Jornal das Primeiras MATEMÁTICAS

Número 12
Setembro, 2019

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR

Ludus

Há um parêntesis que separa...

Ana Paula Garrão, Margarida Raposo
Núcleo Interdisciplinar da Criança e do Adolescente da Universidade dos Açores
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade dos Açores
ana.po.garrao@uac.pt, margarida.js.raposo@uac.pt

Resumo: *Reconhecer as propriedades das operações aritméticas é uma das metas referidas no programa de Matemática do Ensino Básico. Apresentamos exemplos de problemas verbais, atravéz dos quais os alunos chegam à generalização de algumas dessas propriedades. Nos níveis de ensino mais elementares, provar a falsidade de uma determinada propriedade, nomeadamente através de contraexemplos, é mais acessível do que provar a sua veracidade. Aproveitando a temática das propriedades das operações, apresentamos exemplos de conjeturas que podem ser testadas pelos alunos e que se revelam, algumas delas, falsas.*

Palavras-chave: Propriedades das operações aritméticas, ensino básico.

1 Introdução

No ensino da matemática somos muitas vezes confrontados com situações em que os alunos tendem a generalizar/aplicar determinadas propriedades que são apenas válidas em contextos específicos. O uso de contraexemplos é uma forma eficaz de as pôr em causa.

Explorar regularidades, formular e investigar conjeturas e, numa fase mais avançada a sua demonstração, são objetivos gerais do ensino da Matemática. Mesmo as crianças mais novas não podem aprender Matemática com compreensão sem se envolverem na atividade de justificar. Dependendo do nível de ensino, nem sempre é adequada uma demonstração que valide uma propriedade. Por exemplo, em [1] são propostas atividades que levam os alunos a conjeturar resultados através de casos particulares, mas cuja demonstração é efetuada nos Ensinos Secundário e Superior, refere-se ainda que a atividade de descoberta, baseada em casos particulares, de regularidades que se vêm a revelar como resultados gerais é uma etapa que deve ser considerada de forma adequada ao nível de ensino. Consideramos que também é importante, nas várias fases do ensino da Matemática, proporcionar atividades aos alunos que os levem a refutar conjeturas.

Nos níveis de ensino mais elementares, provar a falsidade de uma determinada propriedade, nomeadamente através de contraexemplos, é mais acessível do que provar a sua veracidade. O nosso propósito é apresentar exemplos de conjeturas, que podem ser testadas pelos alunos e que se revelem, algumas delas, falsas.

As situações, aqui expostas, envolvem a discussão de contraexemplos matemáticos restritos às propriedades de algumas operações, podendo enquadrar-se no domínio Álgebra do 5.º ano, visando, nomeadamente, as seguintes metas referidas no programa de Matemática do Ensino Básico [3]:

1. Conhecer as prioridades convencionadas das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e utilizar corretamente os parênteses.

2. Reconhecer as propriedades associativa e comutativa da adição e da multiplicação e as propriedades distributivas da multiplicação relativamente à adição e à subtração e representá-las algebricamente.

10. Simplificar e calcular o valor de expressões numéricas envolvendo as quatro operações aritméticas e a utilização de parênteses.

11. Traduzir em linguagem simbólica enunciados matemáticos expressos em linguagem natural e viceversa, sabendo que o sinal de multiplicação pode ser omitido entre números e letras e entre letras, e que pode também utilizar-se, em todos os casos, um ponto no lugar deste sinal.

Ponte, Branco e Matos, em [2] referem que as propriedades das operações aritméticas devem ser reconhecidas em casos particulares e, progressivamente, generalizadas e que a identificação destas propriedades e a sua generalização, desde os primeiros anos de escolaridade, constituem uma base importante para o pensamento algébrico. Referem ainda que, o estabelecimento de relações, associadas às propriedades das operações, e a sua expressão, primeiro em linguagem natural e depois, progressivamente, em linguagem simbólica, é um dos aspetos do pensamento algébrico.

Após o reconhecimento destas propriedades, uma vez que alguns alunos têm tendência a, apressadamente, generalizar, poder-se-á questioná-los acerca da existência ou não dessas propriedades em contextos diferentes. É de esperar que alguns alunos afirmem a existência dessas propriedades, surgindo diferentes conjeturas. Cabe ao professor pedir a justificação para tais afirmações. Inevitavelmente, os alunos irão recorrer a exemplos concretos, surgindo contraexemplos que podem mostrar a falsidade de uma generalização por meio de uma única exceção.

2 Associatividade

Uma das propriedades referidas nas metas curriculares é a propriedade associativa da multiplicação.

Antes da generalização da propriedade, o professor poderá apresentar um problema verbal aos alunos, levantando questões que levem à resolução do problema de duas formas diferentes e assim reconhecerem a propriedade associativa da multiplicação num caso particular.

Exemplo 1: Temos duas caixas, cada uma tem quatro sacos e cada saco tem três laranjas.

Quantas laranjas há no total nas duas caixas?

Caixa 1

Caixa 2

Numa primeira fase o professor poderá começar por promover uma discussão, onde os alunos irão expressar as suas ideias, acerca do exemplo . Tal discussão deverá ser orientada de modo que surjam algumas questões, nomeadamente:

1. Quantos sacos existem nas duas caixas?

2. Quantas laranjas existem no total?

Dadas as respostas, será solicitada a representação simbólica dos cálculos efetuados, $2 \times 4 = 8$ e $8 \times 3 = 24$, numa só expressão que indique o raciocínio efetuado, alertando-se para a necessidade do uso dos parênteses:

$$(2 \times 4) \times 3 = 8 \times 3 = 24.$$

Seguidamente o professor apresenta a expressão $2 \times (4 \times 3)$, solicitando a sua tradução em linguagem natural, no contexto do problema, levando os alunos a concluir que podem, também, resolver o problema começando por calcular quantas laranjas existem em cada caixa, $4 \times 3 = 12$, e posteriormente, determinar o número total de laranjas existentes nas duas caixas: $2 \times 12 = 24$, concluindo que há um total de 24 laranjas.

Com o intuito de generalizar a propriedade associativa da multiplicação, poder-se-á questionar os alunos:

Se o número de caixas, de sacos e de laranjas forem diferentes dos do exemplo dado, podemos utilizar os mesmos dois métodos para resolver esse problema? E se a natureza dos objetos for outra?

A resposta à primeira questão levá-los-á a concluir que independentemente do número de caixas a, do número de sacos b e do número de laranjas c, o cálculo do número total de laranjas, pode ser efetuado de duas formas diferentes:

1.ª começando pelo cálculo do número total de sacos existentes nas caixas e de seguida o número total de laranjas existentes nos sacos, simbolicamente $(a \times b) \times c$;

2.ª começando por calcular o número total de laranjas em cada caixa e de seguida o número total de laranjas existentes nas caixas, simbolicamente $a \times (b \times c)$.

As respostas às questões permitem que os alunos reconheçam a propriedade associativa da multiplicação: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, quaisquer que sejam os números representados por a, b e c.

3 Distributividade

Distributividade é uma propriedade que envolve duas operações binárias definidas num dado conjunto C.

Diz-se que a operação $*$ é distributiva, à esquerda, em relação à operação $\bullet$ se se verifica a seguinte igualdade:

$$a * (b \bullet c) = (a * b) \bullet (a * b),$$

para quaisquer a, b e c pertencentes ao conjunto C.

Diz-se que a operação $*$ é distributiva, à direita, em relação à operação $\bullet$ se se verifica a seguinte igualdade:

$$(b \bullet c) * a = (b * a) \bullet (c * a),$$

para quaisquer a, b e c pertencentes ao conjunto C.

3.1 Distributividade da multiplicação em relação à adição

No exemplo seguinte apresentamos uma problema verbal que poderá ilustrar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Colocamos uma situação em que os objetos a adicionar têm denominação diferente, pelo que há que encontrar uma denominação comum para ambos os objetos. Neste caso, sendo maçãs e laranjas, a denominação comum poderá ser peças de fruta.

Exemplo 2: Temos dois cestos cada um com três laranjas e quatro maçãs.

Quantas peças de fruta existem no total dos dois cestos?

Cesto 1

Cesto 2

À semelhança do exemplo anterior, propõe-se que se explore os dois processos possíveis para a resolução do problema, tendo em vista o reconhecimento da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

O cálculo pode ser efetuado começando por determinar o número de peças de fruta existentes em cada cesto.

Tendo-se 3 laranjas (peças de fruta) e 4 maçãs (peças de fruta) em cada cesto temos 7 peças de fruta em cada cesto.

Uma vez que existem 2 cestos e $2 \times 7 = 14$, conclui-se que existem 14 peças de fruta no total dos dois cestos.

A expressão $2 \times (3 + 4) = 2 \times 7 = 14$ é a representação simbólica que indica o processo utilizado.

Em alternativa, poder-se-á calcular, separadamente, o número total de laranjas e o número total de maçãs existentes nos dois cestos, obtendo-se,

$$2 \times 3 \text{ laranjas} = 6 \text{ laranjas e } 2 \times 4 \text{ maçãs} = 8 \text{ maçãs.}$$

Assim, há um total de

$$6 \text{ peças de fruta } + 8 \text{ peças de fruta} = 14 \text{ peças de fruta, nos dois cestos.}$$

A expressão $(2 \times 3) + (2 \times 4) = 6 + 8 = 14$ é a representação simbólica do processo utilizado.

Concluindo-se que

$$2 \times (3 + 4) = (2 \times 3) + (2 \times 4).$$

Dever-se-á realçar que se utilizou parênteses para expressar o processo utilizado, aproveitando para abordar a prioridade convencionada da multiplicação em relação à adição, pelo que a igualdade anterior poderá ser escrita

$$2 \times (3+4) = 2 \times 3 + 2 \times 4.$$

A partir deste exemplo, os alunos irão generalizar esta propriedade, assimilando que independentemente das quantidades e da natureza dos objetos, os dois processos são sempre válidos, pelo que:

$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$, quaisquer que sejam os números representados por a, b e c, sendo esta a tradução algébrica da propriedade distributiva da multiplicação, à esquerda, em relação à adição.

Nesta ocasião, poderá reforçar-se a simplicação da escrita simbólica omitindo o sinal da multiplicação, ou colocando um ponto, entre números e letras e entre letras,

$a(b+c) = ab + ac$, quaisquer que sejam os números representados por a, b e c.

Uma vez que a multiplicação é comutativa também se verifica a distributividade da multiplicação, à direita, em relação à adição:

$(b+c)a = ba + ca$, quaisquer que sejam os números representados por a, b e c.

De seguida, o professor poderá lançar aos alunos o desafio:

Sempre que temos uma expressão com parênteses a separar duas operações podemos distribuir?

Isto é, verifica-se

$$a * (b \bullet c) = (a * b) \bullet (a * b),$$

onde $*$ e $\bullet$ representam operações binárias e a, b e c representam números?

3.2 Distributividade da divisão em relação à adição

Duma discussão com os alunos, poderão surgir diferentes conjeturas:

Conjetura 1: A divisão é distributiva, à direita, em relação à adição.

Vamos averiguar se a igualdade $(b+c) \div a = b \div a + c \div a$ é válida para quaisquer números representados por a, b e c e $a \neq 0$.

Exemplo 3: Distribuimos, igualmente, 60 laranjas e 12 maçãs por 6 meninos. Com quantas peças de fruta ficou cada menino?

Propõe-se que se explore os dois processos possíveis para a resolução do problema, tendo em vista testar a primeira conjetura.

Uma das formas, pode ser começar por calcular o número total de peças de fruta e, seguidamente, distribuí-las pelos 6 meninos, concluindo-se que cada menino ficou com 12 peças de fruta, simbolicamente:

$$(60 + 12) \div 6 = 72 \div 6 = 12.$$

Em alternativa, pode-se distribuir as laranjas pelos 6 meninos, distribuir as maçãs pelos 6 meninos e , finalmente, calcular o total de peças de frutas com que cada menino ficou, simbolicamente:

$$(60 \div 6) + (12 \div 6) = 10 + 2 = 12.$$

Concluindo-se que

$$(60 + 12) \div 6 = (60 \div 6) + (12 \div 6).$$

Dever-se-á realçar que se utilizou parênteses para expressar o processo utilizado, aproveitando para abordar a prioridade convencionada da divisão em relação à adição, pelo que a igualdade anterior poderá ser escrita

$$(60 + 12) \div 6 = 60 \div 6 + 12 \div 6.$$

A partir do exemplo, procurar-se-á que os alunos generalizem esta propriedade, assimilando que independentemente das quantidades e da natureza dos objetos, os dois processos são sempre válidos, pelo que:

$(b + c) \div a = b \div a + c \div a$, para quaisquer números representados por a, b c, com $a \neq 0$, expressão esta que traduz algebricamente a propriedade distributiva da divisão, à direita, em relação à adição.

Assim, a conjetura 1 é válida.

Conjetura 2: A divisão é distributiva, à esquerda, em relação à adição.

Vamos averiguar se a igualdade $a \div (b+c) = a \div b + a \div c$ é válida para quaisquer números representados por a, b e c, desde que $b + c \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

Relativamente à segunda conjetura, pode-se apresentar o seguinte exemplo:

Exemplo 4: Temos 12 laranjas para distribuir, igualmente, por 4 meninos e 2 meninas. Com quantas laranjas ficou cada criança?

Para a sua resolução, naturalmente, os alunos irão calcular o número total de crianças e, posteriormente, distribuir as 12 laranjas pelas 6 crianças. A tradução em linguagem simbólica do raciocinio utilizado é:

$$12 \div (4 + 2) = 12 \div 6 = 2.$$

Nesta altura, o professor poderá questionar se é válido aplicar a propriedade distributiva, isto é:

$$12 \div (4 + 2) = (12 \div 4) + (12 \div 2) \ ?$$

Efetuando-se os cálculos, obtém-se $2 \neq 9$, concluindo-se que

$$12 \div (4 + 2) \neq 12 \div 4 + 12 \div 2.$$

O professor deverá, então, promover uma pequena discussão levando os alunos a concluir que um único contraexemplo é suficiente para refutar uma afirmação geral e consequentemente que a conjetura 2 é falsa.

Este facto pode ser reforçado solicitando aos alunos que indiquem, no exemplo concreto, o significado da expressão, $(12 \div 4) + (12 \div 2)$ levando-os a concluir que, no contexto do problema, seria distribuir as 12 laranjas pelos 4 meninos e de seguida distribuir *novamente as mesmas* 12 laranjas pelas 2 meninas, o que não faz sentido.

3.3 Distributividade da adição em relação à multiplicação

Conjetura 3: A adição é distributiva, à esquerda, em relação à multiplicação.

Vamos averiguar se a igualdade $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$ é válida para quaisquer números representados por a, b e c.

Se, por exemplo, considerarmos $a = 0,3$ e $b = 0,5$ e $c = 0,2$, obtemos o mesmo valor em ambos os membros:

$$0,3 + (0,5 \times 0,2) = 0,3 + 0,1 = 0,4$$

$$(0,3 + 0,5) \times (0,3 + 0,2) = 0,8 \times 0,5 = 0,4$$

Questão: Podemos afirmar que a adição é distributiva, à esquerda, em relação à multiplicação?

Promovida uma discussão à volta dos comentários dos alunos, o professor poderá solicitar outros exemplos, surgindo, naturalmente, um exemplo que irá refutar a conjetura.

Por exemplo, considerando $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$ pretendemos averiguar se $2 + (3 \times 4) = (2 + 3) \times (2 + 4)$.

Do primeiro membro da igualdade temos $2 + (3 \times 4) = 2 + 12 = 14$.

Quanto ao segundo membro $(2 + 3) \times (2 + 4) = 5 \times 6 = 30$.

Estes resultados permitem reforçar que, o facto de uma propriedade se verificar para determinados casos particulares não é suficiente para a sua generalização, enquanto que, um exemplo que não a verifique (contraexemplo) é suficiente para afirmar que a propriedade não é válida. Consequentemente a conjetura 3 é refutada.

Uma questão que poderá surgir é: Para que valores de a, b e c se verifica $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$?

A partir de vários exemplos, dados pelo professor, poderá surgir uma nova conjetura:

Conjetura 4: $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$ sempre que $a + b + c = 1$ ou $a = 0$.

Como se refere em [1], as conjeturas formuladas mas não demonstradas têm um interesse limitado, devendo os alunos ser alertados para o facto de que a partir de casos particulares, mesmo que muito numerosos, não devem ficar convencidos da veracidade de uma afirmação matemática, sendo sempre necessária uma demonstração. Dependendo do nível de ensino, é possível os alunos demonstrarem a veracidade da conjetura anterior.

Uma outra questão a colocar é: E se na conjetura 3 retirarmos os parênteses e atendermos às prioridades das operações, esta conjetura será válida? Isto é

Conjetura 5: $a + b \times c = a + b \times a + c$,, para quaisquer números representados por a, b e c.

Se considerarmos $a = 2$ e $b = 1,5$ e $c = 6$, otemos o mesmo valor em ambos os membros:

$$2 + 1,5 \times 6 = 2 + 9 = 11$$

$$2 + 1,5 \times 2 + 6 = 2 + 3 + 6 = 11$$

Questão: Perante este resultado podemos considerar válida a conjetura?

De seguida, o professor poderá solicitar outros exemplos, surgindo, naturalmente, um que irá refutar a conjetura, concluindo-se que a conjetura 5 é falsa.

Uma questão que poderá surgir é: Para que valores de a, b e c se verifica $a + b \times c = a + b \times a + c$?

Neste caso a resposta não é tão evidente a partir de vários exemplos, mesmo quando dados pelo professor.

Recorrendo ao cálculo algébrico, obtém-se a propriedade

$$a + b \times c = a + b \times a + c \text{ sempre que } b = \tfrac{c}{c-a},\ c \neq a,$$

que poderá ser demonstrada, pelos alunos, dependendo do seu nível de ensino.

Referências

[1] Garrão, A.P., Dias, M. R. "Um Problema de Matemática (em vários níveis de ensino", in *Investigar em Educação Matemática: Diálogos e Conjunções numa Perspetiva Interdisciplinar*, Letras Lavadas, 2015.

[2] Ponte, J. P., Branco, N., Matos, A. *Álgebra no Ensino Básico*, Ministério da Educação, 2009.

[3] MEC. Programa de Matemática para o Ensino Básico, Lisboa; Ministério da Educação e Ciência, 2013