Jornal das Primeiras Matemáticas

Número 10
Setembro 2018

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR

Ludus

Vária

Áreas e Perímetros no 1.º Ciclo do Ensino Básico

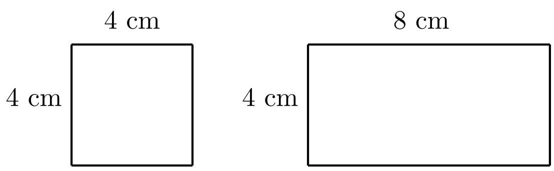
Alda Carvalho, Carlos Santos, Ricardo Teixeira
ISEL & CEMAPRE, CEAFEL, NICA-UAc
acarvalho@adm.isel.pt,cmfsantos@fc.ul.pt,ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *A aprendizagem de conceitos fundamentais relativos a áreas e perímetros no 1.º Ciclo do Ensino Básico pede uma didática cuidada. O tópico tem alguma sofisticação, nomeadamente quando se pensa na relação entre áreas e perímetros de figuras planas, relação essa que não é, de forma alguma, direta. Uma boa didática relativa a esta temática pode incidir sobre recortes, enquadramentos, composições e decomposições, entre outras dinâmicas, e a maneira como esses procedimentos afetam as áreas e os perímetros das figuras planas. Neste trabalho, apresenta-se uma análise de alguns modelos utilizados no cotado* Singapore Math.

Palavras-chave: áreas, perímetros, geometria elementar.

Introdução

Em [1], Liping Ma compara, através de entrevistas, os desempenhos de professores de matemática elementar chineses e norte-americanos. O estudo baseia-se em perguntas simples. Uma delas é a seguinte:

> Imagine que uma das suas alunas chega à aula muito entusiasmada. Ela diz-lhe que descobriu uma teoria que você nunca havia ensinado à turma. Explica ter descoberto que, à medida que o perímetro de uma figura fechada aumenta, a área também aumenta. Mostra-lhe a figura seguinte para provar o que está a dizer:
>
> 
>
>
> *Perímetro* = 16 cm — *Área* = 16 cm^2 | *Perímetro* = 24 cm — *Área* = 32 cm^2
>
> Como responderia a esta aluna?

Segundo Liping Ma, para a maioria dos professores do estudo, a "teoria da aluna era uma nova teoria de que ouviam falar pela primeira vez". Percentagens similares de professores chineses e norte-americanos aceitaram a teoria imediatamente.

No entanto, a teoria é escandalosamente falsa! Considere-se um retângulo com 1000 cm de base e 0,001 cm de altura. Este estreitíssimo retângulo tem apenas 1 cm^2 de área, embora tenha 2000,002 cm de perímetro. Na realidade, um retângulo com um perímetro arbitrariamente grande pode ter, ao mesmo tempo, uma área arbitrariamente pequena. A relação entre a área e o perímetro de uma figura plana não é tão direta como pensava a aluna do estudo de Liping Ma. A análise dessa relação tem forçosamente de ter em conta alguns fatores.

Neste artigo apresenta-se uma análise de alguns fatores determinantes, bem como de uma didática adequada para fazer com que os alunos ganhem uma "boa intuição" quanto aos mesmos. Esta análise recorre a exercícios e problemas propostos em livros escolares baseados no cotado *Singapore Math* [7]. Mais informação sobre esta temática pode ser encontrada, por exemplo, em [8].

Abordagem dinâmica respeitante à relação entre áreas e perímetros: a ideia de contribuição

A Figura 1 mostra um exercício (3.º ano de escolaridade) retirado de um dos manuais *Maths – No Problem!*[1] [5].

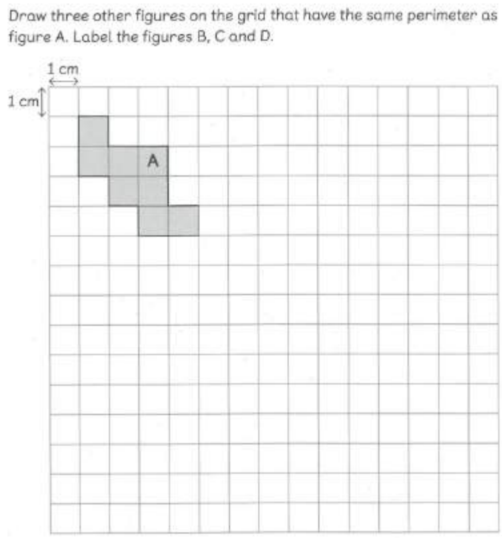


Figura 1: [5], p. 189.

[1]A coleção *Maths – No Problem!* apresenta um conjunto de manuais de Matemática, teóricos e práticos, para os primeiros anos de escolaridade, inspirados e apoiados por especialistas do *Singapore Math* e concebidos para satisfazer o *2014 English National Curriculum*, atualmente em implementação em escolas do Reino Unido [3].

Como se poderá pensar, tendo em vista evitar a estratégia de tentativa e erro? A resposta a esta questão pode ser encontrada através de uma outra questão: com que lados **contribuem** os dois quadrados em baixo para o perímetro da figura A?

A resposta é simples; o quadrado em baixo, à direita, contribui com 3 lados (Figura 2, a vermelho) e o quadrado em baixo, à esquerda, contribui com 2 lados (Figura 2, a azul).

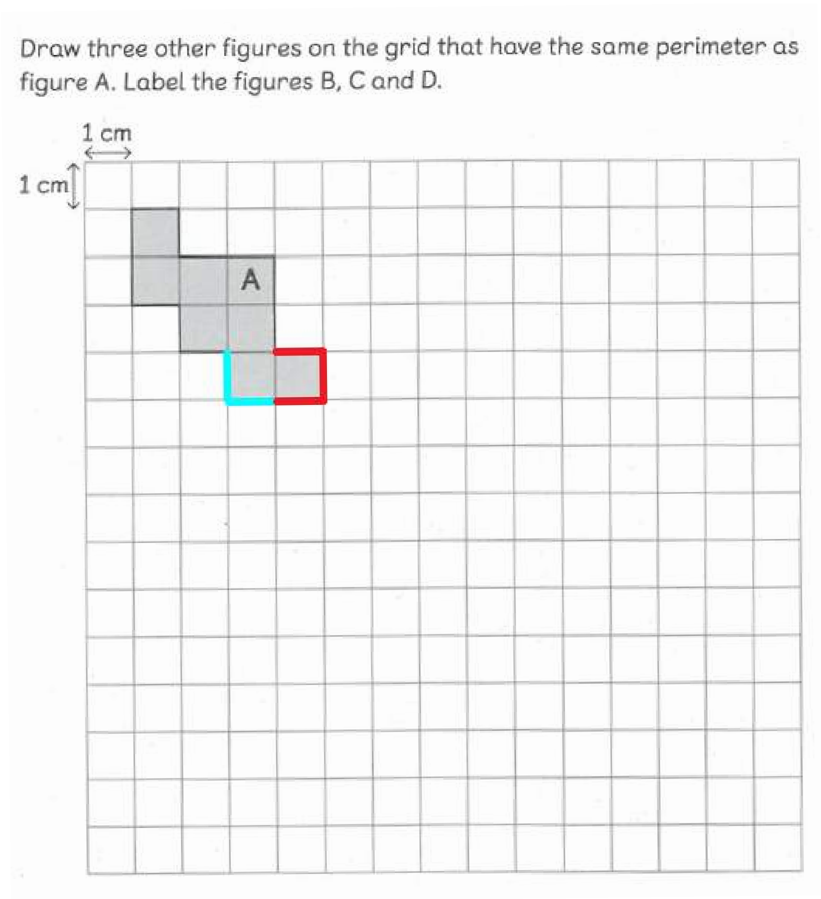


Figura 2: Ideia de contribuição: identificação de alguns quadrados chave e contagem dos lados desses quadrados que contribuem para o perímetro da figura.

Sendo assim, através de um **movimento**, é possível obter uma figura com uma forma diferente, mas mantendo o perímetro. Basta manter as contribuições.

A Figura 3, em cima, mostra uma maneira muito simples de efetuar um movimento com esse propósito. Em baixo, pode ver-se um outro exemplo, ligeiramente mais sofisticado. Com este tipo de exercícios, as crianças podem constar um facto importante:

Há muitas figuras planas com formas distintas que têm o mesmo perímetro.

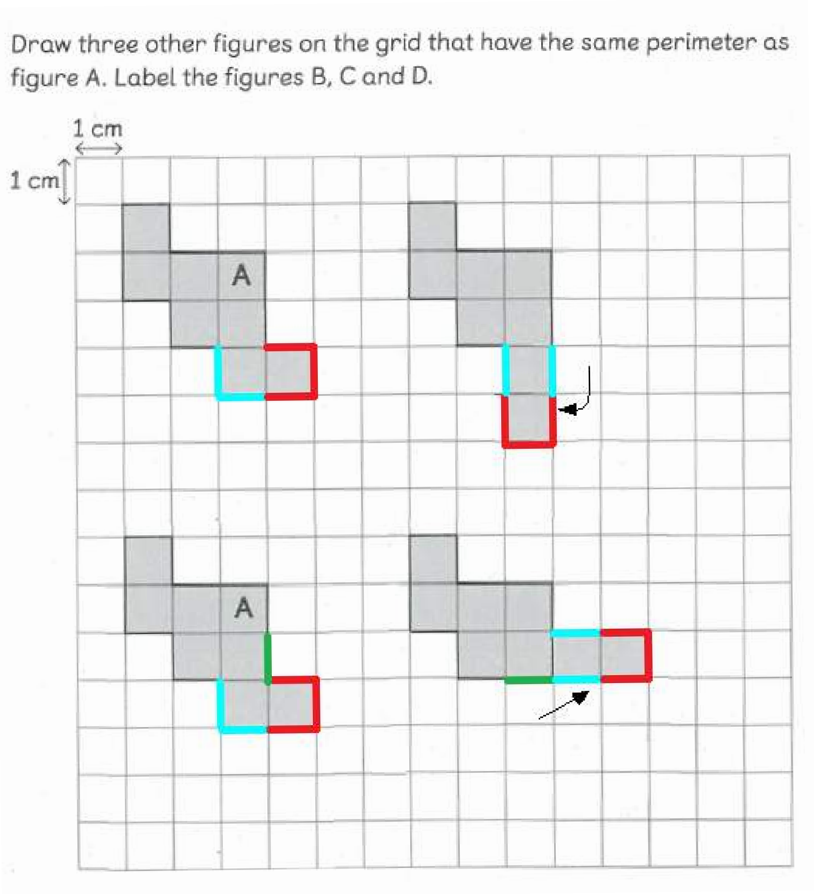


Figura 3: Dois movimentos que mantêm o valor do perímetro.

A ideia de contribuição é muito útil para analisar a "teoria" da aluna do estudo de Liping Ma. Considere-se o exercício exposto na Figura 4. Começando pela a alínea b), a Figura 5 mostra que os recortes não alteram o perímetro. Já quanto à alínea a), um dos recortes cria uma **reentrância sem ser no canto**. Nesses casos, a área decresce, mas o perímetro aumenta, tal como se ilustra na Figura 6. Antes da ocorrência da dita reentrância, a contribuição é de um lado (4 cm). Após o recorte que origina a reentrância, a contribuição passa a ser de 3 lados. Consequentemente, após os recortes, o perímetro aumenta 8 cm (o recorte superior, como já foi visto, é neutro). Antes dos recortes, a figura plana tem 44 cm de perímetro; após os recortes, a figura plana tem 52 cm de perímetro.

Ao contrário, quando se recortam **saliências sem ser dos cantos**, os perímetros diminuem. Sendo assim, quanto ao perímetro, um recorte tanto pode ser diminuidor, como neutro ou incrementador (Figura 7). Isso explica o facto de não haver relação direta entre a área e o perímetro de uma figura plana, bem como a incorreção da "teoria" da aluna do estudo de Liping Ma.

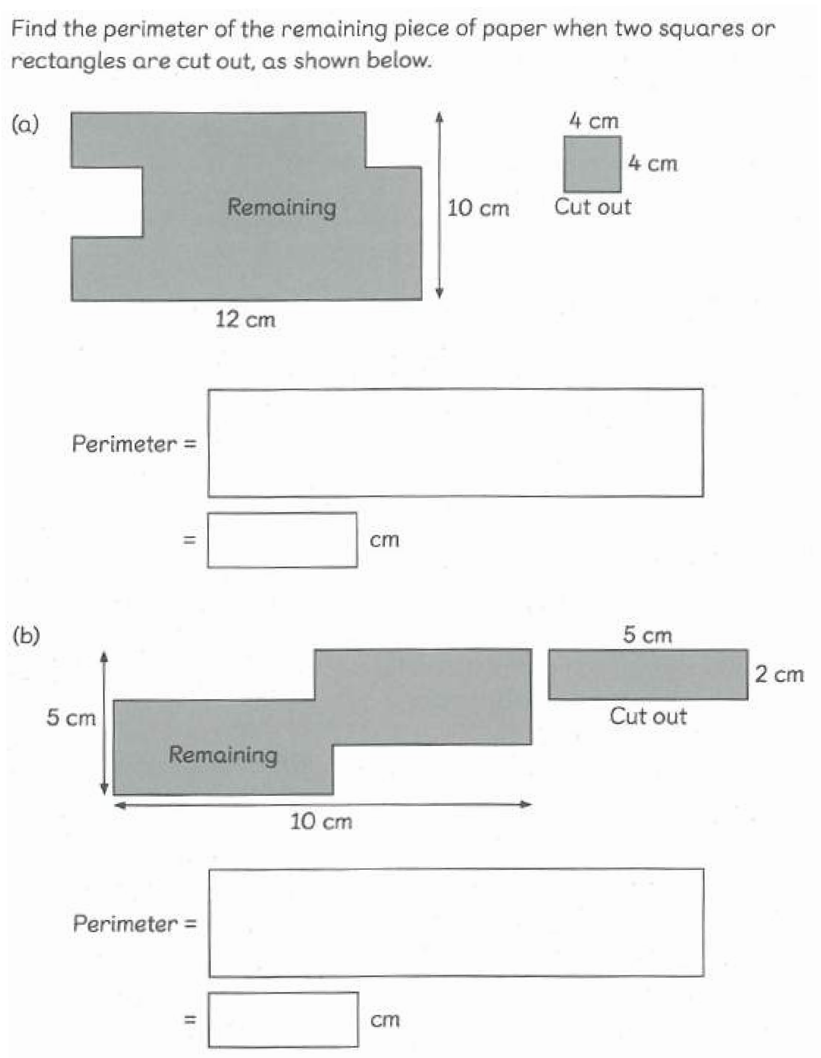


Figura 4: [5], p. 203.

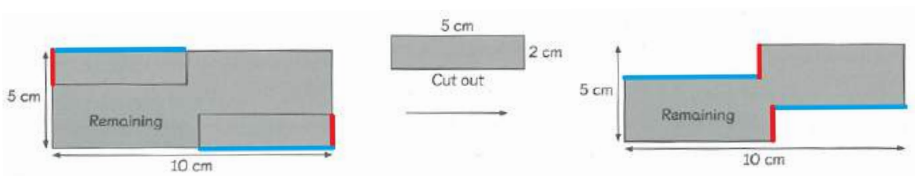


Figura 5: Recortes neutros.

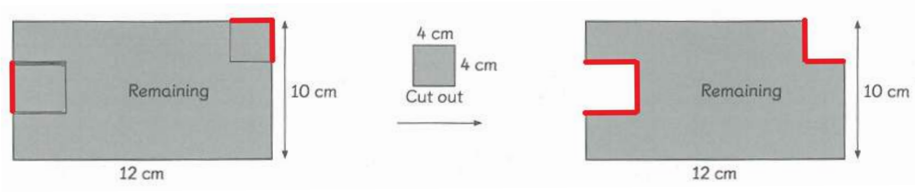


Figura 6: Recorte incrementador (recorte da esquerda).

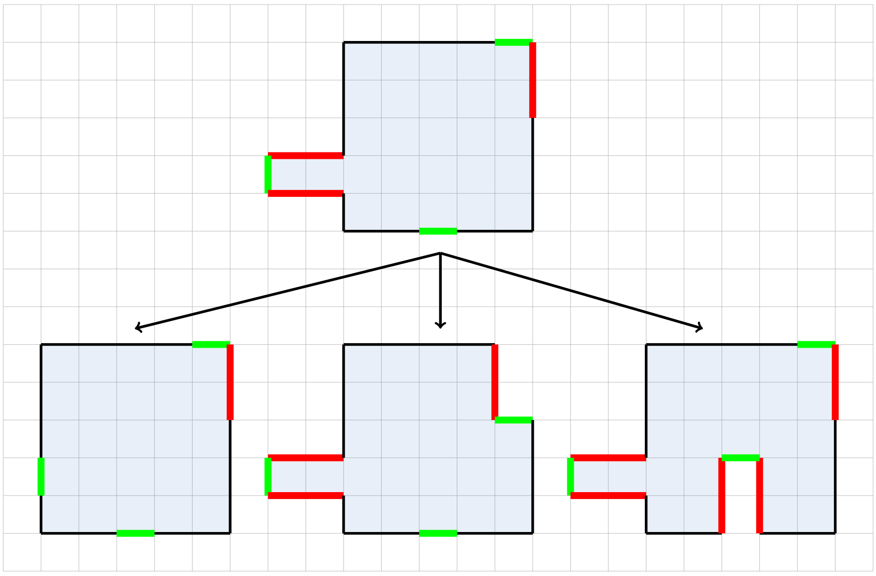


Figura 7: Em cima: figura original com 24 unidades de perímetro; Em baixo, à esquerda: figura após recorte diminuidor, com 20 unidades de perímetro; Em baixo, ao centro: figura após recorte neutro, com 24 unidades de perímetro; Em baixo, à direita: figura após recorte incrementador, com 28 unidades de perímetro.

Perímetros: a ideia de enquadramento

Considere-se o exercício exposto na Figura 8.

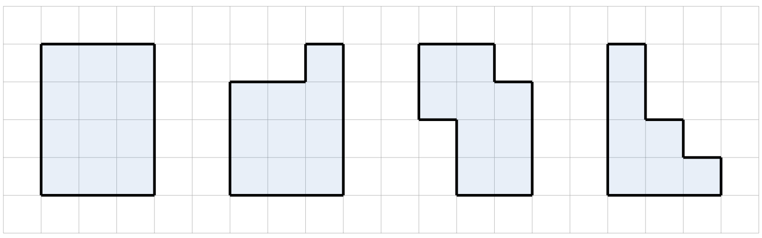


Figura 8: Qual é o perímetro de cada uma das figuras planas?

É fácil constatar que todas as quatro figuras planas têm o mesmo perímetro (14 unidades). A razão para tal pode ser entendida observando a Figura 9. A figura plana à esquerda é um retângulo 4×3 e as restantes figuras podem ser **enquadradas** por um retângulo desse tipo. Sendo assim, utilizando novamente uma abordagem dinâmica, é possível imaginar movimentos de partes dos lados desse retângulo, de forma a formar cada uma das figuras. Por esse motivo, todas as figuras têm de manter o perímetro do retângulo inicial. Outra forma de pensar consiste em usar o que já foi analisado na secção anterior. Cada uma das figuras à direita pode ser obtida através de recortes neutros efetuados no retângulo 4×3.

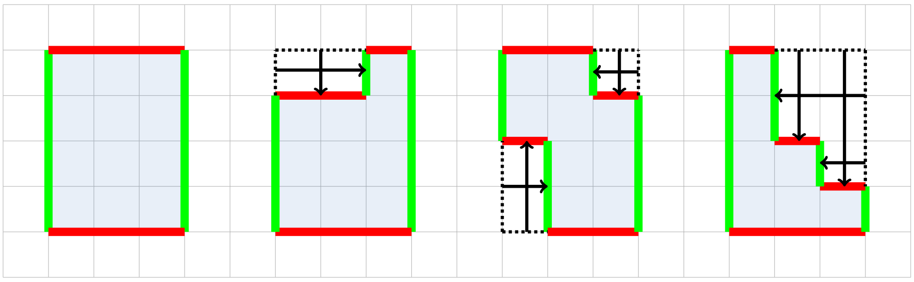
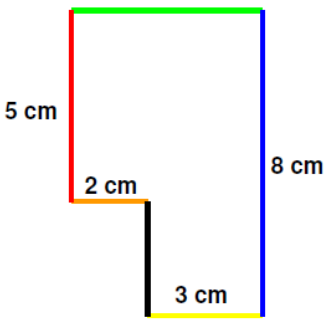


Figura 9: Ideia de enquadramento.

Considere-se outro exemplo, retirado de [2], livro escolar português, também inspirado no *Singapore Math* (Figura 10). Naturalmente, as duas primeiras alíneas incentivam um raciocínio aditivo e um raciocínio subtrativo, raciocínios típicos em exercícios deste género (lado verde: 2+3; lado preto: 8−5). A última alínea pode ser resolvida somando as medidas dos lados (3+8+5+5+2+3).



a) O comprimento do segmento verde é igual a ______ cm.

b) O comprimento do segmento preto é igual a ______ cm.

c) O perímetro do polígono é igual a ______ cm.

Figura 10: [2], p. 158.

É interessante verificar que, se o objetivo fosse apenas a determinação do perímetro da figura plana, o exercício teria informação a mais. Para melhor se entender o que se pretende dizer com isto, considere-se a Figura 11. Mais uma vez, utilizando a ideia de enquadramento, constata-se que a figura plana tem 26 cm de perímetro. Ou seja, a única informação necessária para a determinação do perímetro é uma medida horizontal e uma medida vertical. É claro que as medidas dos lados vermelho, laranja, preto e amarelo **deixam de ser determináveis**. Mas, não é por isso que o perímetro deixa de ser determinável. Este exemplo mostra o poder da ideia de enquadramento.

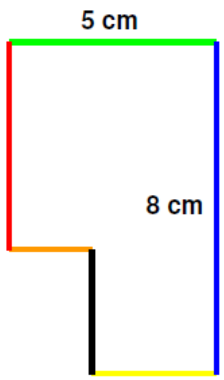


Figura 11: Qual é o perímetro da figura?

Perímetros: uma estratégia de cálculo mental

Quando se pretende determinar o perímetro de um quadrado ou de um retângulo não quadrado, é sabido que a utilização da multiplicação é um procedimento acertado. A Figura 12 mostra um exercício retirado de [5], ilustrando isso mesmo. Em relação ao quadrado (à esquerda), uma vez que os lados são todos iguais, o perímetro pode ser determinado através do cálculo 4×8. Em relação ao retângulo não quadrado (à direita), uma vez que há dois pares de lados com a mesma medida, o perímetro pode ser determinado através do cálculo $2\times(12+20)$ (ou $2\times12+2\times20$). No que a retângulos diz respeito, o processo é, portanto, bastante expedito.

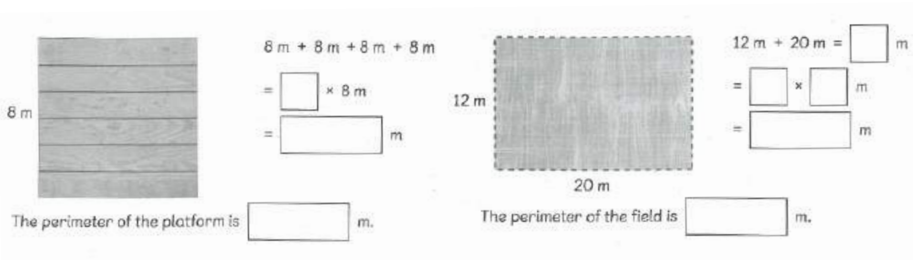


Figura 12: [5], p. 198.

A utilização da multiplicação, juntamente com as já exploradas ideias de contribuição e enquadramento, permite que a determinação de perímetros de figuras planas como a da Figura 11 se torne bastante simples. No caso dessa figura plana, basta efetuar o cálculo $4\times(5+8)$, uma vez que, como vimos, esse polígono tem o mesmo perímetro que o retângulo que o enquadra.

Explorando um pouco mais esta análise, é possível desenvolver uma estratégia de cálculo mental ainda mais sofisticada, envolvendo o ato de **completar**. Considere-se o exercício exibido na Figura 13.

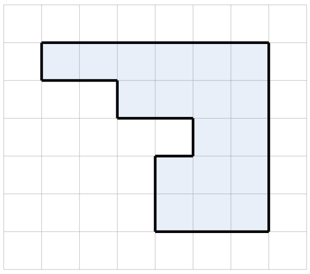


Figura 13: Qual é o perímetro da figura?

A estratégia começa por completar a figura plana, juntando um quadrado (Figura 14). O polígono resultante passa a ter o mesmo perímetro que o retângulo que o enquadra, ou seja, 22 unidades $(2\times(5+6))$. Retirando novamente o quadrado azul, obtém-se a figura plana inicial. Essa remoção acrescenta uma contribuição de 2 lados e, portanto, o perímetro pretendido é igual a 24 unidades.

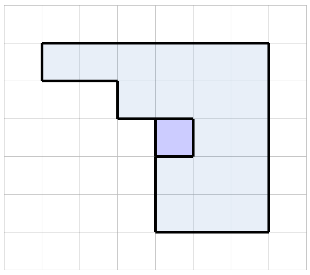
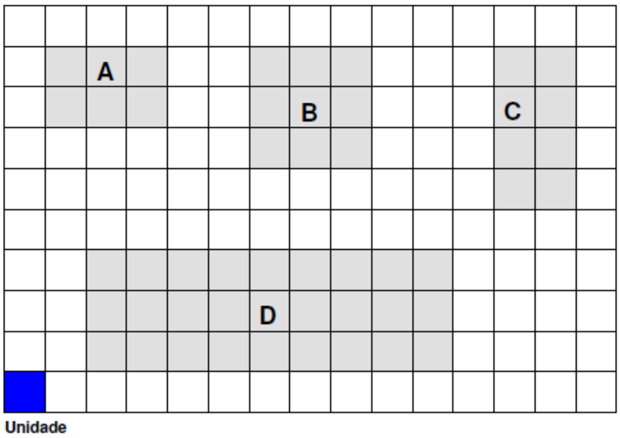


Figura 14: Completando a figura plana.

Áreas: tipificação de estratégias envolvendo composição e decomposição de figuras planas

No que diz respeito a áreas de figuras planas, um dos primeiros aspetos que se deve trabalhar com os alunos é o **raciocínio multiplicativo**. Considere-se o exercício exposto na Figura 15. Uma vez que os polígonos em causa são retângulos, as sua áreas podem ser determinadas através da multiplicação. Por exemplo, a figura A tem 2 linhas, cada uma com 3 unidades quadradas. Sendo assim, a sua área é igual a 2×3 unidades quadradas, o que resulta em 6 unidades quadradas. Estão em causa repetições, um elemento fundamental dos contextos de multiplicação no sentido aditivo. Se o papel de multiplicador tivesse sido associado ao número de colunas dir-se-ia algo como "A figura A tem 3 colunas, cada uma com 2 unidades quadradas, logo a sua área é igual a 3×2 unidades quadradas.". Este tipo de exercícios é bastante apropriado para trabalhar a propriedade comutativa da multiplicação que, nestes contextos, pode ser vista como a mudança do papel de multiplicador, umas vezes associado ao número de linhas, outras ao número de colunas.



a) ______ × ______ = ______

O retângulo A tem ______ unidades de área.

b) ______ × ______ = ______

O retângulo B tem ______ unidades de área.

c) ______ × ______ = ______

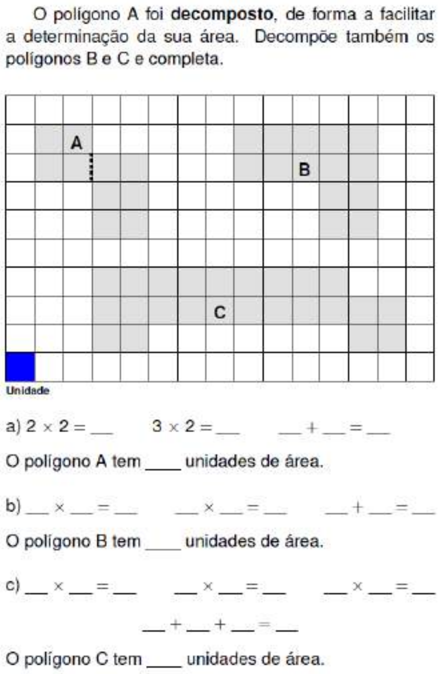
O retângulo C tem ______ unidades de área.

d) ______ × ______ = ______

O retângulo D tem ______ unidades de área.

Figura 15: [2], p. 172.

Numa segunda fase, é importante trabalhar a ideia de **decomposição**. Considere-se o exercício apresentado na Figura 16. Neste caso, o procedimento para determinar as áreas pode ser baseado em dois passos. Em primeiro lugar, os alunos podem decompor cada uma das figuras planas num certo número de retângulos. Em segundo lugar, podem utilizar o raciocínio multiplicativo para determinarem as áreas dos retângulos, calculando depois a área total de cada figura plana através de uma adição. Trata-se de dividir para conquistar: uma possível resolução pode ser observada na Figura 17.



O polígono A foi **decomposto**, de forma a facilitar a determinação da sua área. Decompõe também os polígonos B e C e completa.

a) 2 × 2 = __ 3 × 2 = __ __ + __ = __

O polígono A tem ____ unidades de área.

b) __ × __ = __ __ × __ = __ __ + __ = __

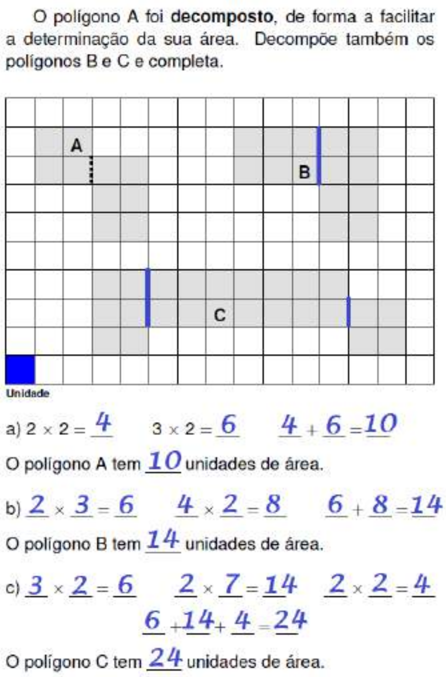
O polígono B tem ____ unidades de área.

c) __ × __ = __ __ × __ = __ __ × __ = __

__ + __ + __ = __

O polígono C tem ____ unidades de área.

Figura 16: [2], p. 173.



O polígono A foi **decomposto**, de forma a facilitar a determinação da sua área. Decompõe também os polígonos B e C e completa.

a) 2 × 2 = 4 3 × 2 = 6 4 + 6 = 10

O polígono A tem 10 unidades de área.

b) 2 × 3 = 6 4 × 2 = 8 6 + 8 = 14

O polígono B tem 14 unidades de área.

c) 3 × 2 = 6 2 × 7 = 14 2 × 2 = 4

6 + 14 + 4 = 24

O polígono C tem 24 unidades de área.

Figura 17: [2], p. 173 – uma possível resolução.

Numa terceira fase, o aluno pode trabalhar a ideia de que a área de um triângulo corresponde a **metade** da área do retângulo que o enquadra. Uma boa estratégia consiste em mostrar que se pode juntar triângulos de forma a **compor** quadrados ou retângulos não quadrados. A Figura 18 mostra um exercício com esse propósito e a Figura 19 uma possível resolução.

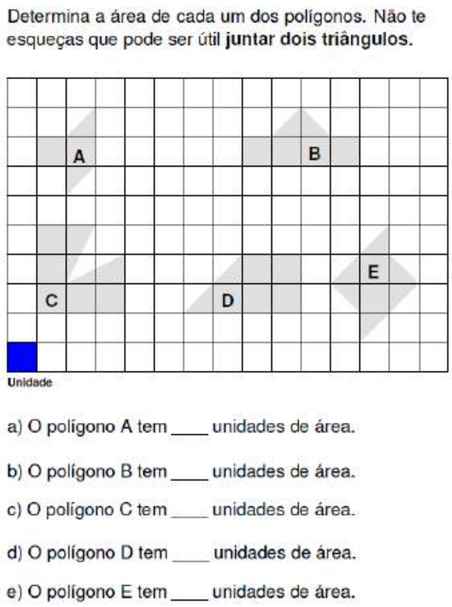


Figura 18: [2], p. 174.

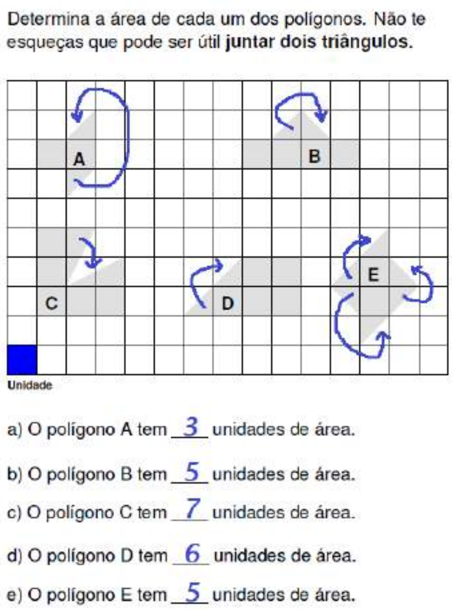


Figura 19: [2], p. 174 – uma possível resolução.

Outra boa estratégia utiliza novamente a ideia de **enquadramento**. Por exemplo, ao enquadrar um triângulo retângulo, é fácil verificar que a hipotenusa desse triângulo divide o retângulo que o enquadra em duas partes equivalentes. A Figura 20 mostra um exercício com esse propósito e a Figura 21 uma possível resolução.

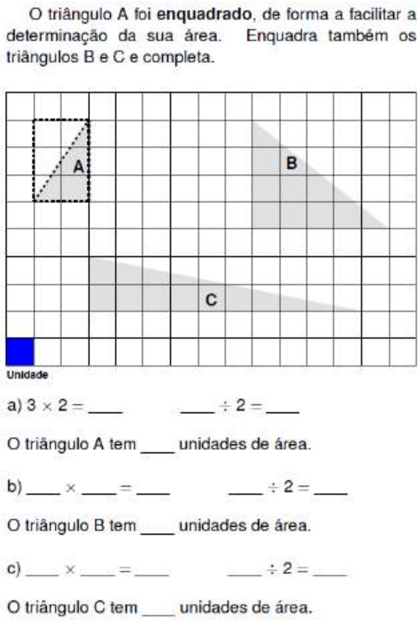


Figura 20: [2], p. 175.

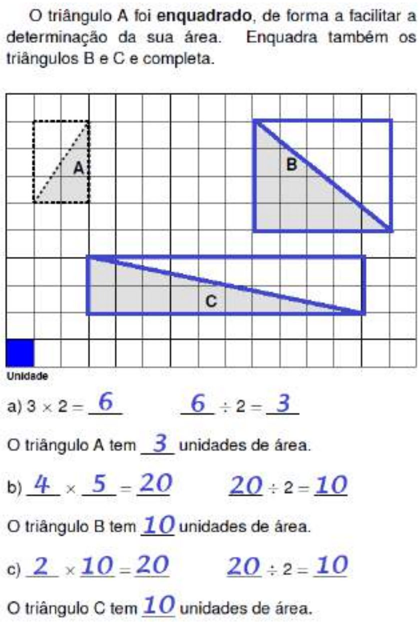
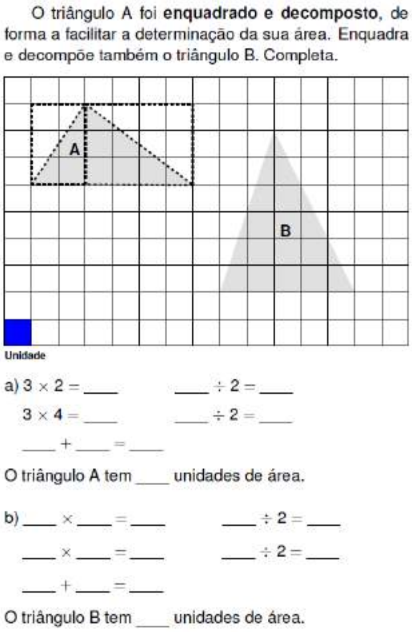


Figura 21: [2], p. 175 – uma possível resolução.

Numa quarta fase, podem trabalhar-se estratégias mais sofisticadas envolvendo **enquadramentos seguidos de decomposições**. Esse tipo de estratégias combina as ideias trabalhadas nas fases anteriores. A Figura 22 mostra um exercício com esse propósito e a Figura 23 uma possível resolução.



O triângulo A foi **enquadrado e decomposto**, de forma a facilitar a determinação da sua área. Enquadra e decompõe também o triângulo B. Completa.

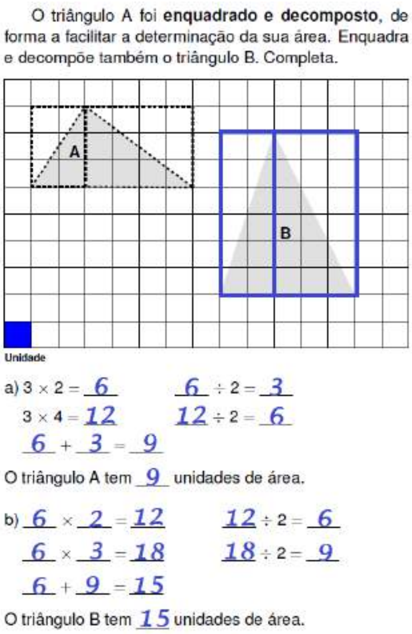
a) 3 × 2 = ___ ___ ÷ 2 = ___
3 × 4 = ___ ___ ÷ 2 = ___
___ + ___ = ___

O triângulo A tem ___ unidades de área.

b) ___ × ___ = ___ ___ ÷ 2 = ___
___ × ___ = ___ ___ ÷ 2 = ___
___ + ___ = ___

O triângulo B tem ___ unidades de área.

Figura 22: [2], p. 180.



O triângulo A foi **enquadrado e decomposto**, de forma a facilitar a determinação da sua área. Enquadra e decompõe também o triângulo B. Completa.

a) 3 × 2 = 6 6 ÷ 2 = 3
3 × 4 = 12 12 ÷ 2 = 6
6 + 3 = 9

O triângulo A tem 9 unidades de área.

b) 6 × 2 = 12 12 ÷ 2 = 6
6 × 3 = 18 18 ÷ 2 = 9
6 + 9 = 15

O triângulo B tem 15 unidades de área.

Figura 23: [2], p. 180 – uma possível resolução.

Embora possa apresentar um maior grau de complexidade para o 1.º Ciclo do Ensino Básico, há uma estratégia que pode constituir a base para uma quinta fase de trabalho (mais adequada para o 2.º Ciclo do Ensino Básico). Trata-se da estratégia de **exclusão**. Considere-se o exercício ilustrado na Figura 24.

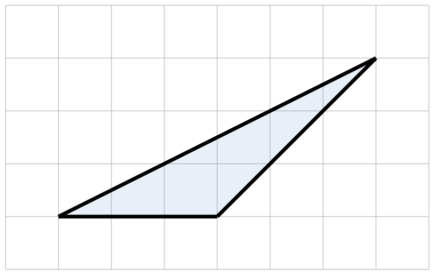


Figura 24: Qual é a área deste triângulo?

Após enquadramento, obtém-se o que se mostra na Figura 25. Infortunadamente, em relação a este caso, a utilização dos pensamentos anteriores não é tão simples.

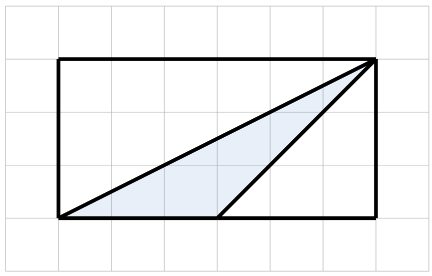


Figura 25: Enquadramento de um triângulo "difícil".

Tendo em vista atacar o problema de outra maneira, comece-se por colorir as zonas exteriores ao triângulo que estejam no interior do enquadramento (Figura 26).

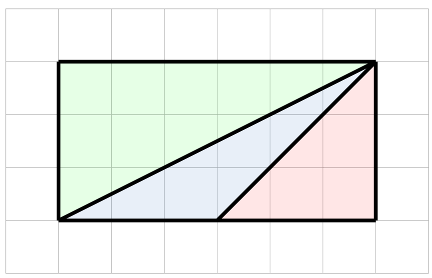


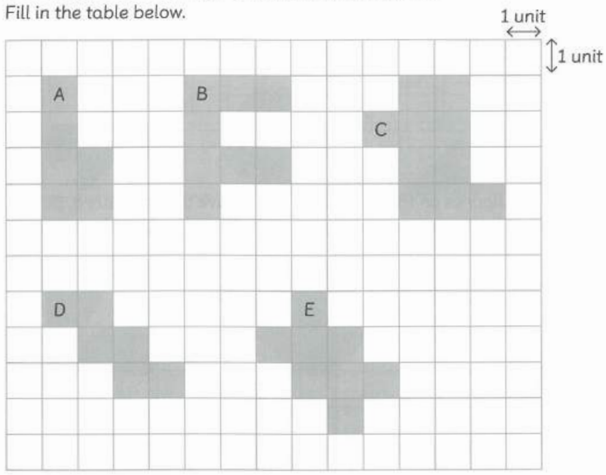
Figura 26: Coloração útil.

É fácil observar que a área pretendida pode ser obtida subtraindo à área **total** do retângulo resultante do enquadramento as áreas dos triângulos vermelho e verde, respeitantes a zonas **não pretendidas**. Com este exemplo, apercebemo-nos que há duas estratégias comuns para a determinação de áreas, a **direta** e a **indireta**. No caso da indireta, subtrai-se a uma área total a área não desejada, com o objetivo de determinar a área desejada. Esta estratégia é indicada quando a determinação das áreas total e indesejada é mais simples do que a determinação direta da área desejada. No exemplo em causa, a área do triângulo azul é igual a 18−(9+4,5) unidades de área, ou seja, 4,5 unidades de área.

Considerações adicionais sobre a relação entre áreas e perímetros de figuras planas

A Figura 27 mostra um exercício ([6], 4.º ano de escolaridade) que refuta claramente a "teoria" da aluna do estudo de Liping Ma. Uma vez que as figuras planas foram bem escolhidas, professores e alunos têm mais uma oportunidade de trabalhar o facto de a relação entre áreas e perímetros não ser direta.

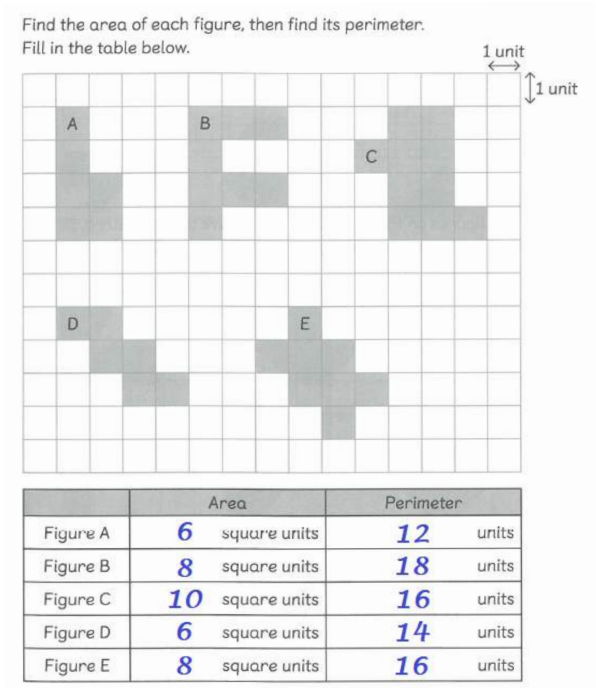
Find the area of each figure, then find its perimeter.
Fill in the table below.



	Area	Perimeter
Figure A	square units	units
Figure B	square units	units
Figure C	square units	units
Figure D	square units	units
Figure E	square units	units

Figura 27: [6], p. 107.

Na resolução (Figura 28), pode ver-se, por exemplo, que a figura C tem um perímetro inferior ao da figura B, embora tenha mais área. Ao contrário, a figura E tanto tem mais área como tem mais perímetro do que a figura A. As figuras A e D têm a mesma área, mas perímetros diferentes (bem como as figuras B e E). Já as figuras C e E têm o mesmo perímetro, mas áreas diferentes.



	Area	Perimeter
Figure A	6 square units	12 units
Figure B	8 square units	18 units
Figure C	10 square units	16 units
Figure D	6 square units	14 units
Figure E	8 square units	16 units

Figura 28: [6], p. 107.

Ainda em [6], há um exercício "filosófico" cuja resolução parcial se pode ver na Figura 29. A pergunta em baixo é muito interessante e deve ser objeto de análise. Dois casos extremos estão desenhados na grelha. O quadrado 4×4 é, dos retângulos com 16 unidades quadradas de área, aquele que tem menor perímetro. O retângulo 1×16 tem um perímetro bem maior. Por que é que isso acontece?

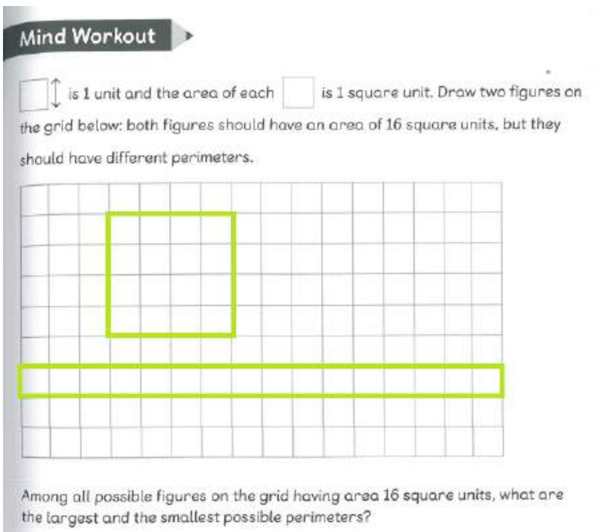


Figura 29: [6], p. 115.

É possível usar novamente a ideia de contribuição para se alcançar uma resposta interessante. Observe-se a Figura 30. Os quatro quadrados unitários que estão nos cantos do quadrado 4×4 contribuem para o perímetro com 2 lados. Há outros oito quadrados unitários que contribuem com 1 lado. E há quatro quadrados unitários no interior que não contribuem para o perímetro! Pensando no retângulo 1×16, os dois quadrados unitários das pontas contribuem com 3 lados e os restantes contribuem com 2 lados. Todos contribuem! É agora fácil perceber o fenómeno: quanto menos estreita e mais "circular" for a figura plana, maior será a "zona sem contribuição" para o perímetro.

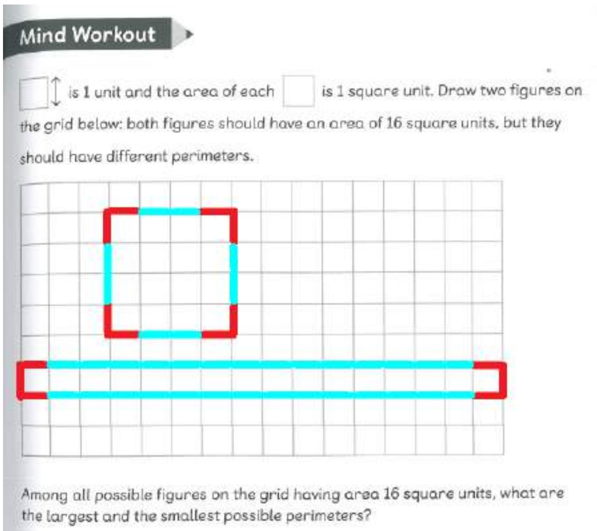


Figura 30: [6], p. 115 – contribuições para o perímetro.

É sabido que, de todas as figuras planas *isoperimétricas* (figuras com o mesmo perímetro), a que maximiza a área é o círculo. Não querendo utilizar a ideia de contribuição, há também um interessante argumento algébrico relacionado com esta temática. Considere-se um retângulo 3×7 (3 linhas de 7 quadrados). Esse retângulo tem 20 unidades de perímetro e 21 unidades de área. Supondo que se pode mudar o retângulo acrescentando uma linha ou uma coluna (mudando para 4×7 ou para 3×8), qual deve ser a opção de forma a se obter o valor mais elevado para a área? Repare-se que, quanto ao perímetro, tanto o retângulo 4×7 como o retângulo 3×8 passam a ter 22 unidades de perímetro. Mas, quanto à área, em qual deles se observa um maior acréscimo?

Deve acrescentar-se uma linha de 7 quadrados. É fácil entender essa opção: se se acrescentasse uma coluna, essa coluna teria apenas 3 quadrados unitários. Sendo assim, deve preferir-se o retângulo 4×7 e não o retângulo 3×8. Este argumento baseia-se apenas na multiplicação no sentido aditivo. Deve querer-se dois fatores próximos em grandeza (retângulo próximo do quadrado) e não dois fatores distantes em grandeza ("retângulos estreitos"). Portanto, quanto mais "circular" for a figura tendencialmente maior será a sua área.

Segundo a mitologia romana, a princesa Dido, filha de um rei fenício, tendo a vida ameaçada, fugiu para o norte da África. Prometeram-lhe a extensão de terra que pudesse cercar com o couro de um boi. Sabendo isso, com o couro, ela preparou um longo e fino fio, estendendo-o em forma de semicírculo, de modo a aproveitar a proximidade da costa. Dessa forma, obteve a maior área possível. E nasceu a cidade de Cartago. Em [9] é possível encontrar uma interessante proposta de atividade para crianças (Figura 31).


CIÊNCIA A BRINCAR   DESCOBRE A MATEMÁTICA

Dido, a Rainha de Cartago

Material: Molde 3 (pele de boi para cortar), uma folha de papel e tesoura.

Área ou perímetro?

O Rei de Tiro tinha dois filhos: a Princesa Dido e o Príncipe Pigmaleão, o mais velho, que era muito, muito mau.

Quando o rei de Tiro morreu, Pigmaleão herdou todo o reino, nada ficando para Dido.

Dido já não tinha o seu pai para a proteger. Como ela sabia que o seu irmão era muito mau, decidiu fugir de navio para muito longe, na companhia dos seus amigos.

Quando o navio chegou a uma nova costa, Dido pediu aos nativos que lhe dessem alguma terra para ela e os seus amigos se poderem instalar.

Os nativos receberam todos muito bem e ofereceram a Dido as terras que coubessem dentro de uma pele de boi.

Então Dido cortou a pele do boi numa tira muito fininha, obtendo um fio muito comprido, conseguindo circundar território suficiente para construir uma cidade. A cidade ficou a chamar-se Cartago e Dido tornou-se a Rainha de Cartago.

E tu consegues meter todos os teus amigos dentro da pele de um boi?

Usa uma folha de papel e recorta-a numa tira muito fininha e muito longa.

E agora experimenta fazer a tua própria cidade!

Figura 31: Lenda de Dido [9], p. 26.

Considerações finais

No atual currículo português [4], é possível encontrar descritores que apontam para os seguintes objetivos:

- Construir numa grelha quadriculada figuras não geometricamente iguais com o mesmo perímetro.
- Reconhecer que figuras com a mesma área podem ter perímetros diferentes.
- Fixar uma unidade de comprimento e identificar a área de um quadrado de lado de medida 1 como uma "unidade quadrada".
- Medir a área de figuras decomponíveis em unidades quadradas.
- Enquadrar a área de uma figura utilizando figuras decomponíveis em unidades quadradas.

- Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, que a medida, em unidades quadradas, da área de um retângulo de lados de medidas inteiras é dada pelo produto das medidas de dois lados concorrentes.

Em anteriores programas, naturalmente, o recurso a grelhas quadriculadas também era proposto. Tal como será, certamente, em futuros programas. Mas, nunca se deve perder de vista um vasto leque de abordagens dinâmicas relacionadas com as ideias de contribuição, movimento, enquadramento e recorte, entre outros aspetos. Essas abordagens podem ser analisadas e, de alguma forma, estruturadas e organizadas. Este artigo constitui um contributo nesse sentido.

Referências

[1] Aharoni, R. *Aritmética para pais*, Gradiva, 2012.

[2] Carvalho, A., Santos, C., Pestana, I. *Viva a Matemática!*, livro prático, 3.º ano, volume 2, Princípia, 2018.

[3] Maths – No Problem!. `https://mathsnoproblem.com/`.

[4] MEC. *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico*, Lisboa: Ministério da Educação e Ciência, 2013.

[5] Oh, B. (author), Har, Y. (consultant), Hermanson, A. (UK consultant). *Maths – No Problem!*, Workbook 3B, Singapore Maths, 2014 English National Curriculum, 2015.

[6] Oh, B. (author), Har, Y. (consultant), Hermanson, A. (UK consultant). *Maths – No Problem!*, Workbook 4B, Singapore Maths, 2014 English National Curriculum, 2015.

[7] Singapore Math. `http://www.singaporemath.com/Singapore_Math_s/301.htm`.

[8] Smith, M., Silver, E., Stein, M. *Improving instruction in geometry and measurement*, Teachers College Press: New York, 2005.

[9] Simões, C. *Ciência a brincar 5: descobre a matemática!*, Bizâncio, Sociedade Portuguesa de Matemática, 2006.