos à matemática dos primeiros anos.

Este texto adota a perspetiva otimista de muitos outros investigadores. Os estudos pessimistas podem ser criticados de várias formas. O principal argumento utilizado pelos seguidores da visão otimista baseia-se na enorme abrangência concetual dos números descrita da seguinte forma em [1]:

(...) One of the most essential of human tools, numbers can play several roles, involve numerous relations, and can be represented in various ways, (...) can be operated on (used to perform computations) in various interrelated ways to model a variety of real-world transformations or situations (...)

Devido a este carácter vasto, é possível concordar com Thorndike no facto de muitos conteúdos aritméticos serem impossíveis de tratar no pré-escolar e, ainda assim, pensar que alguns procedimentos matemáticos podem e devem ser tratados nestas idades. Muitas experiências permitem conclusões tendencialmente corretas de que cognitivamente as crianças não se encontram preparadas para certos processos, no entanto, a conclusão de que não se ganha grande coisa em tratar a matemática no pré-escolar já parece exagerada e desenquadrada da realidade que se encontra no terreno. O muito usado termo “sentido de número” diz respeito a este carácter incrivelmente multifacetado e abrangente dos números, que podem assumir muitos papéis e aplicações. Há muitos processos que podem perfeitamente ser tratados numa fase muito precoce da vida humana. É extremamente importante tentar desmontar totalmente os procedimentos matemáticos para que se possam escolher aqueles que são indicados e primordiais. A aritmética em que pensava Thorndike e os contextos comparativos e lógicos estudados por Piaget constituem, em muitos casos, “saltos” demasiado grandes, devendo estes ser precedidos de assuntos basilares a ser trabalhados de forma faseada.

Este texto baseia-se fundamentalmente nas abordagens otimistas dos psicólogos da Universidade de Rutgers, Rochel Gelman e C. R. Gallisfel, e da especialista em cognição infantil da Universidade Northwestern, Karen Fuson [6, 7]. Nos seus trabalhos, podem ser encontradas algumas ideias fundamentais sobre aspetos primordiais como a simples contagem ou utilização de vocabulário numérico. Os assuntos de que trataremos nas próximas secções dizem respeito à cardinalidade, à ordinalidade e ao reconhecimento e traçado de numerais, que podem ser considerados as bases de todas as aprendizagens numéricas vindouras. Tudo isto no que diz respeito à primeira dezena, uma vez que números maiores exigem a compreensão do conceito de ordem numérica, o que só sucede posteriormente. Uma forma simplificada de exemplificarmos estes temas numéricos primordiais talvez seja a que se segue: “Estão aqui seis peixes” utiliza um cardinal; “Estão aqui 6 peixes” refere esse mesmo cardinal através de um numeral (neste texto chamaremos “numeral” ao símbolo utilizado para cada número, neste caso “6”); e “Está aqui o sexto peixe” utiliza um ordinal.

O texto tem como ambição intercalar aspetos teóricos e aspetos práticos, fundamentando-os na literatura especializada. Um bom exemplo de sucesso da abordagem otimista face ao ensino da matemática no pré-escolar é o bem sucedido método de Singapura<sup>1</sup>. Avaliações em estudos internacionais prestigiados, como o TIMSS<sup>2</sup>, respeitantes ao final do 4º ano, têm sido fantásticas e é facto bem conhecido de que este método tem o começo da sua implementação logo no pré-escolar.

Quanto à prática profissional do educador, há pelo menos três aspetos distintos que devem ser tidos em conta. O primeiro é a escolha dos temas a tratar. Em relação à matemática, a determinação dos conteúdos primordiais. O segundo, de cariz didático, diz respeito aos tipos de tarefa e trabalho a realizar com crianças na faixa 3-5 anos de idade. Nestas idades, as crianças aprendem a brincar e assim deve ser. Cabe ao educador orientar brincadeiras e atividades num certo sentido sem estragar o seu carácter apelativo natural. Em terceiro lugar, há o nível cognitivo associado a esta faixa etária. O educador deve conhecer muitíssimo bem o potencial da criança; isto é, deve ter uma ideia clara em relação ao *timing* associado a cada momento de maturidade, tempo de atenção infantil, dimensão motora, etc. Estes aspetos estão naturalmente presentes nos exemplos práticos que podem ser encontrados ao longo do texto.

Finalmente, fora estes três pontos de carácter geral, quanto à matemática, destacamos outras três ideias. Primeiro, a abordagem concreto-pictórico-abstrato de origem em teorias construtivistas. Para se perceber melhor o que se pretende dizer, 3 morangos é algo concreto; ao contrário, o numeral “3” é abstrato na medida em que é aplicável a milhares de situações quotidianas envolvendo essa quantidade. Uma das mais admiráveis características do ser humano é a faculdade de conseguir pensar e manipular conceitos abstratos de uma forma desligada da realidade. Na matemática, os números e as formas são exemplos de objetos abstratos. Se se tratasse de 3 cruces, quadradinhos ou bolinhas, estaríamos perante um esquema (pictórico). Quando se propõe uma atividade a uma criança que consiste em desenhar um número de bolinhas correspondente ao número de carros que vê numa imagem estamos perante uma atividade esquemática. Ainda não é a escrita matemática abstrata com os habituais numerais, mas também já não é um desenho concreto de coisas mundanas. Quando a criança pega em cubos, faz uma construção e diz que é uma ponte, está a ter um procedimento esquemático desse tipo. O imaginário infantil, carregado de brincadeiras de toda a espécie, é uma das mais poderosas maneiras de percorrer o caminho para a abstração. O faseamento cuidado no caminho do concreto ao abstrato é muito importante, sendo que, naturalmente, no pré-escolar o carácter concreto domina largamente o teor das atividades. Uma segunda ideia diz respeito à ordem. Se um assunto B precisar do assunto A para poder ser compreendido, então A deve ser tratado primeiro. Quanto mais baixa é a idade, mais difícil é o ato de apanhar “pontas soltas”. Em quase todos os casos, os educadores devem exprimir o óbvio. Por exemplo, este texto trata da primeira dezena. Naturalmente que este assunto aparece primeiro do que o das ordens

<sup>1</sup>Ver <http://www.singaporemath.com/>

<sup>2</sup>O TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) é desenvolvido pela International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). Para mais informações, consulte <http://www.iea.nl/>.

numéricas com um razoável intervalo de tempo. Isto porque não é possível aprender o segundo não havendo uma sólida compreensão do primeiro. Quem diz este, pode indicar inúmeros outros exemplos. Finalmente, uma não menos importante terceira ideia diz respeito à oralidade. Os educadores devem incentivar as crianças a deixarem de falar através de monossílabos. A verbalização, frases gradualmente mais complexas e alguma argumentação são essenciais para o desenvolvimento do raciocínio lógico infantil. As tarefas devem proporcionar diálogo. As crianças devem ser questionadas sobre as suas escolhas. O diálogo e a oralidade exigem todo o cuidado dos educadores. Quando estes partem para uma tarefa/brincadeira devem pensar de antemão no tipo de conversa que pretendem provocar. Também estas três ideias, fundamentais ao ensino da matemática desde tenra idade, estão imbuídas nos exemplos práticos presentes neste artigo.

## 2 Cardinalidade

A cardinalidade diz respeito ao número de elementos de um conjunto. A tarefa de contar pequenas quantidades constitui uma das primeiras levadas a cabo por uma criança. Hoje em dia, há muita investigação feita sobre a capacidade cognitiva infantil associada a esta temática. Alguns trabalhos clássicos de Piaget mostraram algumas limitações da criança [16, 17]. Muito conhecidas são as suas experiências sobre a “conservação do número”; por exemplo, quando questionadas sobre a linha com maior quantidade de bolas (Figura 1), muitas crianças em idade pré-escolar respondem que é a linha com 5 bolas. Na perspectiva Piagetiana isso aponta para ideia de que a *correspondência um-para-um* não é bem adquirida nessas idades.

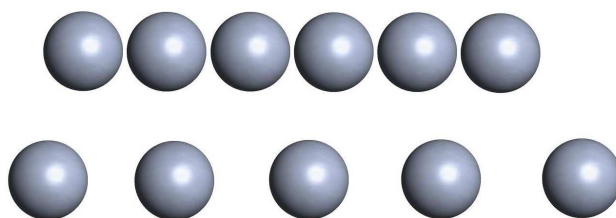


Figura 1: Experiência Piagetiana.

Piaget é tradicionalmente referido como tendo uma visão conservadora quanto ao tratamento da matemática no pré-escolar. Isso deve-se ao facto das suas experiências sugerirem que uma compreensão global do *número* não sucede em idades tão baixas. No entanto, desde então tem sido feita alguma investigação relevante e menos conservadora. Uma das vertentes críticas relativas às experiências Piagetianas baseia-se na pergunta “Será que as crianças percebem mesmo o que lhes é perguntado?” [4]. Interessantes são os estudos de Jacques Mehler e Tom Bever do MIT, publicadas na *Science* [13]. Estes dois psicólogos planearam o mesmo tipo de experiências recorrendo a contextos mais motivado-

res e facilmente compreensíveis. Uma abordagem foi fazer exatamente o mesmo tipo de experiência, mas usando M&M's e pedindo apenas às crianças para escolher uma fila e para comerem os chocolates. Esse tipo de cuidado com o planeamento revelou-se influente nos resultados obtidos. Outras experiências, que também se basearam no mesmo tipo de metodologia, são apresentadas em [11].

Outra vertente de investigação, com importância para a prática quotidiana dos educadores, defende a ideia de que a “compreensão numérica” Piagetiana é demasiado exigente [21]. Na realidade, nós usamos os números nos mais variados contextos; podemos usá-los simplesmente ao serviço da comunicação (“Estão ali 6 maçãs”), podemos usá-los ao serviço da comparação (“Qual é a linha com mais bolas?”), ao serviço de uma ordenação, etc. Parece intuitivo que essa “compreensão global” não deva acontecer toda ao mesmo tempo, sendo profundamente gradual.

## 2.1 Os cinco princípios de uma contagem estável

O matemático Steven Strogatz, no seu livro [22], relativamente a um episódio da série infantil *Rua Sésamo*<sup>3</sup>, refere que essa é “a melhor introdução aos números que já vi”. Nesse episódio, Humphrey, uma criatura cor-de-rosa, gere o turno do almoço no Hotel Furry Arms. Num momento em que atende uma chamada de um quarto com pinguins, recebe um curioso pedido: “Peixe, peixe, peixe, peixe, peixe, peixe”. Para o ajudar, Egas, um ser mais evoluído, chama a atenção para a utilização de um sistema muito melhor. Diz com propriedade que “6 peixes” teria sido um pedido muito mais simples. Em seguida, segue-se um diálogo sobre a temática. As crianças telespetadoras têm nessa altura uma oportunidade de aprender a contar.



Figura 2: Quotidiano no Hotel Furry Arms.

No seu livro, Strogatz acrescenta: “Imaginemos que, antes de Humphrey registar o pedido dos pinguins, recebia uma outra chamada”. Essa chamada podia pedir, por exemplo, mais 7 peixes. Neste caso, a utilização correta dos números ao serviço da vida do Humphrey consistiria em efetuar a adição  $6 + 7$  para saber

<sup>3</sup>Ver <http://youtu.be/43TmvJRylws>

a quantidade de peixe a pedir na cozinha. Queremos com isto relembrar que o muito falado *sentido de número* é algo vasto apontando para uma imensidão de aplicações e compreensões.

Para compreendermos a investigação em cognição infantil temos de perceber esta dualidade entre “dividir para conquistar”, por um lado, e a “visão integrada” por outro. Na sua simbiose está o segredo. Nesta secção abordaremos a ideia de Humphrey relativa à poderosa mensagem “6 peixes.”. Contar pequenas quantidades é algo que pode e deve ser trabalhado desde os primeiros tempos do pré-escolar e, para isso, um conhecimento científico adequado parece vir dos psicólogos Rochel Gelman e C. R. Gallisfel [7]. Nos seus trabalhos, estes investigadores apontam para 5 princípios a ser adquiridos pelas crianças para fazerem contagens simples (ver também um excelente resumo [23] feito por Ian Thompson da Universidade de Northumbria ou [6] para informação ainda mais detalhada):

1. **Contagem estável:** Uma condição necessária (não suficiente) para se realizar uma contagem correta consiste em “saber a cantiga”. Nos primeiros tempos, as crianças costumam contar, por exemplo, 1, 2, 4, 6, 8, 9 originando erros. Este tipo de erro deve ser corrigido para que a criança vá aprendendo a sequência correta.
2. **Correspondência um-para-um:** A criança deve adquirir uma “preocupação interna” em fazer corresponder cada termo numérico (um, dois,...) a cada item a contar. A criança não se pode esquecer de nenhum nem contar um objeto mais do que uma vez. Repare-se que o termo *correspondência um-para-um* não tem propriamente o mesmo significado usado por Piaget. Normalmente, nas experiências de conservação estamos num contexto *comparativo*. Neste ato simples de contar estamos apenas perante uma *preocupação com a organização de modo a não repetir nem esquecer objetos*.
3. **Abstração:** Tudo pode ser contado. A atividade de contar não é pertença de objetos particulares como, por exemplo, morangos. Podemos contar coisas físicas, não físicas, imaginárias, etc.
4. **Irrelevância da ordem:** No que diz respeito à cardinalidade, o começo da contagem, bem como a sua organização espacial é irrelevante. Pode ser feito da esquerda para a direita, da direita para a esquerda, a partir do meio, etc.
5. **Cardinal:** Seguindo todos os princípios anteriores, o último item a ser contado reflete o número total de itens. Se, imediatamente após a contagem, ao perguntar-se novamente o número de itens, se obtém resposta igualmente imediata, tem-se um sinal claro de que este princípio foi compreendido (“Para quê contar novamente?”).

Para lidar com os três primeiros princípios de forma eficaz há alguns conselhos basilares. A criança deve ser incentivada a contar em voz alta. Desta forma, o educador ouve, corrige e a criança vai aprendendo. Esta prática simples é a forma mais básica de lidar com o primeiro princípio. A criança



deve também apontar à medida que conta. Desta forma, o educador pode verificar se está a haver problemas com a correspondência um-para-um e trabalhar esse assunto<sup>4</sup>. Finalmente, deve haver muita variedade de contagens. A partir de certa altura, as crianças podem contar sons (por exemplo, palmas), coisas imaginárias, etc. Esta preocupação com a variedade constitui um primeiro passo para a criança perceber de forma implícita a ideia da abstração inerente ao ato de contar.

Os dois últimos princípios não dão origem a tão vinculados conselhos para educadores. Ainda assim, é impressionante perceber-se que, embora pareçam triviais, estes podem encerrar dificuldades acrescidas para as crianças do pré-escolar. O vídeo *Early Child Counts*<sup>5</sup> mostra fascinantes experiências pedindo a crianças para começarem a contar *a partir do meio de uma linha de objetos* ou para contarem de forma a *terminar em determinado elemento*.

Em relação às primeiras contagens, a escolha da natureza dos objetos tem bastante importância. O objeto unitário deve ser *uno*, apresentando um aspeto indivisível, liso, monocromático e simples. Por exemplo, contar limões pode ser muito mais fácil para uma criança do que contar cachos de uvas; em relação a este último caso, é natural que a criança aponte para cada um e comece a usar a palavra “muitas”. Isso sucede devido à “complexidade” do cacho. Uma coisa são cachos, outra são uvas e essa ambiguidade num mesmo objeto pode baralhar a criança<sup>6</sup>.

Nesse sentido, muito paradigmática é uma experiência proposta em [20]. Perguntando a uma criança de 3-4 anos quantos garfos estão na Figura 3, acontece a muito frequente resposta 6. É particularmente difícil para uma criança perceber que duas peças separadas podem contar como uma unidade. Até certa altura, a criança precisa do carácter *discreto* como pão para a boca. Alternativamente, ao mostrar 3 morangos e 2 bananas, experimente-se a pergunta sobre o número de cores que se vê. O problema será da mesma natureza... Em idades na faixa 2-3, *keep it simple*: bolinhas, berlindes, cubinhos, etc. É importante escolher objetos que não causem ambiguidades.

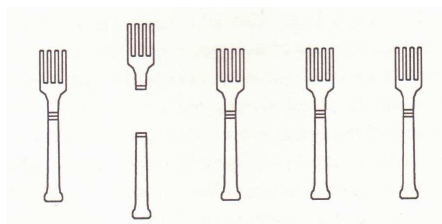


Figura 3: O que é um garfo?

As atividades práticas relativas a esta temática são muito variadas e contêm

<sup>4</sup>Um vídeo ilustrando uma criança com dificuldades relativas a este princípio pode ser visto em <http://youtu.be/SA4v-U8sNXw>.

<sup>5</sup>Ver <http://youtu.be/hw2P2IEXpx4>

<sup>6</sup>Ver <http://youtu.be/begdluU0mVs>

diversas subtilezas. Observe-se a Figura 4. Os exemplos dizem respeito a contagens simples. Três e cinco são quantidades que merecem um comentário quando se pensa nestas etapas muito iniciais: a) Quantidades até três são muito comuns na vida quotidiana e normalmente indetectáveis apenas com um olhar (ler sobre *subitizing* mais à frente). Crianças, mesmo muito novas (até com idades inferiores a 3 anos), não necessitam de realizar uma contagem para as nomear; b) Cinco é um número com uma certa importância devido aos cinco dedos de uma mão; há a fronteira “para lá e para cá de uma mão”. Por exemplo, no conceituadíssimo livro de atividades [9] sente-se perfeitamente o compasso de espera que precede o “para lá de cinco”.

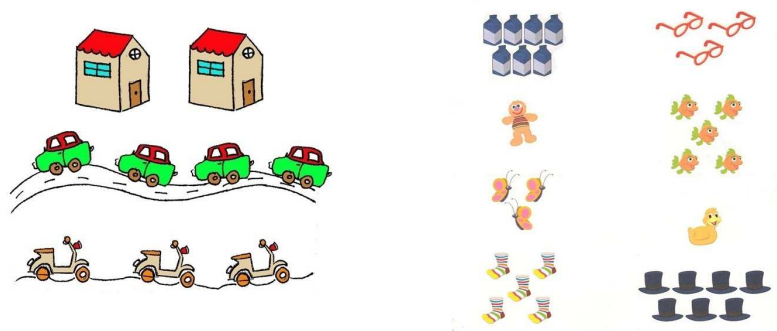


Figura 4: Primeiras contagens.

Voltando às imagens, repare-se que a da esquerda é a mais simples de todas. A criança é apenas convidada a contar em voz alta, apontando, as casas, os carros e as motos. O educador nesta fase pode ter dois cuidados:

1. Fazer variar contextos para ter muitas conversas diferentes, com vocabulário diversificado: circo, escola, quinta, praia, casa, etc;
2. Alternar imagens com objetos tridimensionais. A dificuldade da contagem depende da quantidade e da organização interna que é exigida à criança para satisfazer a correspondência um-para-um. O caso mais fácil de contagem consiste numa coleção de objetos tridimensionais dispostos numa linha. A criança tem uma estratégia que é adquirida desde tenra idade que consiste em empurrar para o lado os objetos já contados. Numa imagem isso não se pode fazer. Além disso, disposições caóticas não alinhadas são também naturalmente mais difíceis (ler sobre *subitizing* mais à frente).

O exemplo da direita da Figura 4 é uma simples correspondência. É uma atividade básica, mas extremamente eficaz. Existem dispositivos análogos em forma de *puzzle*. Repare o leitor que, nestes exemplos, não há numerais envolvidos. Trata-se apenas do ato e da verbalização.

Analisemos agora a Figura 5. Nestas atividades já há numerais envolvidos. No entanto, só é pedida a identificação sem escrita. Uma coisa que deve haver sempre em salas do pré-escolar são placas com os diversos numerais da primeira

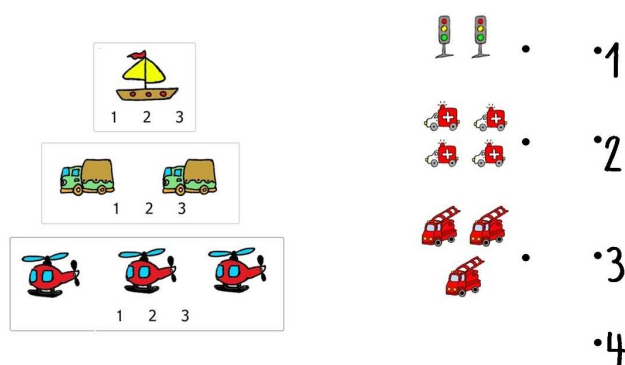


Figura 5: Mais exemplos de primeiras contagens.

dezena. Isso permite aos educadores, após diversas contagens, mostrar placas a todas as crianças e dizer frases do tipo “Isto é um 2”. Após algum trabalho nesse sentido, as crianças podem praticar a identificação dos vários numerais da primeira dezena fazendo corresponder-lhes as contagens que efetuam. O exemplo da direita já é um pouco mais elaborado e tem alguma dificuldade quando se pensa em crianças na faixa 3-4. Além de contar, a criança tem de corresponder. A imagem tem vários pormenores: por um lado há mais numerais do que coleções, truque clássico para evitar a exclusão de partes; por outro lado, já puxa pelo lado da motricidade fina, na medida em que é pedida uma correspondência com traço. Neste exemplo, em que há “bolinhas”, a aplicação costuma ser colocar a criança a corresponder primeiro com o indicador e só depois com um lápis. O ato de corresponder primeiro apenas com o dedo tem duas finalidades fundamentais: permite ao educador perceber o que a criança está a pensar e permite à criança *organizar-se*. É conhecido da prática dos educadores que os lápis com *troncos triangulares* são os mais apropriados para os primeiros traços. Voltaremos a este tipo de questão quando abordarmos a escrita dos numerais. Sempre que a criança une “bolinha com bolinha” sem muita rasura, deve ser elogiada; dessa maneira a criança percebe o que deve aplicar no seu treino motor.

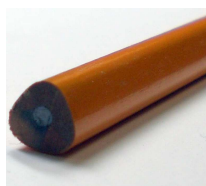


Figura 6: Lápis com tronco triangular.

É quase sempre uma boa ideia, do ponto de vista didático, trabalhar cada processo juntamente com o seu inverso. Na matemática essa ideia é ainda mais vinculada e transversal aos vários níveis de ensino. O processo inverso de contar objetos de uma coleção chegando a um número consiste precisamente em partir

de um número e colecionar ou pintar objetos em conformidade. A Figura 7 ilustra tarefas desse género. No caso da esquerda, animais misturados são apresentados e a criança deve pintar um número de quadrados em conformidade com o número de cada espécie. Esta atividade, indicada essencialmente para crianças a partir dos 4 anos, tem algumas dificuldades acrescidas, não só pela desarrumação dos animais que exige organização na contagem, como também pela parte da pintura adequada. O exemplo do meio diz respeito a uma situação quotidiana; uma criança da sala do pré-escolar faz anos em determinado dia e o convite consiste em desenhar um número de velas em conformidade com a sua idade. O exemplo da direita é tridimensional; a criança é convidada a associar um número de molas a cada cartão. Imaginação e criatividade podem ser usadas na conceção de cartões variados.



Figura 7: Pintar/colecionar objetos de acordo com um número previamente definido.

As tarefas da Figura 8 já envolvem escrita de numerais. Na da esquerda, a escrita é feita sobre um pontilhado e, no caso da direita, de forma livre dentro de quadradinhos. Não há barreiras etárias estanques para este tipo de tarefas dada a diversidade de crianças. Talvez a idade própria seja 4 anos, mas observe-se que, principalmente a tarefa da direita, tem um grau de dificuldade bastante considerável. Além da escrita ser livre, está limitada a uma zona. Repare-se que os objetos a contar também merecem um comentário; por exemplo, os 4 morangos estão arrumados em dois grupos de dois enquanto as 4 maçãs estão juntas e alinhadas. Estas diferenças são mais relevantes na prática do que possa parecer à primeira vista.

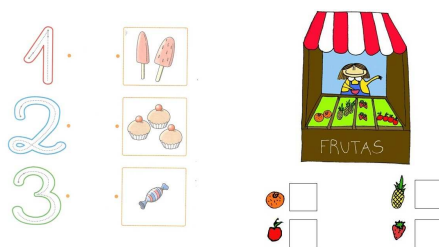


Figura 8: Contar e escrever os numerais.

As Figuras 4, 5, 7 e 8 são exemplos de como, embora tão básica e essencial, a

tarefa de contar pode ainda ser subdividida num leque de tarefas, apresentando uma subtil escala de dificuldade. Essas tarefas podem envolver reconhecimento de numerais ou não, podem envolver elementos de motricidade como bolinhas e divisórias ou não, podem ser feitas em dois sentidos (contar uma coleção chegando a um número ou partir do número construindo uma coleção), podem exigir escrita de numerais sobre pontilhados ou de forma livre, podem ser feitas sobre uma folha e imagem ou recorrendo a elementos 3D/sonoros, podem envolver vários tipos de “desarrumação” de objetos, a coleção pode aparecer isolada ou misturada com outras coleções, entre outros aspetos. Estas especificidades têm imensa importância quando se pensa na abordagem prática junto das crianças.

## 2.2 Subitizing

A arrumação dos objetos tem tanta importância para a determinação da cardinalidade de uma coleção que está na origem de alguma investigação importante. No artigo [8] usou-se pela primeira vez o termo *subitizing* para designar os rápidos, precisos e confiantes julgamentos relativos ao número de objetos de uma coleção<sup>7</sup>, sem os contar. Portanto, estamos a falar na importância de desenvolver o reconhecimento de pequenas quantidades sem contagem.

Laurence Rousselle e Marie-Pascale Noel, da Universidade de Louvain, defenderam a ideia de que as crianças nascem com a competência inata para diferenciar as quantidades um, dois ou três e que, com o tempo, essa capacidade se desenvolve para números maiores [18]. Paradigmática é também a *Lei de Bourdon* magnificamente ilustrada através de um gráfico retirado de [4] (Figura 9), relativo ao tempo dispendido na determinação de um número de objetos por parte de pessoas que já saibam contar. Até 3, é de relance, depois de 3, o crescimento do tempo gasto é linear (provavelmente com declive igual ao tempo que a pessoa demora a contar mais um objeto). Algumas crianças pequenas (2-3 anos) são capazes de reconhecer os números 1, 2 e 3 sem os contar; isso aponta para que o *subitizing* dessas pequenas quantidades seja uma competência muito precoce e anterior à própria contagem<sup>8</sup>.

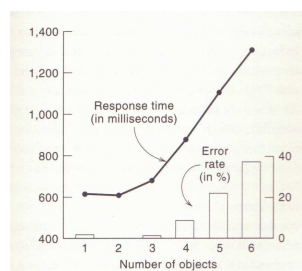


Figura 9: Lei de Bourdon.

<sup>7</sup>Do latim *subitus* (súbito). Neste artigo, não traduziremos o termo.

<sup>8</sup>Um, dois, três, ? – [http://youtu.be/Vj\\_dqVSqbiQ](http://youtu.be/Vj_dqVSqbiQ)

Interessante do ponto de vista do trabalho do educador é a ideia de “*subitizing* conceptual” [3]. Considere o leitor o exemplo da Figura 10. É fácil perceber que, pelo facto de conhecermos bem a configuração de um dado de jogar, temos facilidade em ver dois 5, ou seja, 10. Este tipo de *puzzles* que fazemos com imagens conhecidas é um tipo de estratégia útil e interessante.

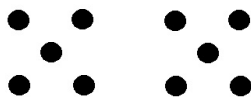


Figura 10: *Subitizing* conceptual.

Em [3], Douglas Clements, investigador da Universidade de Denver, defende que atividades divertidas podem ser usadas para promover o “*subitizing* conceptual” junto de crianças do pré-escolar. Uma delas consiste em mostrar placas com imagens de diversas quantidades arrumadas de várias maneiras e fazer corridas! Na parte esquerda da Figura 11 pode ver-se uma sugestão de placa retirada de [3]. Escolhendo algumas arrumações que sejam composições de outras, promover-se-á de forma natural estratégias úteis. Uma ideia prática consiste em, a partir de certa altura, variar muito as arrumações. A ideia funciona nos dois sentidos: se as crianças ainda não souberem contar bem, isso impedirá o recurso a arrumações decoradas; se as crianças já souberem contar, isso permitirá que pratiquem estratégias de *subitizing* após alguma memorização. Mas o educador pode e deve ter imaginação na conceção das arrumações. Por exemplo, se houver placas com o 3 arrumado como no dado tradicional e placas com o 6 juntando duas dessas arrumações, isso pode ser um factor decisivo para que a criança comece a intuir que 6 é igual a 3+3 a partir das próprias imagens.

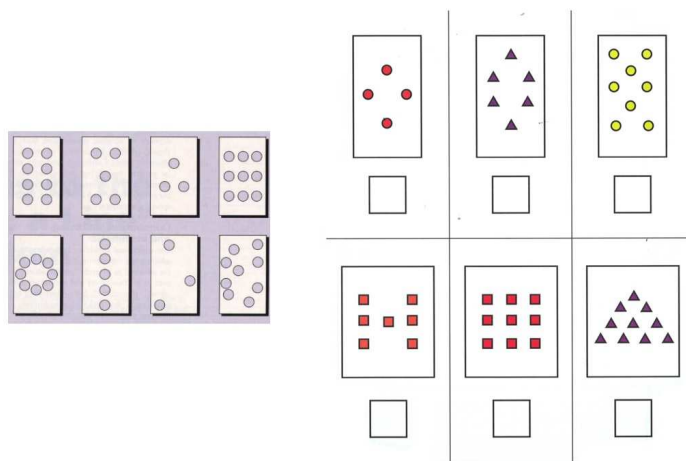


Figura 11: Várias arrumações.

A parte direita da Figura 11 é uma tarefa retirada de [9]; além da evidente

(des)arrumação variada, as imagens já são razoavelmente abstratas. Não se trata de cenouras nem coelhos, são símbolos simples. Esse pormenor de faseamento em relação à abstração também tem importância. Isto porque a passagem do concreto para o abstrato deve envolver a fase intermédia do pictórico/esquemático.

### 2.3 A problemática do zero

Muitos livros e artigos foram escritos exclusivamente sobre a temática do zero. O trabalho [12] dos psicólogos Dustin Merritt e Elizabeth Brannon, da Universidade Duke, constitui uma ótima referência deste género. O zero não faz parte da “lista de contagem”, costumando ser tratado à parte e numa fase de aprendizagem mais avançada. Repare o leitor que se as crianças comessem a contar a partir de zero, as contagens apareceriam todas erradas. Isso deve-se ao facto de o zero não indicar a presença de determinada quantidade, mas sim a sua ausência. Esse singelo facto fez com que, tal como na vida das crianças, o zero tenha aparecido na história da numeração desfasado e numa fase posterior ao surgimento dos números naturais.

Deve fazer-se algum trabalho sobre o zero com as crianças do pré-escolar. O zero é demasiadamente importante no nosso sistema de numeração para ser deixado de fora. Por exemplo, o que nos permite distinguir 103 de 13 é exatamente a existência do símbolo “0” na ordem das dezenas; a magia desta ideia, que parece tão natural para todos nós, consiste no facto do símbolo “0” permitir perceber que o “1” representa uma centena e não uma dezena. Ou seja, não se trata apenas da ausência de quantidade; o “0” tem também uma importância fundamental relacionada com as posições dos restantes algarismos no sistema de numeração posicional que usamos.

Os investigadores Henry Wellman e Kevin Miller, da Universidade de Michigan, analisaram profundamente a questão e chegaram à conclusão de que as crianças vão construindo a compreensão sobre o zero de forma faseada através de várias etapas [26]. Destacaram as seguintes: a) As crianças aprendem primeiro o símbolo sem ter ideia alguma sobre o seu significado; b) Em segundo lugar, as crianças aprendem a tradicional ideia “zero é nada”; c) Em terceiro lugar, as crianças aprendem a relação do zero com os restantes números. Para se perceber esta última etapa, Wellman e Miller destacam o facto da pergunta “O que é maior, zero ou um?” ser complicada para crianças do pré-escolar, que respondem muitas vezes “Um é o mais pequeno”. A compreensão sobre o zero tem nuances complicadas mesmo para os adultos, principalmente quando este número aparece envolvido em operações. Por exemplo, se perguntarmos a adultos a razão por que não se divide por zero, iremos obter muitas respostas deficientes.

A maneira prática de se trabalhar o zero no pré-escolar consiste em desfasar e adiantar a temática em relação às contagens. Além disso, são sobretudo trabalhadas as duas primeiras etapas apontadas por Wellman e Miller. A associação do zero à ausência de quantidade pode ser feita através de episódios, desenhos, músicas, etc. A Figura 12 é um exemplo típico. Há também imensas músicas e histórias infantis em que animais vão saltando da cama até esta ficar vazia

ou em que pássaros voam de um tronco até este ficar vazio. É claro que um monstro que quer comer bolachas, mas que se depara com uma desagradável surpresa ao ver que a caixa está vazia, é um tipo de brincadeira análoga.

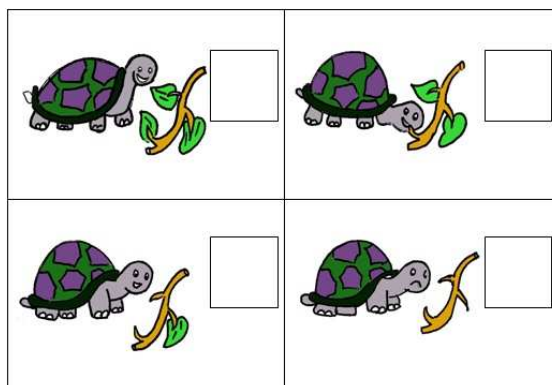


Figura 12: Tartaruga que come tudo.

Depois de algumas conversas sobre o zero, podem começar a aparecer ocasionalmente tarefas sobre objetos inexistentes numa imagem (Figura 13). Muita brincadeira divertidíssima pode ser feita em torno da inexistência de diversos objetos<sup>9</sup>.

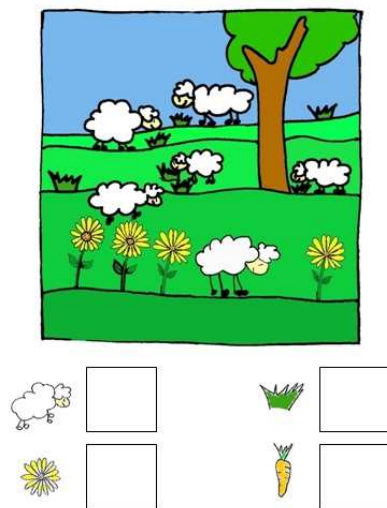


Figura 13: Onde estão as cenouras?

<sup>9</sup>Ver mais um fantástico exemplo da série Rua Sésamo, em <http://youtu.be/Im2SXrwr2CE>.



### 3 Numerais

#### 3.1 Reconhecimento e traçado dos numerais

Antes de serem capazes de escrever os numerais, as crianças devem reconhecê-los, dizendo as designações respetivas e fazendo associações a quantidades certas [15]. Para isso, tal como foi dito anteriormente, os educadores devem mostrar placas com numerais após contagens de variadas coleções, fazer correspondências, lê-los em voz alta, etc. Segundo Xin Zhou e Bin Wang, da Universidade Normal da China, o uso dos numerais não é apenas importante para a transmissão de informação ou para a utilização operatória prática, por exemplo. É também importante para o desenvolvimento cognitivo infantil [27]. Este processo de aprendizagem é um primeiro passo importante para a compreensão do carácter abstrato dos números. As crianças perceberão de forma natural, sem ser necessário explicitá-lo, que os numerais têm um papel importante na sua vida, estando associados a objetos mundanos como relógios, botões de elevador, números de porta de casa, cenas de desenhos animados, etc.

O reconhecimento de numerais exige reconhecimento de imagens e capacidade de estabelecer relações. No entanto, ser capaz de os escrever envolve também a questão motora, capacidade de cópia e controle muscular. É sabido que a forma de agarrar um lápis evolui na idade pré-escolar [19]. A utilização dos dedos indicador e polegar em forma de pinça constitui um objetivo importante e há procedimentos especialmente indicados para o atingir.

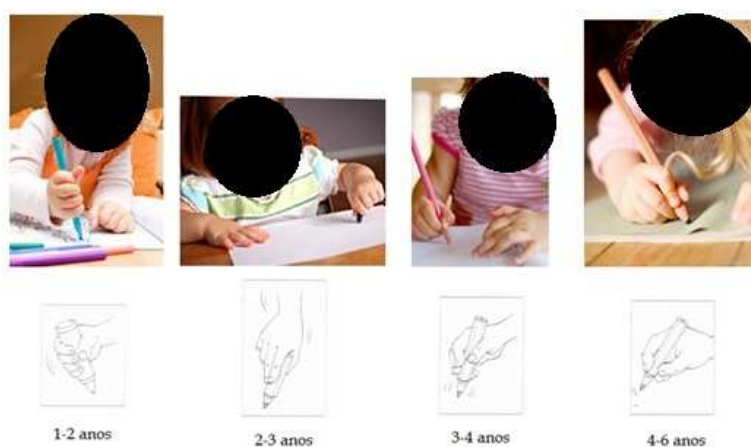


Figura 14: Evolução do ato de agarrar num lápis.

Relativamente ao caso particular dos numerais, para ajudarem de forma mais eficaz as crianças, os educadores devem começar por observar com atenção os vários grafismos manuscritos. A Figura 15 ilustra alguns dos mais típicos.

1. O “1” da esquerda, desenhado apenas com um segmento, é claramente o mais simples e é imune ao fenómeno da escrita invertida de que falaremos

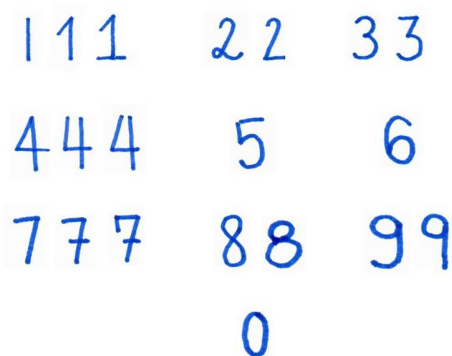


Figura 15: Vários numerais, vários grafismos.

mais à frente. No entanto, tem a desvantagem de se confundir facilmente com as letras “i” e “l”. Nesse sentido, dada a escolha da direita ser ornamentada demais e pouco prática em escrita rápida, o do meio talvez seja o mais acertado. É de notar que se trata de um grafismo constituído por segmentos de reta sem necessidade de levantar o lápis.

2. O “2” da esquerda tem uma “voltinha” típica da escrita cursiva. Em relação ao texto e às palavras levanta-se a importantíssima questão do final da escrita das letras. O final deve preparar a próxima letra com o objetivo de tornar o processo de construção de palavras prático e expedito. Nesse sentido, esse tipo de movimentos arredondados, quase como se de uma dança se tratasse, tem toda a lógica. No caso dos numerais, essa questão de continuidade não se coloca e, conseqüentemente, a escolha do “2” da direita parece perfeitamente razoável. Trata-se de um grafismo com parte curva e parte direita sem necessidade de levantar o lápis.
3. O “3” da esquerda é o mais comum e parece uma boa escolha. Trata-se apenas de uma linha curva, com mudança de direção, sem necessidade de levantar o lápis. O “3” da direita, embora mais protegido contra escrita invertida, torna o processo mais difícil e mais lento.
4. O “4” da esquerda é aquele que é feito com movimento único. No entanto, a sua execução contrasta um pouco com a forma natural e expedita como são feitos os restantes numerais e letras. Mais naturais são os “4” do centro e da direita. Nesses casos, o grafismo é constituído por segmentos de reta, feito com dois movimentos e conseqüente necessidade de levantar o lápis.
5. O “5” apresentado é de longe o mais comum. No entanto, há quem o execute com movimento único e há quem deixe o segmento de reta superior para o final. Optando pela segunda hipótese, tem-se um numeral constituído por segmentos de reta e parte curva, feito com dois movimentos e conseqüente necessidade de levantar o lápis.

6. O “6” é muitíssimo comum e não merece um comentário muito particular. Trata-se de um movimento curvo único.
7. Em relação ao “7” passa-se um fenómeno muito semelhante ao “1”. O da esquerda é mais simples, mas traz facilmente a confusão com o número “1”. O da direita é ornamentado demais. A opção do centro parece a mais indicada. Trata-se de um grafismo constituído por segmentos de reta, feito com dois movimentos, e consequente necessidade de levantar o lápis.
8. O “8” da esquerda é feito com um movimento curvo único em “s”. O “8” da direita é um pouco “infantil”, sendo feito com duas bolinhas. A opção da direita é mais lenta e destoa da forma expedita como são feitos as restantes letras e numerais. É preferível investir na opção da esquerda.
9. O “9” da direita é quase igual ao da esquerda sendo o traço direito a única diferença. Esta opção é interessante na medida em que traz menos confusão com o “6”. Trata-se de um grafismo com parte curva e parte direita sem necessidade de levantar o lápis.

O motivo para se fazer este tipo de análise está na ideia de “planificação motora” e na importância que esta tem para as crianças quando aprendem a desenhar os numerais (ver, por exemplo, [14]). Os investigadores Joseph Payne, da Universidade de Michigan, e DeAnn M. Huinker, da Universidade de Wisconsin-Milwaukee, chamam-lhes *motor plans*. Nestes trabalhos é defendida a ideia de que é extremamente importante para a criança elaborar um “plano interno” para a escrita de cada numeral. Os educadores devem ajudar as crianças na elaboração dessa planificação motora dando relevo ao começo da escrita, direção, necessidade ou não de levantar o lápis, proporção do símbolo e caráter direito ou redondo do percurso. Cada numeral tem a sua estratégia e a criança pode ser ajudada tendo em conta vários fatores:

1. Numa primeira fase, os numerais devem ser feitos sobre pontilhados. Com essa prática, as crianças poderão apreender a direção do traço associada a cada numeral.
2. Pode haver marcas (tipicamente bolinhas) indicando o início da escrita. No caso em que o numeral exige mais do que um movimento, deve haver mais do que uma marca.
3. Os pontilhados podem apresentar setas indicando o sentido do percurso do traço.
4. Pode haver divisórias, em particular uma divisória a meio dos numerais, de forma a ajudar as crianças a intuírem a proporcionalidade dos símbolos e as zonas de começo da escrita. O ponto do numeral onde começa o traço é importante, mas também é igualmente importante o posicionamento desse ponto em relação ao numeral como um todo.
5. Os tamanhos podem variar gradualmente de grandes a pequenos. Mais, a utilização de pontilhados, setas e divisórias deve ir desaparecendo gradualmente.

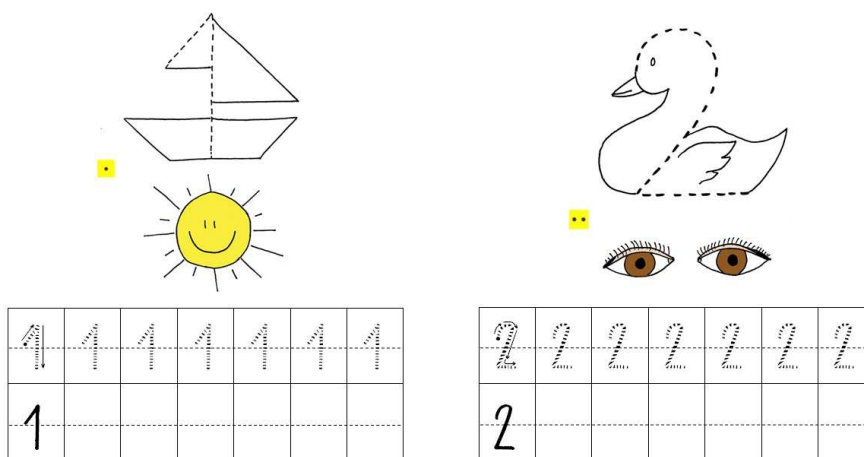


Figura 16: Um e dois.

É comum haver grafismo de treino associado aos pontilhados. Os educadores devem ter o cuidado de fazer com que esse treino esteja bem relacionado com o numeral em causa. Por exemplo, um três é constituído por movimento curvo com mudança de direcção; um bom grafismo de treino para o três consiste em tornear nuvens, uma vez que exige um movimento muito semelhante (Figura 17).

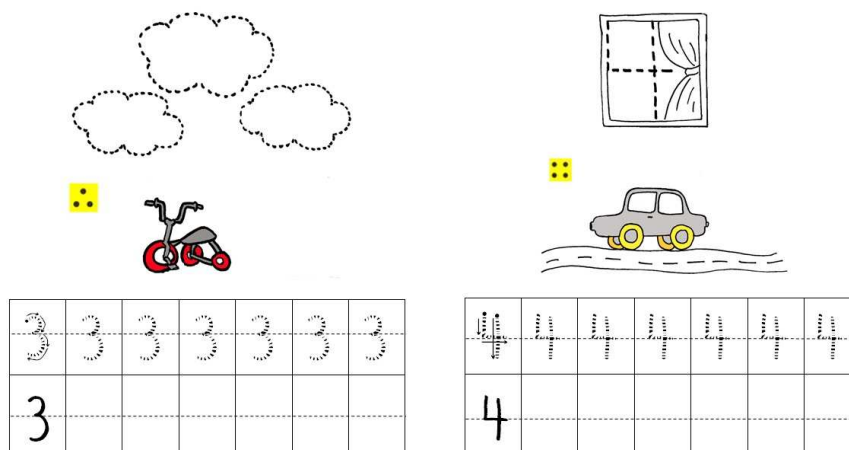


Figura 17: Três e quatro.

Além disso, para cada número, nada como associar um objeto bem escolhido. Quando se ensina o que é a cor vermelha, é mais pertinente associar-lhe um morango do que um gato. Isto porque os morangos são vermelhos e os gatos não costumam ser. A mesma coisa deve ser feita para os números. Por exemplo:

Sol só há *um*; as pessoas têm *dois* olhos; os triciclos têm *três* rodas; os carros têm *quatro* rodas; há *cinco* dedos numa mão; é costume ter seis ovos numa caixa; *sete* são as notas musicais; os *oito* braços de um polvo; e os bebés vivem *nove* meses na barriga da mãe antes de nascerem (Figuras 16, 17, 18, 19, 20).

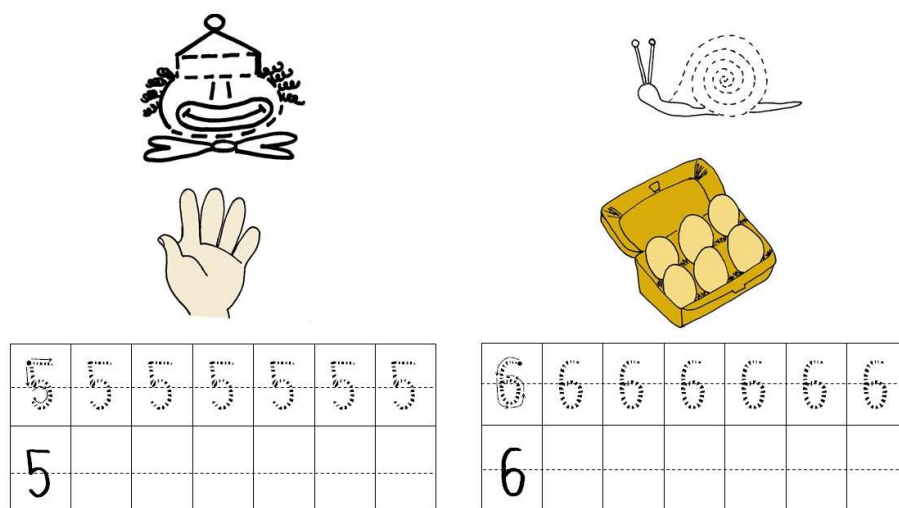


Figura 18: Cinco e seis.

Os educadores devem elaborar pontilhados para cada um dos numerais, testar na prática e ir melhorando os mesmos com o decorrer do tempo. De vez em quando, após a realização de uma contagem, as crianças podem ser convidadas a treinar um pouco. Há também forma de treinar a escrita de numerais sem ser num papel; uma bastante interessante consiste em utilizar placas de escrita que podem ser encontradas em quase todas as lojas para crianças.

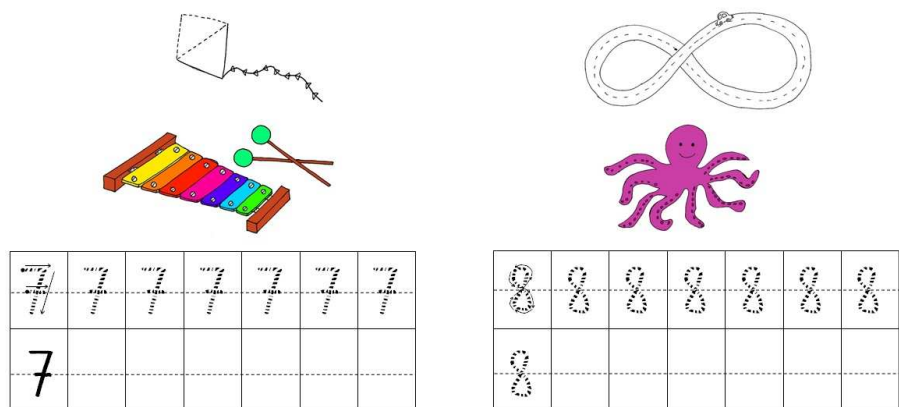


Figura 19: Sete e oito.

Duas notas finais quanto à ideia de planificação motora infantil dizem respeito à utilização de ritmo e imagem. Em relação à ideia de associar ritmo à planificação motora, uma abordagem típica costuma ser a utilização de lengalengas para cada um dos numerais. Em inglês, as lengalengas seguintes são muito conhecidas:

1. *A straight line one it is fun.*
2. *Around and back on the railroad track makes two, two, two.*
3. *Around the tree and around the tree. This is the way you make a three.*
4. *Down and across and down some more. This is the way you make a four.*
5. *With a straight neck and a round tummy, put his hat on, five sure looks funny.*
6. *Down to a loop, the six rolls a hoop.*
7. *Across the sky and down from heaven. This is the way you make a seven.*
8. *Make an “s” and do not wait. Climb back up to make an eight.*
9. *A loop and a line makes a nine.*

Em português, há algumas lengalengas numéricas muito pobres (pedimos desculpa aos autores, quem quer que eles sejam) tais como “dois com os bois, três com um chinês...”. A vantagem de uma lengalenga inteligente consiste em ritmar a planificação motora. Eis uma possibilidade em português (certamente o leitor inventará uma melhor):

1. Um chapeuzinho e para baixo a direito, assim se faz um *um* bem-feito.
2. Primeiro à volta e para trás depois, assim se faz um *dois*.
3. Primeiro à volta e à volta outra vez, assim se faz um *três*.
4. Para fazer um *quatro* facilmente, para baixo, para o lado e para baixo novamente.
5. Um pescoço direito, uma redonda barriga. Põe o chapéu no *cinco* e acaba a cantiga.
6. Primeiro uma curva e depois um aro, e tens um *seis*, é claro!
7. Um chapéu e um corpo para baixo, coloca o cinto e é um *sete* distinto.
8. Faz um “s” e sobe outra vez. É um *oito* com rapidez.
9. Uma volta e uma linha e tens um *nove* na folhinha.

Quanto à imagem, observamos que há inúmeros vídeos relativos à escrita de numerais na Internet<sup>10</sup>. A sua visualização pode ser mais uma ferramenta ao dispor dos educadores.

---

<sup>10</sup>Ver <http://youtu.be/1bu3Ef8G-mw>

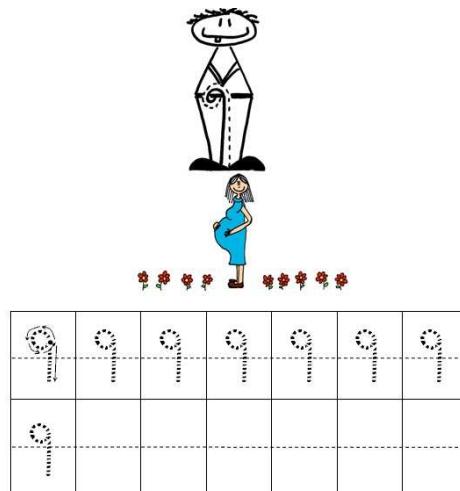


Figura 20: Nove.

### 3.2 Escrita espelhada

Um problema que é muito notado na prática diz respeito à escrita espelhada. É consensualmente aceite na literatura que aparece entre os 3 e os 7 anos e que faz parte do desenvolvimento motor e perceptivo da criança, desaparecendo quando os mecanismos motores passam a ser controlados por estratégias cognitivas. A avaliação e intervenção na escrita em espelho não tem merecido destaque no pré-escolar, não sendo esta sequer considerada uma dificuldade. A neurocientista Uta Frith, da University College London, no artigo [5] já com alguns anos, mas sempre atual, chama a atenção para o facto de não ser simples para uma criança dar importância à orientação de um símbolo (ainda para mais numa fase de pré-escrita). Se a “alma” de uma laranja ou de um carrinho de brincar não reside em estar para a esquerda ou para a direita, por que razão seria importante no caso do símbolo “2”? Ou seja, o factor orientação é irrelevante para a identificação de objectos 3D, sendo assim, é natural que também seja irrelevante para desenhos. Nesta perspetiva, a escrita espelhada é um ato de inteligência humana. Não nos devemos esquecer que a orientação da escrita é uma convenção, não é uma imposição da natureza...

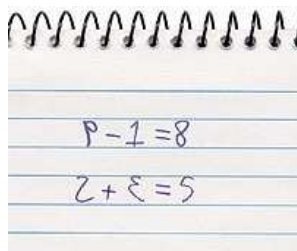


Figura 21: Numerais espelhados feitos por crianças.

No pré-escolar, a criança ainda está a definir a sua lateralidade pelo que, numa primeira abordagem, estes fenómenos devem ser encarados como sendo absolutamente naturais. Só se o erro for sistemático e se se prolongar muito no tempo é que é de pensar numa intervenção profissional. Aquilo que os educadores podem sempre fazer, sem qualquer prejuízo, é promover atividades para reforçar a lateralidade como, por exemplo, manter um objecto em equilíbrio numa mão enquanto com a outra se faz outra acção, moldar números com plasticina, etc.

Em relação à escrita das letras do alfabeto, há inclusivamente estatísticas relacionadas com as letras mais propícias a reflexões [2]. No caso dos numerais, não é tão fácil encontrar semelhante trabalho estatístico, no entanto, é sabido da prática que 6 e 9 são habitualmente confundidos e que 2, 3, 4, 5 e 7 são muito propícios a escrita espelhada<sup>11</sup>. Estas ideias constituem a razão de ser de alguns comentários feitos anteriormente em relação aos vários grafismos dos numerais.

## 4 Ordinalidade

Como vimos atrás, a cardinalidade diz respeito ao número de elementos de um conjunto. No caso da ordinalidade, o caso muda de figura, uma vez que as situações passam a envolver algum tipo de *ordem*. No caso da cardinalidade, não há a noção de individualidade do objeto; na frase “São seis peixes.”, o “seis” diz respeito ao conjunto como um todo e não a algum peixe em particular. No caso da ordinalidade, há a noção de individualidade; na frase “É o terceiro peixe.”, o “terceiro” individualiza um dos peixes [14]. Tudo passa a ser diferente, até ao nível do processo linguístico; um cardinal é substantivo e um ordinal, por individualizar, é adjetivo. A noção de ordinalidade é uma noção bastante mais complicada ao nível cognitivo infantil do que a noção de cardinalidade. Em primeiro lugar, isso deve-se ao facto da individualização exigir dois conceitos novos fundamentais: o ponto de referência (“terceiro” em relação a quê?) e a relação de um objeto com os outros (se um objeto é o “terceiro”, também há o “segundo” e o “primeiro” que são igualmente individualizados). Além disso, a ordem pressupõe sempre um critério; podemos ordenar coisas por aspetos temporais, tamanho, peso, etc.

---

<sup>11</sup>Ver <http://www.raisingreaders.com.au/resources/Articles/Reversals.htm>



#### 4.1 Situações ordinais, ordens e seriações, relações ordinais

Karen Fuson esclarece que há termos associados à ordinalidade que têm significados distintos [6]. É absolutamente essencial entender esses diferentes termos para que se possam compreender as limitações de uma criança do pré-escolar.

1. Situação ordinal é simplesmente uma situação já pronta para a utilização dos ordinais (primeiro, segundo, terceiro, etc). A ordem está completamente estabelecida e o trabalho da criança é compreender a posição de um objeto em relação aos restantes. De uma forma breve, a situação está pronta a ser atacada com termos ordinais. Há inúmeras situações ordinais desse tipo, inclusivamente contos infantis em que as personagens se colocam em “fila indiana” ao longo da história originando ricas ilustrações (ver Figura 22).



Figura 22: Episódio de *O Nabo Gigante*, de Tolstoi e Shankey, em que várias personagens puxam o dito legume.

2. O ato de ordenar ou de seriar é o que permite dar a uma situação o estatuto de situação ordinal. A ordenação ou seriação necessita de um critério em relação ao qual se ordena (no caso da Figura 22, é a ordem de chegada para puxar o nabo). Mas é possível ter-se uma ordenação sem que se tenha uma situação ordinal (se perguntarmos quantas personagens estão na fila a puxar o nabo, não temos uma situação ordinal; se perguntarmos quem é que está no segundo lugar da fila, já temos uma situação ordinal). Não é fácil distinguir os termos “ordenação” e “seriação”. Na realidade, inúmeros autores dão-lhe mais ou menos o mesmo significado. Uma definição comum de seriação costuma referir o *processo de ordenação de objetos associado a um ou mais atributos tais como comprimento, peso, cor, etc* [25]. Uma forma interessante de distinguir os dois termos consiste em colocar a seriação a um nível mais intuitivo e menos exigente em relação à estrutura lógico-relacional. Numa fase mais intuitiva, a criança consegue chegar à série por tentativas, quase como se os objetos o estivessem a pedir (Figura 23). Ela consegue resolver problemas devido ao facto de os erros serem evidentes pelo lado percetivo. De forma mais clara, o critério de seriação apela ao lado percetivo.



Figura 23: Matrioshka de 10 tamanhos.

No caso de ordenações mais sofisticadas, já é exigida alguma estrutura lógica, a criança é obrigada a fazer relações mentais para executar o processo. Um exemplo típico é o da Fig 24. A este exemplo chamaremos simplesmente tarefa de ordenação, uma vez que já não pode ser feita de forma intuitiva/manipulável.

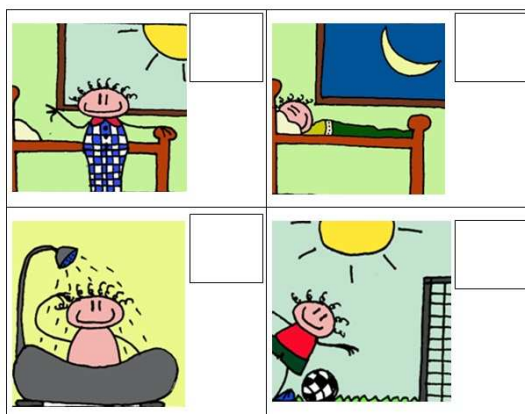


Figura 24: Um dia de uma criança.

3. As relações ordinais envolvem comparações e processos lógicos, por exemplo: “O sete vem depois do cinco na sequência” ou “O João é mais alto do que o António; o António é mais alto do que o Pedro; então tenho a certeza de que o João é mais alto do que o Pedro”. Piaget era muito pessimista em relação a conclusões como a da segunda frase, argumentando que a noção de transitividade não é adquirida em idades tão precoces. Na sua opinião, a simultaneidade existente no António (“António mais alto do que o Pedro e mais baixo do que o João”) apontando para duas relações explica, em boa parte, a dificuldade. Facilmente este tipo de discussão resvala para o tema da *Medida*, que já não cai no âmbito deste texto. Procuraremos abordar nas próximas linhas as fases primordiais da ordi-

nalidade não envolvendo ainda estruturas lógicas mais complexas. Termos linguísticos de ordem como “o que vem antes”, “o que vem depois”, entre outros, caem mais no âmbito destas primeiras fases do que termos como “qual é maior?”, “quanto maior?”, que resvalam mais para a temática da comparação e medida. Mas são assuntos interligados como veremos mais à frente.

## 4.2 Como abordar os ordinais?

Uma primeira ideia prática para educadores aponta para uma boa escolha de situações ordinais. As situações ordinais têm diferentes níveis de dificuldade. Na altura das primeiras aprendizagens, fase em que as crianças aprendem os termos ordinais, as situações escolhidas devem ser auto-explanatórias. Uma situação ordinal desse género é uma situação em que a ordem se pode perceber sensorialmente, só com um olhar, pegando com a mão, etc. Por exemplo, se olharmos para uma torre feita com cubos empilhados, sabemos qual foi o primeiro cubo a ser colocado, o segundo, o terceiro, etc. Nesse sentido a torre é uma situação ordinal auto-explanatória. Ao contrário, se chegarmos a uma sala com algumas pessoas, normalmente a ordem de chegada não é auto-explanatória. Na maioria dos casos, não podemos intuir a ordem apenas olhando para a cara das pessoas.



Figura 25: Empilhando cubos.

Além disso, fora os ordinais propriamente ditos (primeiro, segundo, terceiro,...) há termos associados a uma ordenação que são utilizados com imensa frequência tais como “antes de”, “depois de”, “último”, “a contar a partir de”. Um desafio importante consiste em ensinar o significado destes termos, tentando fazer com que estes comecem a ser utilizados no vocabulário quotidiano. É muito frequente as crianças já trazerem algum conhecimento sobre os termos “primeiro”, “depois” e “último” e essa temática deve continuar a ser explorada<sup>12</sup>. Depois, em algum momento (tipicamente na faixa dos quatro anos), o educador pode ensinar mais alguns ordinais como “segundo”, “terceiro” e “quarto” e promover diversos diálogos sobre situações ordinais. A título de exemplo, considere-se a Figura 26 e vejamos como se pode tentar fazer isso.

<sup>12</sup>Ver exemplo da *Rua Sésamo* em <http://youtu.be/kA39-UfB0oM>. É um episódio muitíssimo bem concebido, na medida em que trata os termos “primeiro”, “depois” e “último”, habitualmente conhecidos pelas crianças, com uma situação quotidiana (sopa-prato principal-sobremesa) e carregado de bom-humor.

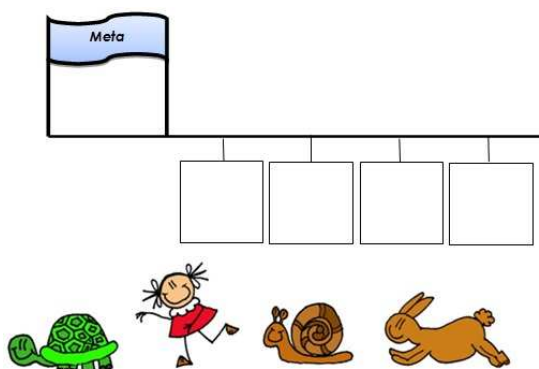


Figura 26: A Lebre e a Tartaruga (e mais dois intrusos).

Imaginemos que o educador, após contar a história clássica *A Lebre e a Tartaruga*, mostra a figura em causa e inaugura um debate sobre as velocidades da menina, lebre, tartaruga e caracol. Com esse debate, juntamente com as crianças, estas personagens são colocadas nos lugares certos. Em seguida, imaginemos que se pretende ensinar o que significa a palavra “terceiro”. Para esse efeito, é importantíssimo ligar o conceito cardinal ao conceito ordinal. Uma excelente ideia costuma ser etiquetar a situação (os numerais são colocados por baixo das personagens ordenadas), contando em seguida a partir do ponto de referência. Neste caso, a conversa típica seria: “Um, dois, três (apontando à vez para lebre, menina e tartaruga). Três, a tartaruga ficou em terceiro. Três, terceiro.” Ou seja, o que liga cardinalidade com ordinalidade é o facto de, contando ordenadamente até três a partir da referência, se ter o terceiro elemento. Esta ligação três/terceiro deve ser teatralizada muitas vezes até que a aprendizagem do ordinal suceda. E não se devem esperar facilidades.

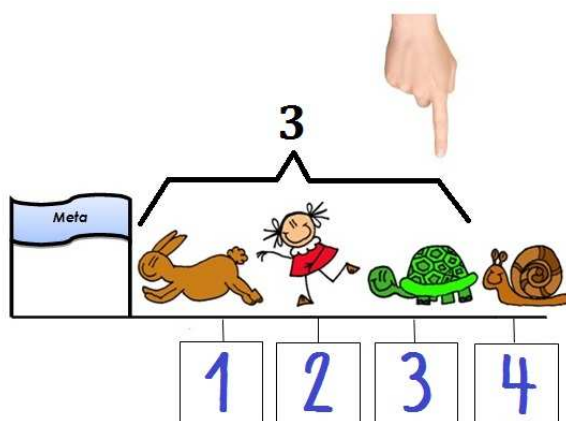


Figura 27: Ensinando ordinais.

Além disso, devem suceder-se muitas conversas sobre os termos típicos: “Quem vem logo depois da tartaruga?”, “Quem vai ficar em último?”, “Quem vem imediatamente antes da menina?”, “Quem vem em segundo lugar?”, etc. Repare-se que toda esta situação exemplo foi pensada para promover este tipo de diálogo.

### 4.3 A linha numérica

Um adulto tem uma noção exata e rigorosa da linha numérica. Sabe automaticamente que o 7 vem depois do 4, sabe contar salteadamente, isto é, conta a partir de certo número rapidamente, sabe contar para trás. Em resumo, a sequência dos números está controlada de todas as formas. Repare-se que, de certa forma, este conhecimento é necessário para se fazerem comparações numéricas. Imagine-se um contexto comparativo em que estão 5 berlindes num frasco e outros 7 berlindes num saco. Uma estratégia para responder à questão “Onde há mais berlindes?” consiste em realizar duas contagens chegando aos números 5 e 7, respondendo em seguida que há mais berlindes no saco. Mas isso pressupõe que está adquirido o conhecimento de que o 7 vem depois do 5 na sequência numérica e que, por isso, é maior. Ou seja, em muitos aspetos, o conhecimento sobre a linha numérica é prévio ao raciocínio comparativo. Estes fatores prévios são algumas das razões pelas quais as crianças pequenas apresentam grandes dificuldades face a contextos comparativos e de medida.

Sendo assim, a questão da linha numérica merece alguma reflexão. Karen Fuson chama a atenção de que, mais uma vez, este “controlo absoluto” é apreendido de forma faseada. A uma primeira fase chama de lista inquebrável. Nessa fase, as crianças, para saberem que o 7 vem depois do 5, têm de recitar a partir do 1. Este fenómeno é conhecido, até para alguns adultos, em relação ao abcdário. No entanto, em relação aos números há uma relação antecessor-sucessor que as letras não têm e que deve ser trabalhada. Sendo assim, especialmente em relação aos números, a fase da lista inquebrável deve ser ultrapassada, nomeadamente para que se possam abordar raciocínios comparativos mais sofisticados.

Para ajudar as crianças a atingirem a fase quebrável, há uma série de estratégias interessantes:

- A partir de certa altura apresentar muitas vezes a sequência completa ordenada dos dez primeiros números.
- Fazer pequenos exercícios do tipo “Conta a partir de...”. Alternativamente, apresentar pequenos segmentos para completar.
- Experimentar pequenas contagens para trás (por exemplo, um esquilo a comer sequencialmente um certo número de avelãs). Estas tarefas têm um grau de dificuldade elevado e nem sempre são bem-sucedidas.
- Executar periodicamente a contagem ordinal que consiste em dizer “Um. Um mais um são dois. Dois. Dois mais um são três. Três. Três mais um são quatro...”. Este tipo de contagem permite relacionar cada número com o seu sucessor o que constitui uma ideia-chave da sequência numérica.

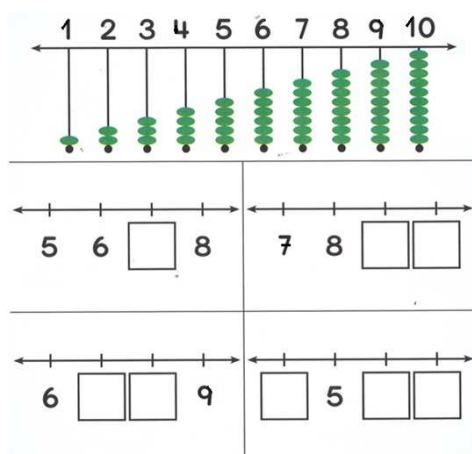


Figura 28: Sequência numérica.

Outra ideia para uma tarefa sobre esta temática consiste em apresentar uma fila de personagens sobre a linha numérica. O desenho deve apresentar um desfasamento e o que é proposto às crianças é a elaboração de traços com dedo indicador e lápis, correspondendo a primeira personagem com o número 1, a segunda com o número 2, etc. Este processo fundamental que consiste em alinhar uma série ordenada com a sequência numérica é importante, não sendo uma meta fácil de atingir.

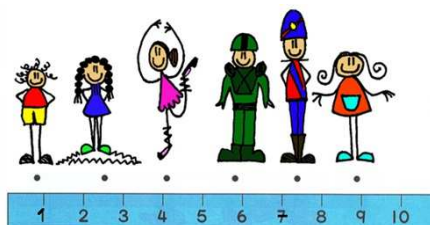


Figura 29: Correspondência.

Em relação à ordinalidade, o educador deve ter a noção de que uma compreensão sólida por parte da criança só poderá ser atingida em anos posteriores ao pré-escolar. Basta introduzir algum detalhe quanto ao ponto de referência para tornar uma tarefa quase impossível para idades muito reduzidas (Figura 30).

No entanto, tendo sempre em conta que o processo é altamente gradual, algumas ideias-chave que foram aqui explicitadas podem ser trabalhadas com eficácia, desde que simplificadas e com a componente didática adequada.



Figura 30: As crianças da imagem estão por ordem na paragem do autocarro. A quarta criança da fila tem chapéu. Rodeie a segunda criança. Por envolver um raciocínio em relação ao ponto de referência, este é um exemplo de tarefa normalmente muito complicada em idade pré-escolar.

## 5 Agradecimentos

Agradecemos a todo o núcleo de educadoras do Colégio de São Tomás em Lisboa que, além de acrescentarem o seu importante olhar sobre esta temática, contribuíram com grande parte das ilustrações presentes neste texto, retiradas diretamente da sua prática quotidiana.

## Referências

- [1] Baroody, A. J., “The developmental bases for early childhood number and operations standards”, In Clements, D. H., Sarama, J., DiBiase, A. M. (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*, 173-219, Lawrence Erlbaum Associates, 2004.
- [2] Brennan, A., “Mirror Writing and Hand Dominance in Children: A New Perspective on Motor and Perceptual Theories”, Academic Project, Supervisor Rob McIntosh, University of Edinburgh, 2012.
- [3] Clements, D. H., “Subitizing: What is it? Why teach it?”, *Teaching Children Mathematics*, March, 400-405, 1999.
- [4] Dehaene, S., *The number sense: How the mind creates mathematics*, Oxford University Press, 1997.
- [5] Frith, U., “Why do children reverse letters?”, *British Journal of Psychology*, 62, 459-468, 1971.
- [6] Fuson, K., *Children’s counting and concepts of number*, Springer-Verlag, 1988.
- [7] Gelman, R., Gallistel, C. R., *The Child’s Understanding of Number*, Harvard University Press, 1978.
- [8] Kaufman, E.L., Lord, M.W., Reese, T.W., Volkman, J., “The discrimination of visual number”, *American Journal of Psychology*, 62 (4), 498-525, 1949.
- [9] Marshall Cavendish Int (S) Pte Ltd, *Earlybird Kindergarten Math, STD ED, Textbook A*, Singapore, 2003.

- [10] Marshall Cavendish Int (S) Pte Ltd, *Earlybird Kindergarten Math, STD ED, Textbook B*, Singapore, 2003.
- [11] Mehler, J., Bever, T., “Cognitive capacity of very young children”, *Science*, 158, 141-142, 1967.
- [12] Merritt, D. J., Brannon., E. M., “Nothing to it: Precursors to a zero concept in preschoolers”, *Behavioural Processes*, 93, 91-97, 2013.
- [13] McGarrigle, J., Donaldson, M., “Conservation accidents”, *Cognition*, 3, 341-350, 1974.
- [14] Moreira, D., Oliveira, I., *Iniciação à Matemática no Jardim de Infância*, Universidade Aberta, 2002.
- [15] Payne, J., Huinker, D., “Early Number and Numeration”, In Jensen, R. J. (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Early Childhood Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, 1993.
- [16] Piaget, J., *The Child’s Conception of Number*, W.W. Norton & Co., 1965.
- [17] Piaget, J., Inhelder, B., *The Child’s Conception of Space*, Routledge and Kegan Paul, 1948.
- [18] Rouselle, L., Noël, M. P., “The development of automatic numerosity processes in preschoolers: Evidence for numerosity-perceptual interference”, *Developmental Psychology* 44 (2), 544-560, 2008.
- [19] Rule, A., “Effects of practical life materials on kindergartner’s fine motor skills”, *Early Childhood Education Journal*, Vol. 30, Issue 1, 9-13, 2002.
- [20] Shipley, E. F., Shepperson, B., “Countable entities: Developmental changes”, *Cognition*, 34, 109-136, 1990.
- [21] Smith, L., *Critical Readings on Piaget*, Routledge, 1996.
- [22] Strogatz, S., *Os prazeres de x*, Gradiva, 2013.
- [23] Thompson, I., “The principal counting principles”, National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics, *Early Years Magazine*, 7, 2010.
- [24] Thorndike, E. L., *The psychology of arithmetic*, Macmillan, 1922.  
<https://archive.org/details/psychologyofarit00thoruoft>
- [25] Welko, T., Kingma, J., “On the relation between seriation and number line comprehension: A validation study”, *Curriculum and Teaching*, 12(2), 59-69, 1997.
- [26] Wellman, H. M., Miller, K. F., “Thinking about nothing: developmental concepts of zero”, *British Journal of Developmental Psychology*, 4, 31-42, 1986.
- [27] Zhou, X., Wang, B., “Preschool children’s representation and understanding of written number symbols”, *Early Child Development and Care*, 174(3) pp. 253-266, 2004.



# *Problemas e Desafios*

---

## VAMOS À QUINTA PEDAGÓGICA! USANDO PROBLEMAS REAIS PARA EXPLORAR A OTD NO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

*Gabriela Rodrigues, Alexandra Gomes*

IE - Universidade do Minho, CIEC/IE - Universidade do Minho  
pg23246@alunos.uminho.pt, magomes@ie.uminho.pt

**Resumo:** *A resolução de problemas, a par do raciocínio e da comunicação matemática, é uma capacidade transversal que não deve ser desenvolvida isoladamente. Assim, a resolução de problemas pode ser o mote para a abordagem de vários temas matemáticos, tornando-os mais interessantes e motivadores dentro da sala de aula. Em particular, a resolução de problemas pode ser usada para explorar o tema Organização e Tratamento de Dados [OTD]. Neste artigo é apresentado um estudo realizado numa turma mista de 1.º e 4.º anos, do 1.º ciclo do Ensino Básico, no qual se pretendia desenvolver uma abordagem ao tema OTD através da resolução de problemas contextualizados em situações reais. A investigação de carácter qualitativo baseou-se na metodologia de Investigação-Ação e desenvolveu-se em nove sessões realizadas em contexto.*

*Os dados obtidos demonstram que as situações problemáticas baseadas no quotidiano ofereceram aos alunos uma efetiva compreensão das finalidades das várias ferramentas relativas ao tema, previstas para cada nível de ensino, uma vez que, no final do estudo, os alunos foram capazes de identificar, construir e interpretar ferramentas próprias da OTD.*

**Palavras-chave:** Resolução de problemas, organização e tratamento de dados, 1.º ciclo do ensino básico.

## 1 A Resolução de Problemas e a OTD

Desde muito cedo, todos nós começamos a desenvolver o gosto pela resolução de problemas. Segundo o *National Council of Teachers of Mathematics* [6], “as primeiras experiências das crianças mais novas com a matemática surgem

através da resolução de problemas” (p.59).

Mas, para se perceber em que consiste a resolução de problemas, é imprescindível saber o que é um problema. Pode-se definir um problema como uma situação que se quer resolver mas para a qual não existe um procedimento que conduza diretamente à solução [7, 4]. Neste sentido, a resolução de problemas constitui-se como uma mais-valia no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que permitirá que cada indivíduo se torne autónomo e consciente nas decisões que tiver que tomar durante a sua vida [6].

A resolução de problemas é encarada por vários autores como um processo sequencial, desenvolvido em várias fases. Polya [7] desenvolveu um método de resolução composto por quatro fases:

1. Compreensão do problema - deve-se compreender qual é a incógnita, quais os dados e quais as condições apresentadas;
2. Estabelecimento de um plano, onde se definem os planos/estratégias a utilizar para descobrir a incógnita;
3. Execução do plano, sendo analisados todos os passos efetuados;
4. Verificação dos resultados - interpretação e verificação do trabalho realizado tendo em conta a situação inicial.

Sendo encarada como uma capacidade transversal da Matemática, a par do raciocínio matemático e da comunicação matemática, a resolução de problemas abrange todos os tópicos programáticos, devendo ser devidamente explorada em cada um deles. Em particular, uma metodologia baseada na resolução de problemas pode ser uma boa opção para o desenvolvimento do ensino das noções de Estatística [1]. Com efeito, todos os dias, somos confrontados, através de diversos meios de comunicação social, com dados organizados em tabelas e gráficos de vários tipos, através dos quais a interpretação da informação se torna, supostamente, mais simples. Contudo, muitas dessas informações são complexas e podem ser falaciosas e perversas, detendo como principal objetivo influenciar a opinião pública [3]. É, por isso, indispensável que os cidadãos compreendam todo o tipo de informação, mesmo aquela que é apresentada através de representações e indicadores estatísticos [8].

Estando intimamente ligado ao contexto, este tópico permite o desenvolvimento de investigações estatísticas, desde os primeiros anos do ensino básico. “Devem ser os alunos, sob a orientação do professor, a planear a recolha dos dados necessários, para dar resposta às suas questões, nomeadamente sob a forma de pequenos projectos de investigação” ([5], p.13).

Assim, logo a partir dos primeiros anos escolares, devem ser proporcionadas aos alunos oportunidades de realizarem investigações estatísticas. Uma investigação estatística compõe-se por 4 etapas [5]:

- A primeira etapa de uma investigação estatística destina-se à formulação das questões que se pretendem investigar. Nesta etapa é conveniente verificar a pertinência das questões e a natureza dos dados que se pretendem descobrir a partir das mesmas.

- A segunda etapa baseia-se na recolha de dados. No entanto, antes desta recolha de dados é necessário definir um plano que seja apropriado e optar pelas técnicas e pelos materiais de recolha mais adequados.
- A terceira etapa consiste na análise dos dados. Nesta deve-se proceder à escolha da representação mais apropriada, tendo em conta a natureza dos dados e os objetivos pretendidos.
- A quarta, e última, etapa refere-se à interpretação dos resultados, à formulação de conclusões inerentes aos dados recolhidos e ao surgimento de novas questões que poderão servir de âncora para novas investigações.

Observando as etapas de uma investigação estatística, pode-se constatar que se assemelham, de certa forma, às 4 fases da resolução de problemas definidas por Polya. Além disso, à semelhança daquilo que é um problema, um problema estatístico é uma questão bem definida que é colocada numa das etapas da investigação estatística, para a qual não se conhece, à partida, um processo de resolução [5].

É possível, então, constatar que a resolução de problemas e a Estatística podem estar intrinsecamente relacionadas em diversas situações.

## 2 O estudo

O presente estudo insere-se num projeto mais amplo, realizado no âmbito do Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico, que teve como principal objetivo a abordagem de um tópico programático da matemática - a Organização e Tratamento de Dados [OTD] - partindo da resolução de problemas contextualizados, relativos à vida quotidiana dos próprios alunos.

Este estudo foi desenvolvido numa turma mista de 1.º e 4.º anos composta por 14 alunos: 5 alunos do 1.º ano e 9 alunos do 4.º ano e adotou uma metodologia de natureza qualitativa, com características de uma Investigação-Ação [2].

Os dados foram recolhidos usando vários instrumentos, tais como, gravações audiovisuais, notas de campo e produções dos alunos.

Ao todo foram concretizadas nove sessões, com duração variável entre os 90 e os 180 minutos, que possibilitaram a realização de investigações estatísticas relacionadas com o quotidiano dos alunos.

O estudo desdobrou-se em três grandes momentos: apresentação do problema e realização do projeto dentro da sala de aula; consolidação do tema e expansão do projeto a toda a escola; avaliação final do projeto.

De seguida, apresenta-se, de forma sucinta, cada um dos momentos deste estudo.

## 2.1 Primeiro momento: Apresentação do problema e realização do projeto dentro da sala de aula

Neste primeiro momento foi desenvolvida uma investigação estatística que partiu de um problema contextualizado, relativo a uma visita de estudo, que os alunos iriam realizar posteriormente, a uma quinta pedagógica. O problema consistia em descobrir quais seriam “as atividades, da quinta pedagógica, mais escolhidas”; quais “as atividades complementares que teriam mais «adeptos»” e quais “os animais favoritos dos alunos”, de entre um leque de opções apresentado. Estes diferentes elementos foram considerados as variáveis em estudo. Durante a discussão em torno do problema, os alunos expuseram a necessidade de estudar uma quarta variável: “as motivações que levaram à escolha de determinada atividade”.

Os alunos foram divididos em 4 grupos de trabalho (2 grupos do 1.º ano e 2 do 4.º ano) e a distribuição das variáveis por cada um desses grupos configurou-se como o último passo da primeira etapa da investigação.

No início da segunda etapa, os grupos foram convidados a estabelecerem um plano para recolher os dados relativos à variável que tinham ao seu encargo. Não foram fornecidos quaisquer modelos ou formas de recolha de dados pois o objetivo era compreender que tipos de estratégias os alunos encontravam para conseguirem resolver o problema com que se confrontaram.

Surpreendentemente, ambos os grupos do 1.º ano, foram refletindo sobre a importância de registar os dados conseguindo, até, enunciar algumas sugestões bastante pertinentes, tais como:

**Hugo (1.º ano):** Se nós não escrevermos num papel o que as crianças dizem depois não nos lembramos.

**Investigadora:** O Hugo tem toda a razão, nós temos que registar num papel. Como é que vamos fazer isso? Alguém tem alguma ideia?  
(...)

**Investigadora:** Como é vamos colocar no papel, por exemplo, o que é um “gato” e quem é que escolheu o gato?

**Inês (1.º ano):** Podemos pôr um gato e podemos pôr a primeira letra do nome de cada menino.

**Transcrição 1:** Estabelecimento de relações entre as atividades e os conhecimentos dos alunos.

Foi extremamente interessante verificar que os alunos conseguiram delinear uma estratégia de recolha de dados e criar uma forma de os organizar que se assemelhava a um *tally chart* (Figura 1).

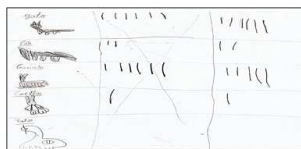


Figura 1: Estratégia criada por um grupo do 1.º ano que se assemelhava a um *tally chart*.

Relativamente ao 4.º ano, curiosamente, ambos os grupos optaram por escolher dois porta-vozes que se deslocaram pela sala, apresentando aos colegas as opções relativas à sua variável e assinalando, numa folha, os dados recolhidos, tendo em conta o género e a idade de cada colega (Figura 2).

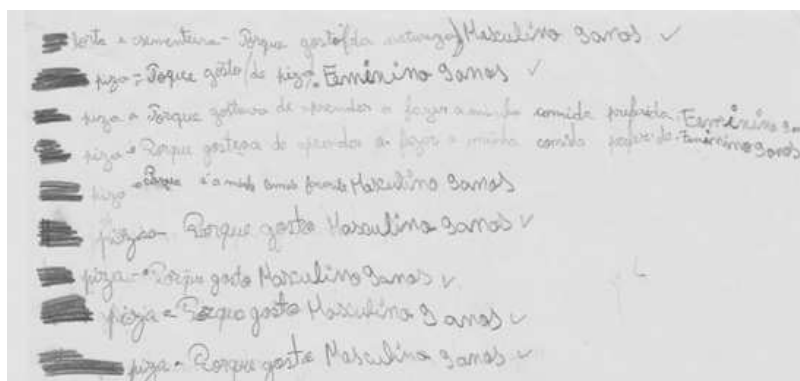


Figura 2: Estratégia de recolha utilizada por um dos grupos do 4.º ano.

No momento dedicado à procura de uma forma de representação adequada (terceira etapa), também não foram fornecidos quaisquer instrumentos nem ferramentas. Foi feita uma troca de ideias, em grande grupo e as várias propostas que apareceram foram apresentadas no quadro pelos respetivos “autores”.

À medida que algum aluno apresentava a sua proposta, os colegas expunham sugestões que visavam a melhoria da mesma, tornando este momento de debate e de troca de ideias verdadeiramente significativo e frutífero, não só para a aprendizagem dos alunos como, também, para o próprio estudo. Com o decorrer das apresentações, as propostas tornaram-se cada vez mais interessantes, até que, em determinada altura, um dos alunos conseguiu esboçar uma forma de representar os dados (Figura 3) que já se assemelhava a uma ferramenta característica da OTD: o pictograma.



Figura 3: Sugestão de um dos alunos que se começou a assemelhar a um pictograma.

Depois de, em grupos, terem organizado os dados relativos às “suas” variáveis, utilizando uma estratégia por si delineada (o 1.º ano com algum auxílio), os alunos foram confrontados com as ferramentas próprias da OTD, previstas para os dois níveis de ensino: *tally charts*, gráficos de pontos e pictogramas.

Para a exploração dos gráficos de barras no 4.º ano, cada grupo foi convidado a apresentar o seu gráfico realizado na sessão anterior. Este momento tornou-se extremamente interessante pois apesar de ambos os grupos se terem baseado na mesma variável (“atividades escolhidas”), cada grupo escolheu uma segunda categoria diferente: um grupo decidiu focalizar-se apenas nos alunos de 9 anos e fazer a distinção de géneros, utilizando 2 barras para cada atividade (Figura 4), e o outro grupo optou por fazer a distinção por idades, utilizando apenas uma barra dividida em duas, para cada atividade (Figura 5).

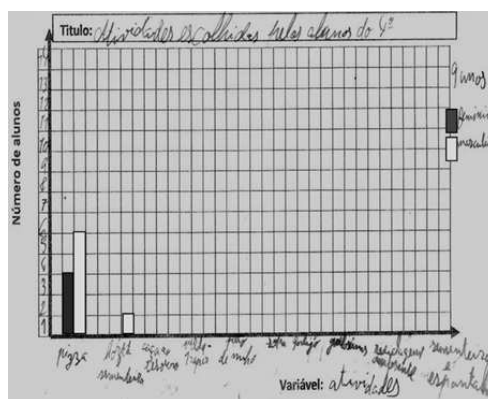


Figura 4: Gráfico de barras realizado por um dos grupos focalizado no estudo da preferência dos alunos com 9 anos e fazendo a distinção de géneros em duas barras distintas.

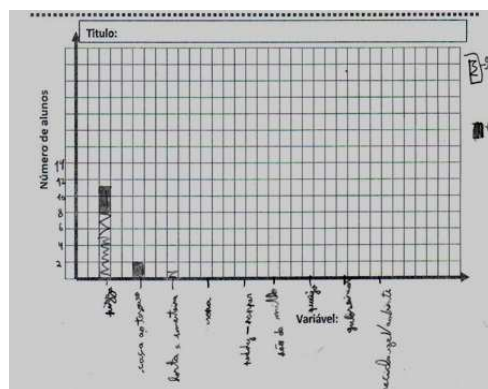


Figura 5: Gráfico de barras realizado pelo outro grupo fazendo a distinção de idades numa mesma barra.

Esta diferença na forma de representação, assim como a utilização de escalas diferentes, permitiu uma abordagem distinta e uma troca de conhecimentos mais contextualizada entre ambos os grupos em questão, contribuindo para uma aprendizagem mais rica.

A organização dos “seus” dados em ferramentas próprias da OTD conduziu à quarta etapa deste processo, ou seja, à *verificação/interpretação dos resultados*, através dos quais os alunos consideraram que seria imprescindível a realização de uma nova investigação que incluísse toda a escola, de modo a que os resultados fossem fidedignos, incluindo, não apenas uma amostra, mas sim, toda a população.

## 2.2 Segundo momento: Consolidação do tema e expansão do projeto a toda a escola

A expansão deste projeto a toda a escola só foi possível porque esta abarcava, no total, 34 alunos.

Uma vez encontrados o motivo e a pertinência para a realização de uma nova investigação (primeira etapa), os alunos encetaram o estabelecimento de um plano (segunda etapa) para procederem à recolha de dados, começando por seleccionar o método de recolha mais apropriado. Em unanimidade, optou-se pela utilização de pequenos inquéritos relativos às variáveis em estudo (Figura 6).

Figura 6: Inquéritos relativos a cada uma das variáveis.

Ainda neste momento foi realizada a preparação logística da apresentação do estudo à sala do lado, onde foram seleccionados dois porta-vozes do 4.º ano, que ficaram encarregues de apresentar, sucintamente, o projeto e as variáveis em estudo. Nesta apresentação, foi evidente a atenção e a curiosidade dos alunos da outra sala, o que permitiu que o momento se tornasse bastante interessante, uma vez que possibilitou o estabelecimento de relações entre as categorias das variáveis e o quotidiano dos alunos, proporcionando, também, o intercâmbio de conhecimentos entre os alunos das duas salas [6, 5].

Após a recolha dos dados, e já novamente na sala, os alunos enveredaram pela *execução do plano* (terceira etapa), mais propriamente, pela análise dos novos dados, procedendo inicialmente à junção destes com os anteriores e passando, posteriormente, à organização dos dados relativos a toda a população em estudo.

Para a organização dos dados em gráficos de barras, ambos os grupos do 4.º ano superaram as expectativas pois, apesar de representarem variáveis distintas, cada grupo enveredou por uma forma diferente de representar a informação. Enquanto um grupo optou por utilizar 8 cores para fazer as distinções e colocou toda a informação relativa a cada categoria numa só barra (Figura 7), o outro grupo decidiu utilizar apenas 4 cores para cada categoria, construindo 2 barras para efetuar a distinção entre géneros (Figura 8).

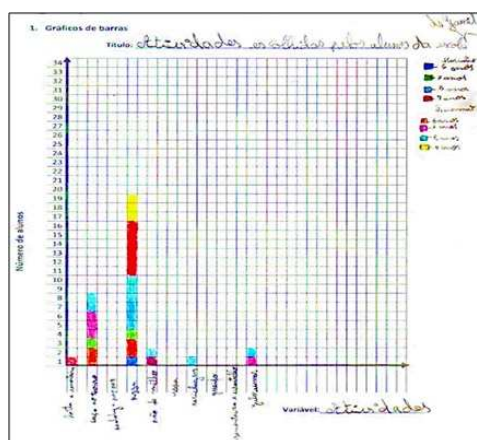


Figura 7: Gráfico de barras com oito cores e uma barra em cada categoria.

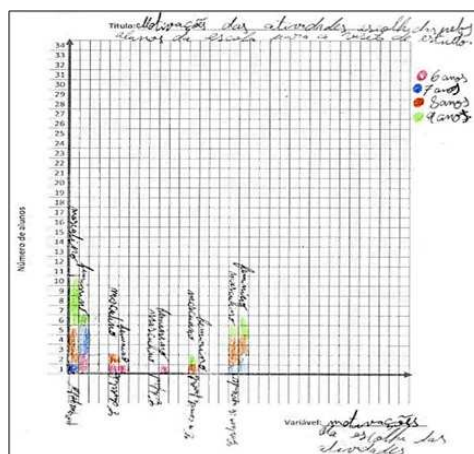


Figura 8: Gráfico de barras com quatro cores e duas barras para cada categoria.



Este momento foi extremamente enriquecedor pois permitiu aos alunos apresentarem e explicarem os seus gráficos confrontando diferentes representações. A reflexão realizada em torno dos gráficos de barras permitiu que os alunos compreendessem não só as justificações para os gráficos serem distintos, como também percebessem que podem existir várias formas de representar dados numa mesma ferramenta.

Finalmente, foi feita a *verificação/interpretação dos dados* relativos a esta investigação e a formulação de conclusões inerentes à situação inicial.

Tratando-se de dados relativos à comunidade escolar, os alunos consideraram que seria pertinente apresentar os resultados à comunidade alargada. Para tal, os alunos do 4.º ano prepararam um texto de divulgação do projeto, onde referiram as principais etapas realizadas no âmbito do mesmo. Ambos os anos prepararam, também, cartazes com os dados da segunda investigação organizados em ferramentas da OTD (Figura 9) e expuseram-nos na cantina da escola com o objetivo de apresentar os resultados aos restantes alunos da escola.



Figura 9: Cartazes preparados pelos alunos.

## 2.3 Terceiro momento: Avaliação final do estudo

Ainda que ao longo das intervenções se tenha realizado uma avaliação preliminar do estudo baseada na postura dos alunos nas suas realizações e no seu comportamento, na última intervenção, os alunos tiveram a oportunidade de realizar uma ficha de avaliação (adaptada a cada ano) composta por uma série

de problemas e exercícios totalmente descontextualizados. Estas fichas tiveram como principais objetivos, além de avaliar o próprio estudo, compreender se os alunos adquiriram os conhecimentos e desenvolveram as competências previstas no âmbito da OTD.

A correção da ficha de avaliação do 1.º ano permitiu constatar que os alunos conseguiram assimilar os diferentes conteúdos, uma vez que os resultados foram extremamente positivos, superando até as expectativas (Figura 10).

Resultados da ficha de avaliação – 1.º ano					
Nº do Aluno	1	2	3	4	5
Cotação Total (%)	96%	77%	97%	99%	84%

Figura 10: Resultados da ficha de avaliação do 1.º ano.

Através da correção foi possível, também, averiguar que nenhuma questão causou algum tipo de dificuldade generalizada para os alunos e que estes, no geral, obtiveram a pontuação máxima nas questões de construção de ferramentas próprias da OTD.

A ficha de avaliação do 4.º ano era constituída, na sua maioria, por adaptações de exercícios de exames nacionais, relativos à OTD. Neste nível de ensino ficou evidenciado que, apesar das notas serem mais díspares que as do 1.º ano, os alunos adquiriram os conteúdos previstos no âmbito do tema (Figura 11).

Resultados da ficha de avaliação – 4.º ano									
Nº do Aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cotação Total (%)	59%	65%	95%	87%	54%	86%	90%	55%	80%

Figura 11: Resultados da ficha de avaliação do 4.º ano.

Relativamente à análise da correção das fichas, foi possível constatar que existiram algumas dificuldades na associação entre as ferramentas representadas em imagens e os seus respetivos nomes, sendo que a troca nas associações deu-se, maioritariamente, entre os *tally charts* e as tabelas.

Por outro lado, todos os alunos interpretaram bem a informação contida num pictograma e mais de metade dos alunos elaborou corretamente um gráfico de barras a partir de dados representados numa tabela.

Deste modo, as correções das fichas de avaliação de ambos os anos, assim como as restantes avaliações realizadas no âmbito do estudo, permitiram concluir que esta abordagem permitiu uma efetiva assimilação dos conteúdos por parte dos alunos.

### 3 Considerações finais

As situações problemáticas baseadas no quotidiano parecem ter oferecido, aos alunos, uma enorme carga de motivação, uma vez que estes, desde cedo, compreenderam as finalidades das ferramentas da OTD e também que os resultados que encontrassem teriam algum tipo de repercussão real na sua vida. Esta motivação permitiu que os alunos adquirissem um papel ativo em todo o processo, conduzindo ao desenvolvimento de momentos extremamente frutíferos, contribuindo para a sua aprendizagem.

Este estudo demonstrou que, quando os alunos detêm um papel ativo na sua aprendizagem, são capazes de encontrar, por si próprios, soluções para os entraves com os quais se deparam. Deter um papel ativo implicou refletir sobre as ações realizadas e estas reflexões possibilitaram o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática.

### Referências

- [1] Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I. *A Matemática na educação básica*, Ministério da Educação - D.E.B., 1999.
- [2] Cohen, L., Manion, L., Morrison, K. *Research methods in education*, Routledge, 2008.
- [3] Fernandes, J. A., Portela, J. “Elementos de estatística descritiva - A folha de cálculo no estudo de estatística”, P. Palhares (Ed.), *Elementos da Matemática para professores do Ensino Básico*, pp. 53-54, Lidel, 2004.
- [4] Kantowski, M. G. “Some thoughts on teaching for problem solving”, R.E. Reys (Ed.), *Problem solving in school mathematics*, Reston, VA: NCTM, 1980.
- [5] Martins, M. E. G., Ponte, J. P. *Organização e Tratamento de Dados*, Lisboa: Ministério de Educação, 2010.
- [6] NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2007.
- [7] Polya, G. *How to solve it*, Princeton University Press, 1945 [Tradução portuguesa, *Como resolver problemas*, Gradiva, 2003]
- [8] Ponte, J.P., Serrazina, M.L. *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*, Lisboa: Universidade Aberta, 2000.
- [9] Vale, I., Pimentel, T. “Resolução de problemas”, P. Palhares (Ed.), *Elementos da Matemática para professores do Ensino Básico*, pp. 7-52, Lidel, 2004.



# *Problemas e Desafios*

---

## PROBLEMAS DOS NOSSOS AVÓS (1)

*Helder Pinto*

CIDMA - Universidade de Aveiro

hbmpinto1981@gmail.com

**Resumo:** *Nesta secção do Jornal das Primeiras Matemáticas apresentam-se regularmente alguns problemas de matemática de livros escolares portugueses do passado.*

**Palavras-chave:** Manuais de matemática antigos, problemas de matemática elementar.

### 1 Preâmbulo

Nesta secção do *Jornal das Primeiras Matemáticas* apresentaremos regularmente alguns problemas de matemática que foram publicados em livros escolares portugueses do passado. Contaremos com a colaboração dos nossos leitores, que poderão fazendo-nos chegar cópias de problemas antigos que considerem interessantes através de o e-mail hbmpinto1981@gmail.com.

### 2 Arithmetica progressiva, 1880

Os textos apresentados nesta e nas próximas secções foram-nos enviados pela professora de matemática Amélia Meireles da Costa, a quem desde já agradecemos o contributo.

O extrato de um livro escolar publicado no Rio de Janeiro pelo Professor António Trajano [4], dá-nos uma curiosa e singular descrição das medidas e moedas em circulação na Judeia no tempo de Jesus Cristo. Note-se que o autor pretende dar alguns esclarecimentos para que os discípulos possam “compreender com precisão e clareza os textos onde elas são referidas”. Afirmar-se ainda que as tabelas apresentadas foram construídas “com muita precisão e sobre bases que não oferecem duvida alguma” e que no final são ainda apresentados “problemas sobre as medidas e moedas judaicas”. De facto, a matemática, ou melhor, os

problemas e contextos em que esta é trabalhada vão-se alterando ao longo de diferentes gerações - note-se que um texto matemático como o apresentado a seguir, pelo menos em Portugal, muito dificilmente teria lugar num livro escolar atual.

— 144 —

### Tabella das medidas e moedas em circulação na Judéa no tempo de Jesus Christo

**269.** Como as medidas e moedas mencionadas nos livros do Novo Testamento são quasi desconhecidas e ignoradas, ao ponto de serem muito raras as pessoas que teem uma idéa exacta das dimensões ou valores que ellas representam, vamos dar aqui alguns esclarecimentos sobre este ponto, para os discipulos se familiarizarem com estas medidas e moedas, e poderem comprehender com precisão e clareza os textos onde ellas são referidas para illustrar o ensino.

**Medidas de comprimento.** Entre os Judeus havia, no tempo de Jesus Christo, tres medidas de comprimento, que eram o cúbito, o estádio e a jornada de um sabbado.

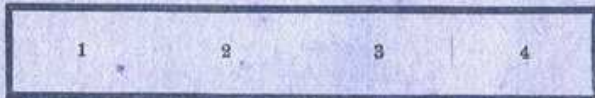
**Cúbito,** do latim *cubitus*, era a medida geral de comprimento dos antigos egypcios, babilonios, gregos e romanos, e tinha por base a distancia desde o cotovella até a extremidade do dedo superior. O cúbito hebreu era igual ao cúbito egypcio, porque os judeus, durante a sua longa estada no Egypto, adoptaram nas suas medições o cúbito alli usado.

No Museu Real de Pariz ha dois exemplares antigos do cúbito, sendo um hebreu e o outro egypcio. Estes exemplares estão divididos em 6 partes iguaes chamadas mãos, e cada mão dividida em 4 partes iguaes chamadas dedos. Só pelo labor e pelas lettras é que elles podem ser distinguidos, porque ambos teem o comprimento de 20 pollegadas inglezas exactas. Ora, como a pollegada ingleza tem  $0^m,0254$ , segue-se que 20 pollegadas são  $0^m,508$ , isto é, meio metro e oito millimetros.

Portanto

o cúbito	tem	$0^m,508$ ,
a mão	tem	$0^m,084$ ,
o dedo	tem	$0^m,021$ .

A escala seguinte mostra o tamanho exacto da mão travessa, dividida em quatro dedos. Seis dimensões como esta formam o tamanho exacto do cúbito:



**Estádio,** distancia de  $\frac{1}{8}$  da milha romana, era a medida itineraria que os judeus haviam adoptado dos romanos, (Luc. 24; 13). Tinha a extensão de 185 metros.

**Jornada de um sabbado** era a distancia desde o tabernaculo até as tendas mais afastadas no acampamento de Israel no deserto. Este espaço media 2000 cúbitos que perfazem 1016 metros. Era esta a maior distancia que o israelita podia andar em um sabbado, e isso sómente para fins religiosos. (Act. 1; 12).

**270. Medidas de capacidade.** As medidas de capacidade usadas entre os judeus naquella epocha eram as seguintes:

Medidas	Logares onde são mencionadas	Equivalencia em litros
<b>Chénica</b>	(Apoc. 6; 6.)	1,08
<b>Módio</b>	(Math. 6; 16. Marc. 4; 21).	8,64
<b>Sáto, módio e meio</b>	(Math. 13; 33.)	12,96
<b>Metréta</b>	(João 2; 6.)	38,88
<b>Báto</b>	(Luc. 16; 6.)	38,88
<b>Córo</b>	(Luc. 16; 6.)	388,80

Figura 1: Arithmetica Progressiva, 1880 (1).



- 145 -

**271. Moedas.** Naquella epocha, circulavam na Judéa não sómente moedas judaicas, mas também moedas gregas e romanas que tinham a seguinte relação :

O talento valia 60 minas,	O siclo valia 4 drachmas,
a mina " 100 drachmas,	o stater " 4 drachmas,
a drachma " 10 asses,	a didrachma " 2 drachmas,
o asse " 4 quadrantes,	a drachma " 1 denário,
o quadrante " 2 leptos.	o denário " 10 asses

Moedas	Logares onde são mencionadas	Valores em moeda brasileira
<b>Lepto</b>	(Marc. 12; 42, Luc. 12; 59.)	\$ 003 $\frac{1}{2}$
<b>Quadrante</b>	(Marc. 12; 42.)	\$ 007 $\frac{1}{4}$
<b>Asse</b>	(Math. 10; 29, Luc. 12; 6.)	\$ 031 $\frac{1}{2}$
<b>Denário</b>	(Math. 18; 28, Marc. 6; 37 e outros.)	\$ 315
<b>Drachma</b>	(Luc. 15; 8 e 9.)	\$ 315
<b>Didrachma</b>	(Math. 17; 23.)	\$ 630
<b>Stater</b>	(Math. 17; 28.)	1 \$ 260
<b>Siclo</b>	(Math. 26; 15, Zach. 11; 13.)	1 \$ 260
<b>Mina</b>	(Luc. 19; 16.)	31 \$ 500
<b>Talento</b>	(Math. 18; 24 e outros logares.)	1 : 890 \$ 000

**Nota.** Estas tabellas foram calculadas com muita precisão e sobre bases que não offerecem duvida alguma, por isso exprimem com exactidão os valores que apresentam.

Damos aqui os nomes originaes das medidas e moedas judaicas, porque os traductores que verteram o texto do Evangelho para a nossa lingua, foram muito infelizes na escolha dos termos para traduzir os nomes originaes destas medidas. Assim o *modio*, que tinha 8 litros, foi traduzido por *alqueire* que, entre nós, tem 36 litros. A *metrêta*, que tinha 38 litros, foi traduzida por *almude*, que tem apenas 16. A *chénica*, que era maior que o litro, e como unidade de peso era igual a duas libras romanas, valor por que S. Jeronymo a traduziu fielmente para a vulgata. (Apoc. 6; 6.), a *chénica* foi vertida para o Portuguez pela expressão "*meia oitava*", quando duas libras romanas eram equivalentes a 24 onças ou a 192 oitavas!!! O *sato*, unidade determinada e muito vulgar na Judéa, e que tinha 12 litros, foi traduzido pelo termo *medida* que não exprime grandeza alguma, e que deixa um sentido vago, porque tanto póde significar uma medida grande, como uma pequena. O *cúbilo* que tinha pouco mais de 50 centímetros, sem chegar a 51, foi traduzido por *covado* que tem 66, isto é, mais 16 centímetros do que a medida original, ficando assim falseados todos os calculos feitos com esta base. Finalmente o *denário*, moeda romana tão conhecida e vulgar no tempo antigo, que era igual á drachma grega, e cuja etymologia attesta o seu valor que eram 10 asses, foi traduzido pela palavra *dinheiro*, termo vago sem significação definida, porque exprime qualquer moeda ou qualquer quantia, sem lhe precisar valor algum.

E deste modo, ficou desfigurada pela traducção a belleza de muitas passagens, onde o valor exacto das medidas e das moedas realça e demonstra a sabedoria e a logica do ensino alli exposto. Estas tabellas tem por fim remediar até certo ponto esse inconveniente, deixando ver com precisão o valor quantitativo revelado no texto.

**272.** Para exercicio de applicação, vamos resolver os seguintes problemas sobre as medidas e moedas judaicas:

**1º Problema.** Nas bodas de Caná da Galiléa havia seis talhas de pedra, que levavam, pelo menos, duas metrêtas cada uma. E faltando o vinho no banquete, estas talhas foram cheias de agua, e a agua transformou-se em vinho. Quantos litros de vinho continham então as seis talhas ?

**Solução.** Levando cada talha 2 metrêtas, as 6 talhas levam  $2 \times 6 = 12$  metrêtas. Tendo cada metrêta 38,88, as 12 metrêtas equivaliam a  $38,88 \times 12 = 466,56$ , isto é, 466 litros e 56 centilitros.

10 A. P.

Figura 2: Arithmetica Progressiva, 1880 (2).

### 3 Elementos de aritmética (segunda classe), 1926

A seguir apresentam-se alguns problemas de um livro de aritmética da segunda classe de 1926 [2] onde se podem encontrar problemas de proporções e juros. Note-se que o estudo da questão dos juros, após um período em que estiveram quase totalmente fora dos programas, voltou a estar na ordem do dia por força da atualidade política e económica que o país atravessa.

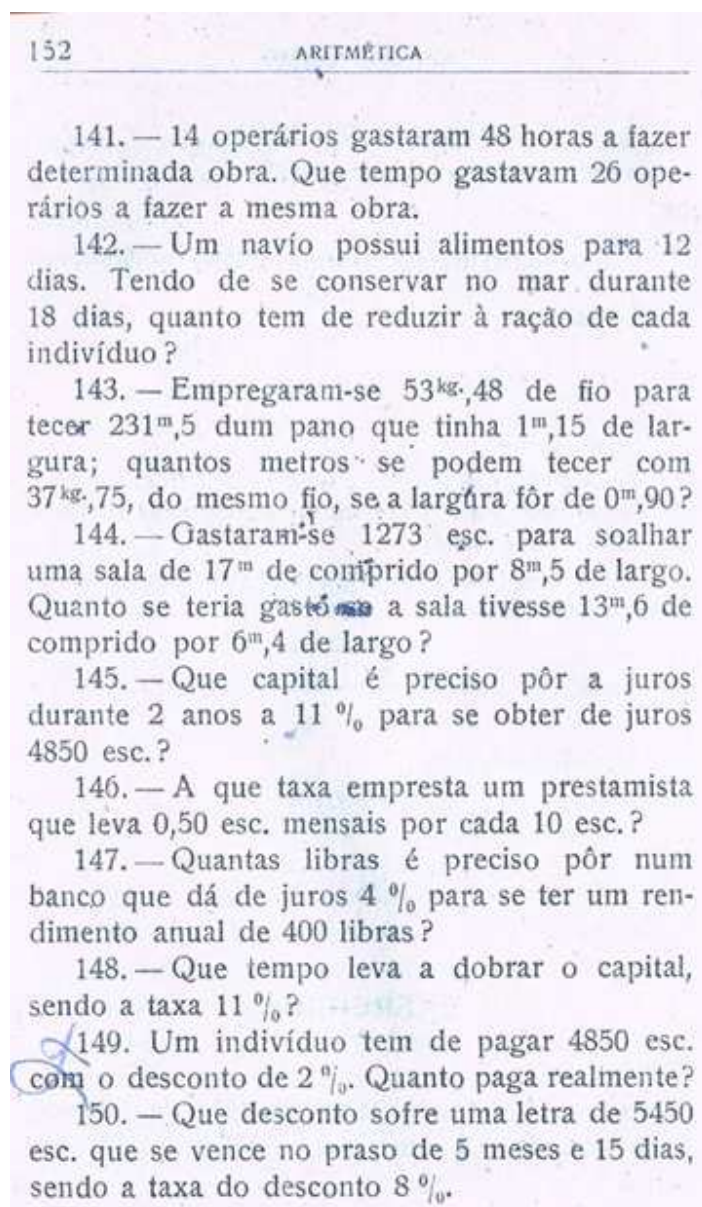


Figura 3: Elementos de aritmética (segunda classe), 1926 (1).



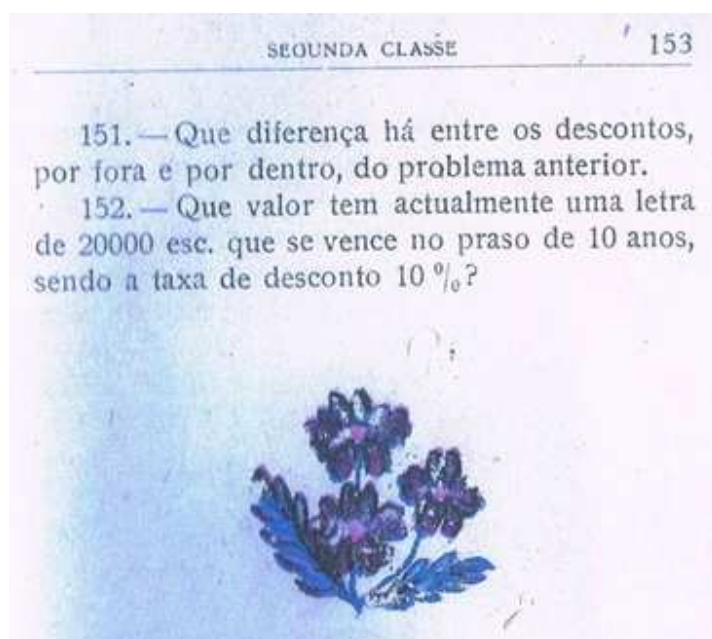


Figura 4: Elementos de aritmética (segunda classe), 1926 (2).

#### 4 Geometria (Para o ensino da IV e V classes dos *Lyceus*), 1906

O próximo exemplo trata-se de uma *Geometria* para alunos de *Lyceu*, embora tenha sido escrita por um lente da antiga Academia Politécnica do Porto (uma das antecessoras da Universidade do Porto) [1].

No primeiro problema que apresentamos pede-se para calcular o valor de  $\pi$  considerando a fórmula (não exata) usada pelos antigos egípcios para o cálculo da área de círculos. Nesse mesmo exercício faz-se ainda referência a uma famosa passagem da Bíblia onde se afirma que o valor de  $\pi$  é 3, o que é uma muito pior aproximação. Note-se ainda o facto de, já em 1905, se utilizarem episódios da História da Matemática no ensino de matemática elementar.

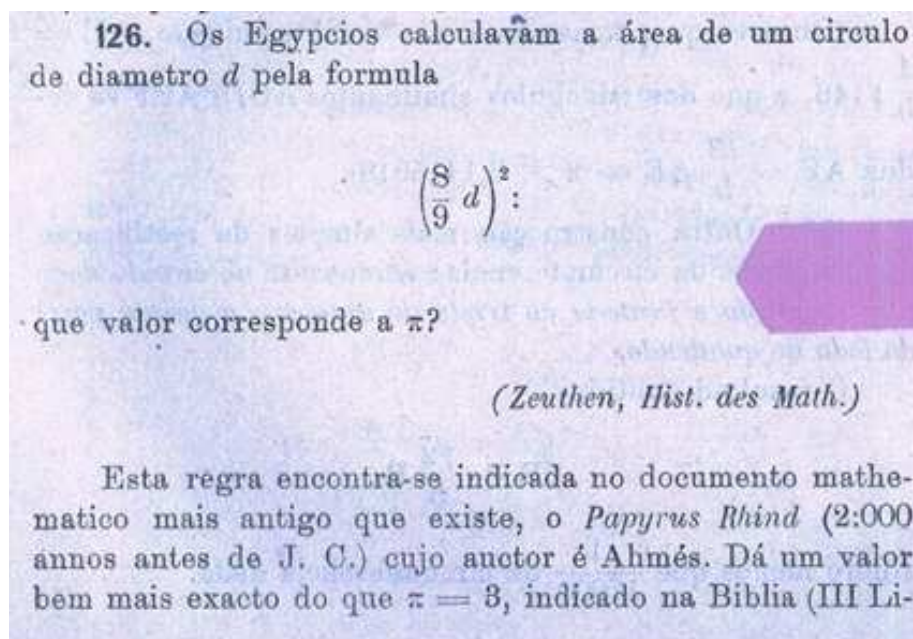


Figura 5: Geometria (Para o ensino da IV e V classes dos *Lyceus*), 1906 (1).

Os parágrafos que se seguem dizem respeito ao problema da retificação da circunferência, problema que deixou de estar referenciado nos textos escolares atuais. Este problema consiste em construir um segmento de reta que tenha o mesmo comprimento que uma determinada circunferência. Sabe-se que é impossível fazê-lo usando apenas régua e compasso, mas existem aproximações bastante satisfatórias. O que se mostra são algumas dessas resoluções, onde se apresentam os respetivos erros cometidos.

vro dos Reis, cap. III, 23, da vulgata latina), e em uso entre os Judeus e Babylonios.

127. A somma dos lados do quadrado e do triangulo equilatero inscriptos em um circulo dá o valor approximado da semi-circumferencia do circulo, com um erro, por excesso, inferior a meia millesima do raio.

128. O perimetro de um triangulo rectangulo cujos cathetos são os  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{6}{5}$  do diametro de uma circumferencia dá o valor approximado d'essa circumferencia, com um erro, para excesso, inferior a uma decima-millesima do raio.

129. Tire a um circulo uma tangente; tome sobre ella, a partir do ponto de contacto A, seguidamente, os segmentos  $AB =$  ao dobro do raio,  $BC =$  a um quinto do raio,  $CD =$  a dois quintos do raio; tire do centro O os segmentos OC, OD, e sobre a recta OA, no sentido de A para O, o segmento  $AE = OC$ ; e finalmente conduza por E a parallela a OD até á intersecção F com a recta AB; o segmento AF dá o valor approximado da rectificação da circumferencia, com um erro, para defeito, inferior a uma mil-lionesima do raio (Specht, *Jornal de Crelle*, t. III, pag. 83).

(Observe que, tomando o raio igual á unidade,  $AE = \frac{1}{5} \sqrt{146}$ , e que dos triangulos semelhantes AOD, AEF se deduz  $AF = \frac{13}{5} AE = 2 \times 3,1415919$ ).

130. Outra construcção mais simples da rectificação approximada da circumferencia: *Inscрева-se no circulo dado um quadrado e junte-se ao triplo do diametro a quinta parte do lado do quadrado.*

O resultado obtido

$$6R + \frac{\sqrt{2}}{5} R$$

differe menos que  $\frac{1}{17000}$  da circumferencia dada.

Figura 6: Geometria (Para o ensino da IV e V classes dos *Lyceus*), 1906 (1).

## 5 Arithmetica (primeira classe), 1905-1910 (?)

Em relação ao exemplo da *Arithmetica (primeira classe)* que se segue [3], uma vez que o exemplar do qual foram retirados os extratos já não possui as primeiras páginas, não nos foi possível indicar nem o autor, nem o ano, em que esta obra foi publicada (provavelmente entre 1905 e 1910). O texto aqui reproduzido apresenta o sistema monetário do final da nossa monarquia.

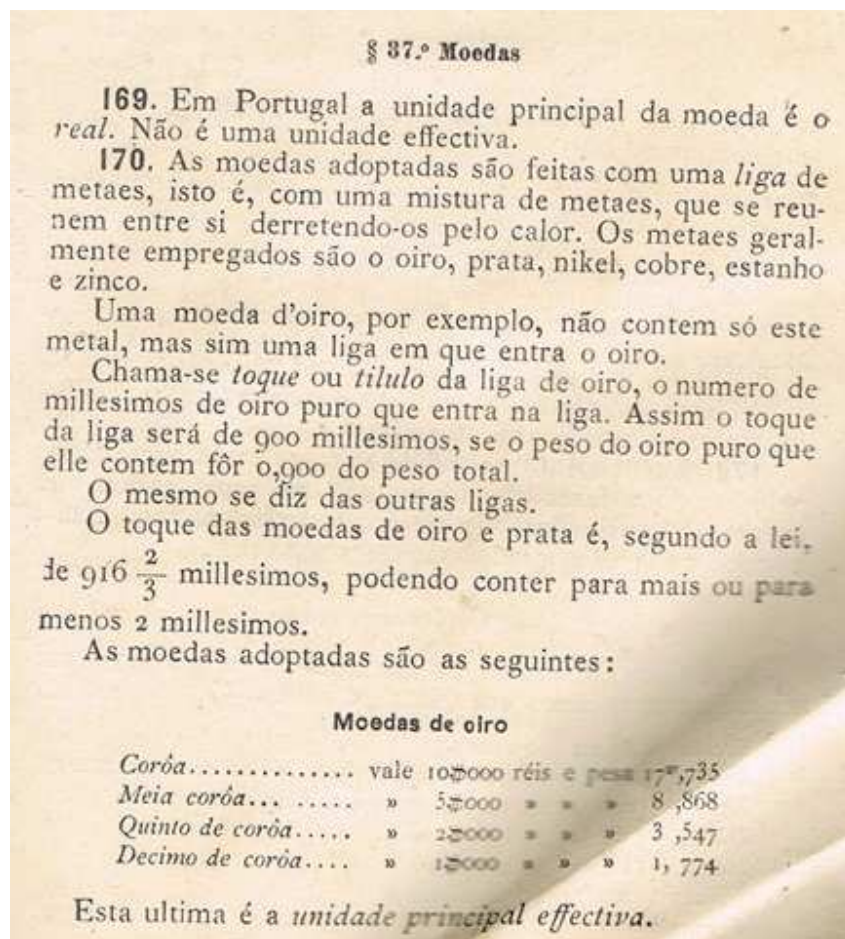


Figura 7: Arithmetica (primeira classe), 1905-1910 (?) (1).



100	ARITHMETICA (I CLASSE)
<b>Moedas de prata</b>	
Dez tostões.....	vale 1\$000 réis e pesa 25 <sup>m</sup>
Cinco tostões.....	» 500 » » » 12 ,5
Dois tostões.....	» 200 » » » 5
<b>Moedas de níquel</b>	
Tostão.....	vale 100 réis e pesa 4 <sup>gr</sup>
Meio tostão.....	» 50 » » » 2 ,5
<b>Moedas de bronze</b>	
Vintem.....	vale 20 réis e pesa 12 <sup>gr</sup>
Dez réis.....	» 10 » » » 6
Cinco réis.....	» 5 » » » 3
<p>171. Além d'estas, ainda circulam em Portugal as moedas antigas de ouro:</p> <p>Peça ou dobra ..... que vale 8\$000 réis e pesa 14<sup>gr</sup>,188</p> <p>Meia peça ou meia dobra..... » » 4\$000 » » » 7 ,094</p> <p>e também as moedas inglezas de ouro:</p> <p>Libra esterlina ou soberano..... que vale 4\$500 réis e pesa 7<sup>gr</sup>,981</p> <p>Meia libra ou meio soberano. » » 2\$250 » » » 3 ,990</p> <p>A libra esterlina (lb) vale 20 shillings (sh), o shilling 12 dinheiros esterlinos (dst) ou pence (pen).</p>	
<p>172. Moeda papel. O banco de Portugal está auctorisado pelo estado a fazer circular notas, que representam ouro ou prata. As primeiras são de 50\$000 réis, 20\$000 réis e 10\$000 réis; as segundas são de 5\$000 réis.</p>	

Figura 8: Arithmetica (primeira classe), 1905-1910 (?) (2).

## Referências

- [1] Albuquerque, Joaquim d'Azevedo. *Geometria (Para o ensino da IV e V Classe dos Lyceus)*, Typographia Occidental, Porto, pp. 287-288, 1906.
- [2] Martins, Augusto. *Elementos de Aritmética*, Edição de Maranos; Porto (2ª edição), pp. 152-153, 1926.
- [3] ?. *Arithmetica (I Classe)*, s/l, s/d, pp. 99-100.
- [4] Trajano, António. *Arithmetica Progressiva*, Typ. de Martins de Araújo & C., Rio de Janeiro, pp. 144-145, 1880.



## *Necessidades Educativas Especiais*

---

### JOGOS MATEMÁTICOS: REGRAS EM LÍNGUA GESTUAL PORTUGUESA

*Alda Carvalho, Carlos Pereira dos Santos, Laura Nunes*

ISEL & CEMAPRE, CELC, DMCE do CED Jacob Rodrigues Pereira/Casa Pia de Lisboa

acarvalho@adm.isel.pt, cmfsantos@fc.ul.pt, laura.nunes@casapia.pt

**Resumo:** Desde 2004, a Associação Ludus, a Associação de Professores de Matemática, a Ciência Viva e a Sociedade Portuguesa de Matemática têm unido esforços na realização de um Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM) que conta, anualmente, com a participação de dezenas de milhar de alunos do Ensino Básico e Secundário. O evento é um caso raro de sucesso, longevidade e cooperação institucional, realizando-se no dia 6 de Março de 2015, na Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (Vila Real), a final da sua décima primeira edição. A escolha dos jogos das diversas edições do CNJM tem tido em conta conteúdo lógico-matemático, variedade, importância histórica, facilidade de feitura, idade dos jogadores, etc. Essa escolha não excluiu de forma alguma participantes com Necessidades Educativas Especiais (NEE). O acesso das pessoas com NEE à educação é hoje um direito inalienável desta população, no quadro de uma “escola para todos”, preconizada por diversos documentos internacionais (Declaração de Jomtien, 1990; Declaração de Salamanca, 1994) e nacionais (Lei de Bases do S.E., 1986; D.L. nº 3/2008, entre outros). Pretende este trabalho constituir um “Livro de Regras dos Jogos do CNJM11”, concebido em Língua Gestual Portuguesa e legendado em Língua Portuguesa Escrita, de forma a poder ser consultado por alunos surdos, famílias e educadores/professores.

**Palavras-chave:** Alunos surdos, jogos matemáticos, língua gestual portuguesa, necessidades educativas especiais.

## 1 Jogos Matemáticos

É comum ouvir-se dizer que a prática de certos jogos de tabuleiro é benéfica para a aprendizagem da matemática. É também comum ouvir-se dizer que este tipo de jogos estimula os jovens a pensar. Intuitivamente percebemos que estes

jogos estão mais próximos da matemática do que, por exemplo, da prática do salto em altura ou da destreza nas artes plásticas. As razões para essa proximidade tanto podem ser diretas, como indiretas. As razões indiretas prendem-se com uma série de competências comuns à prática dos jogos de tabuleiro e ao desenvolvimento da matemática. Podemos enumerar algumas das mais importantes:

- **Concentração:** Quem não se concentra para captar os fatores relativos a situações problemáticas nunca pode obter bons resultados nem no jogo, nem na matemática. Por vezes, um dos problemas que surge nas crianças durante as aprendizagens matemáticas é precisamente esse: não ter um nível de concentração que permita sequer ter a apreensão do que está em cima da mesa. Este é também um problema que surge em algumas crianças, quando iniciam a sua prática nos jogos.
- **Visualização:** Uma das coisas mais importantes para um jogador consiste em prever uma sequência de ações antes que esta aconteça. Na matemática esta competência é fundamental, na visualização de aspetos gráficos, aspetos lógicos, aspetos geométricos... No jogo, é mais fácil perceber que as sequências a visualizar, são sequências de jogadas. Na matemática, também há sequências de argumentação, sequências gráficas, etc. . .
- **Pensar primeiro, agir depois:** Um inimigo comum a quase tudo: agir primeiro e pensar depois. Não devemos responder aos problemas que surgem sem ponderar primeiro na resposta. Este aspeto é absolutamente vital tanto no jogo como na matemática (como em muitas outras áreas).
- **“Pesar” as opções:** Os processos de decisão são baseados na ponderação dos prós e contras associados às opções. Tanto os problemas matemáticos, como problemas de jogo, podem ser atacados através de várias alternativas. É na capacidade de avaliação desses caminhos que reside a sofisticação na compreensão dos assuntos matemáticos e nos temas dos jogos.

Outras competências poderiam ser mencionadas: memorização, capacidade de cálculo, etc.

Há aspetos ligados aos jogos que são tratados diretamente com a matemática. A título de exemplo, podemos mencionar o *Jogo de Marienbad*, resolvido pelo matemático C. L. Bouton, ou o *Jogo Pontos e Quadrados*, objeto de estudo do matemático E. Berlekamp.

Outra forma de constatar essa relação direta entre o jogo de tabuleiro e a matemática prende-se com a estrutura de análise baseada em teoremas que são mais ou menos importantes e mais ou menos generalizáveis. Se isso é facilmente aceite na matemática, também é um fenómeno importante nos jogos porque certas técnicas são passíveis de abstração, definindo padrões úteis em várias situações, distintas no detalhe mas similares na essência, nas diferentes partidas de um mesmo jogo.

Os fatores ligados às emoções humanas também podiam ser mencionados. O contacto com a competição e com a existência de outro ser humano a querer



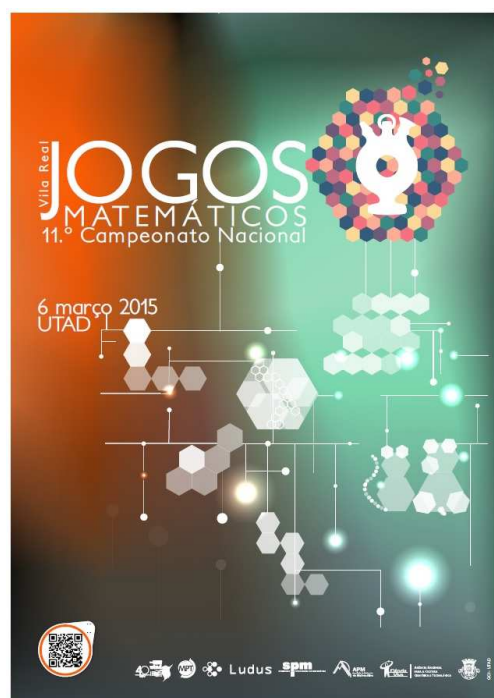
contrariar-nos as ideias, também é um fator benéfico associado aos jogos. Regra geral, os jovens aderem melhor aos jogos do que à matemática precisamente por se tratarem de jogos. Pensar dá prazer. O ato de pensar é algo que pode trazer plena realização a uma pessoa ao sentir que o seu pensamento produziu uma solução para determinado problema.

Por vezes, na prática da matemática os problemas não são tão apelativos e importantes para um jovem como uma vitória sobre o seu adversário. A meta nos jogos é imediatamente visível pelo jogador, pelo seu adversário e por eventuais terceiros e traduz-se simplesmente no resultado da partida. O tipo de prazer associado ao pensamento matemático e ao pensamento do jogo é muitas vezes semelhante, mas dada a facilidade e a importância para os jovens do objetivo, quase sempre os jogos são mais cativantes. Sendo assim, convém salientar que os jogos não substituem a matemática. Os seus objetivos são diferentes, mais virados para a competição e prazer imediato. A matemática tem objetivos estruturais, com enorme importância cultural e esteio fundamental para o desenvolvimento científico. Isto não costuma ser tão facilmente apreendido pelos jovens. Os jogos matemáticos são uma boa prática esporádica. Tal como a natação faz bem à saúde, os jogos matemáticos fazem bem ao desenvolvimento de certas práticas mentais. Devem servir apenas como prática complementar.

Há ainda algo importante a dizer. A prática dos jogos, tal como outra coisa qualquer, só tem hipóteses de ser benéfica, se a pessoa tentar melhorar e aperfeiçoar os seus conhecimentos. Jogar por jogar, sem tentar pensar nas melhores soluções, tira totalmente o encanto a qualquer jogo e elimina os fatores benéficos que esta prática possa trazer. Os jogos matemáticos são para ser pensados, na busca das melhores decisões para alcançar o objetivo do jogo. Se não for assim, não estamos realmente a jogar.

Desde 2004, a Associação Ludus, a Associação de Professores de Matemática, a Ciência Viva e a Sociedade Portuguesa de Matemática têm unido esforços na realização de um **Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos** que conta, anualmente, com a participação de dezenas de milhar de participantes do Ensino Básico e Secundário (**Consultar** [?]). O evento é um caso raro de sucesso, longevidade e cooperação institucional, realizando-se no dia **6 de Março de 2015, na Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (Vila Real), a final da sua décima primeira edição.**

O nosso foco incidiu, desde o início, sobre os jogos sem informação escondida (ao contrário da batalha naval, por exemplo) e sem factor sorte (ao contrário do Gamão, por exemplo), a que chamamos jogos matemáticos. A escolha dos jogos das diversas edições do CNJM tem tido em conta conteúdo lógico-matemático, variedade, importância histórica, facilidade de feitura, idade dos jogadores, etc. Essa escolha **não excluiu de forma alguma participantes com Necessidades Educativas Especiais (NEE)**. Pretende este trabalho constituir um **Livro de Regras dos Jogos do CNJM11**, concebido em Língua Gestual Portuguesa e legendado em Língua Portuguesa Escrita, de forma a poder ser consultado por alunos surdos, famílias e educadores. As próximas secções contêm links “clicáveis” para esse efeito.



	1º CEB	2º CEB	3º CEB	Sec.
Semáforo	X			
Gatos & Cães	X	X		
Rastros	X	X	X	
Avanço		X	X	X
Produto			X	X
Sesqui				X

Figura 1: Poster e distribuição dos jogos do CNJM11.

## 2 Semáforo

Clique em <http://youtu.be/8ML9CZpuZXw>



Figura 2: Semáforo.

### 3 Gatos e Cães

Clique em <http://youtu.be/JSgICDVbjKg>



Figura 3: Gatos e Cães.

### 4 Avanço

Clique em <https://www.youtube.com/watch?v=1koH79bnbUY&feature=youtu.be>



Figura 4: Avanço.

## 5 Rastros

Clique em <http://youtu.be/VGYWSp7mqvk>



Figura 5: Rastros.

## 6 Produto

Clique em <http://youtu.be/ySXz1ZcoBkA>



Figura 6: Produto.

## 7 Sequi

Clique em <https://www.youtube.com/watch?v=wm51PgBysfs>



Figura 7: Sesqui.

## 8 Ficha Técnica

### **Regras de Jogos Matemáticos em Língua Gestual:**

DMCE do CED Jacob Rodrigues Pereira

Casa Pia de Lisboa

Associação Ludus

### **Formadora surda:**

Marisol Coelho

### **Intérprete:**

Paulo Ataíde

### **Equipa do Projeto de Incentivo à Matemática:**

Laura Nunes, Cláudia Fernandes e Vera Gomes

### **Associação Ludus (Comissão do CNJM):**

Alda Carvalho, Carlos Pereira dos Santos e Jorge Nuno Silva

### **Realização:**

Alda Carvalho, Carlos Pereira dos Santos e Laura Nunes

## Referências

- [1] <http://ludicum.org/cnjm/2014-2015-cnjm11>