Número 12
Setembro, 2019

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR

Ludus

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR
Ludus

Recursos Didáticos

O Programa GeClaMini

Associação Atractor
https://www.atractor.pt
atractor@atractor.pt

Resumo: *Neste trabalho é feita uma apresentação do* GeClaMini*, uma ferramenta útil no ensino da simetria que permite uma utilização lúdica através da realização de competições entre alunos de diferentes graus de ensino. O* GeClaMini *centra-se no estudo de simetrias de figuras planas, mais precisamente, padrões, frisos e rosáceas.*

Palavras-chave: Matemática elementar, jogos virtuais, *Atractor*, simetria, friso, padrão, rosácea.

Introdução

O programa **GeCla**, cujo nome corresponde a uma abreviatura de **Gerador e Classificador**, é uma ferramenta útil no ensino da Simetria, permitindo também uma utilização lúdica, através da realização de competições entre alunos de diferentes graus de ensino [2]. Este programa centra-se no estudo matemático de simetrias de figuras planas, mais precisamente, padrões, frisos e rosáceas.

Para alunos mais novos, por exemplo do 1.º ciclo, o Atractor [1] concebeu uma outra versão do GeCla, o **GeClaMini**, que, como o nome indica, é dirigido a crianças. No GeClaMini, tanto o aspecto gráfico como as imagens que servem de motivo e o tipo de simetria (mais simples) existente tornam esta versão adequada aos mais novos.

O GeCla pode ser importado gratuitamente de [4] e a instalação do GeClaMini é feita em simultâneo com a do GeCla. Criados pela Associação Atractor[1], o GeCla e o GeClaMini estão disponíveis para dois sistemas operativos – Windows e Mac – e uma versão para tablet (Android e IOs) está a ser ultimada, devendo ser disponibilizada ainda no decurso do presente ano lectivo.

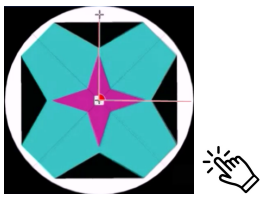
[1] A Associação Atractor é uma Associação sem fins lucrativos cujo objectivo principal é atrair o público para a Matemática. O GeCla e o GeClaMini foram realizados no Atractor no âmbito de uma Bolsa atribuída pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

Figura 1: Página de entrada do *GeClaMini*.

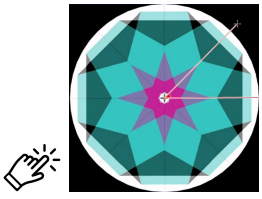
Neste artigo será feita uma descrição detalhada e ilustrada das ferramentas disponibilizadas no programa, mas ela é precedida por algumas noções sobre simetria.

1 Simetrias no plano

Por simetria de uma figura entendemos uma transformação que conserva distâncias – diz-se uma isometria – e que envia a figura exactamente sobre si própria: não deve ser possível distinguir a imagem inicial da final. Por exemplo, a imagem a seguir apresentada tem uma simetria de rotação de 90° em torno do centro:

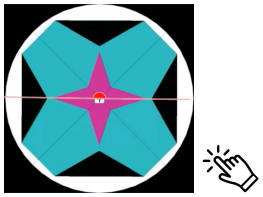


Mas não tem simetria de rotação de 45°:



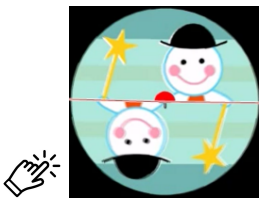
O GeClaMini contempla três tipos de simetrias: **rotação**, **reflexão** e **translação**. Será que esgotámos o rol de todas as isometrias no plano? Na realidade, há um quarto tipo de isometria – a reflexão deslizante –, contudo no GeClaMini optamos por tratar exemplos onde não seja essencial tê-las em conta. Tal "limitação" é intencional e prende-se com a necessidade de não usar exemplos demasiado complexos para crianças. Querendo explorar imagens com este tipo de simetria, deve-se utilizar o programa **GeCla**.

Regressando aos tipos de simetria em estudo, vimos anteriormente um exemplo de uma simetria de rotação. Na realidade, a dita rosácea apresenta quatro simetrias de rotação (resultantes da anteriormente exibida) e também quatro simetrias de reflexão:



E quanto a simetrias de translação? O filme seguinte mostra um exemplo de uma simetria de translação:

Algo que poderá surpreender é o facto de, na imensa variedade de padrões e frisos, só existir um número relativamente pequeno de "esquemas" de simetria (grupos de simetria): 7 para os frisos e 17 para os padrões! Contrariamente ao que sucede com os frisos e padrões, há uma infinidade de rosáceas, todas com tipos de simetria diferentes. As que têm simetrias de reflexão dizem-se diedrais e as outras cíclicas. A rosácea apresentada anteriormente é diedral e a do filme seguinte é cíclica:



1.1 Alguns detalhes

1.1.1 Sobre isometrias

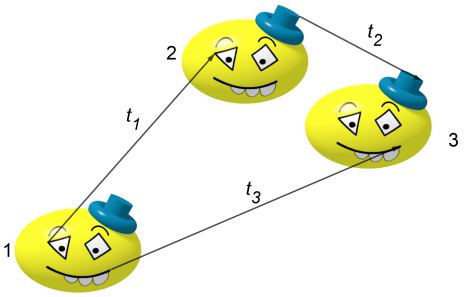


Figura 2: Composição de translações.

Na Figura 2, aplicando a translação t_1 à imagem 1, obtemos a imagem 2 e, aplicando de seguida a translação t_2, obtemos a imagem 3. Aplicar t_1 seguida de t_2 dá ainda uma translação, que representamos na figura por t_3.

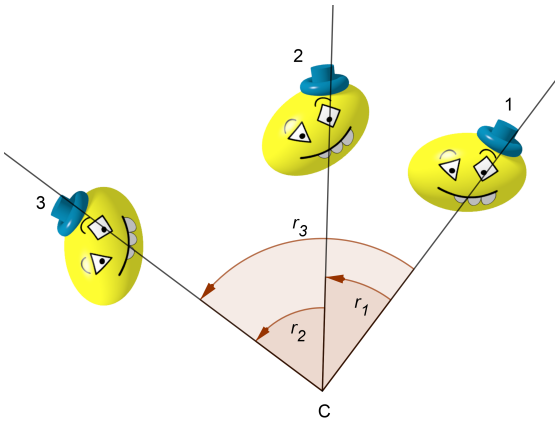


Figura 3: Composição de rotações (mesmo centro).

Da mesma forma, aplicando a rotação r_1 à imagem 1, obtemos a imagem 2 e, aplicando de seguida a rotação r_2 (que tem o mesmo centro de r_1), obtemos a imagem 3. Aplicar r_1 seguida de r_2 dá ainda uma rotação (com o mesmo centro de r_1 e r_2), que representamos por r_3 (Figura 3).

Analogamente, na Figura 4, aplicando à imagem 1, a rotação r_1 seguida da rotação r_2 (com outro centro de rotação), obtemos a imagem 3. Neste cenário, aplicar r_1 seguida de r_2 dá ainda uma rotação, designada na figura por r_3:

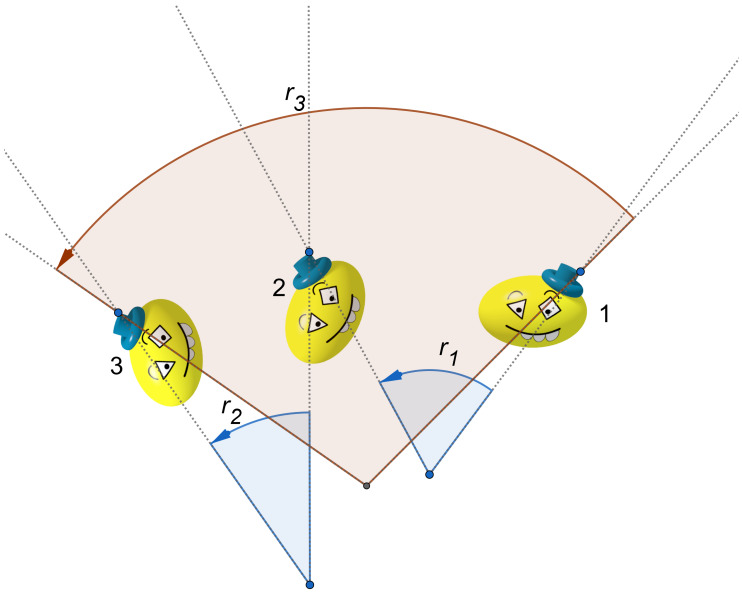


Figura 4: Composição de rotações (centros diferentes).

No entanto, ao aplicarmos uma rotação seguida de outra, nem sempre temos uma rotação! Com efeito, na Figura 5, se rodarmos 65° para a esquerda e depois 65° para a direita, no final, obtemos uma translação.

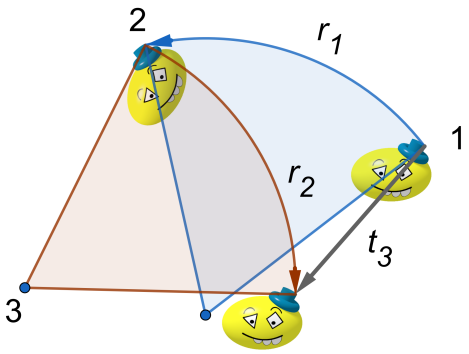


Figura 5: Translação resultante de uma composição de rotações.

E se aplicarmos uma rotação seguida de uma translação? A Figura 6 retrata um caso em que tal ocorre, obtendo-se no final uma rotação r_3.

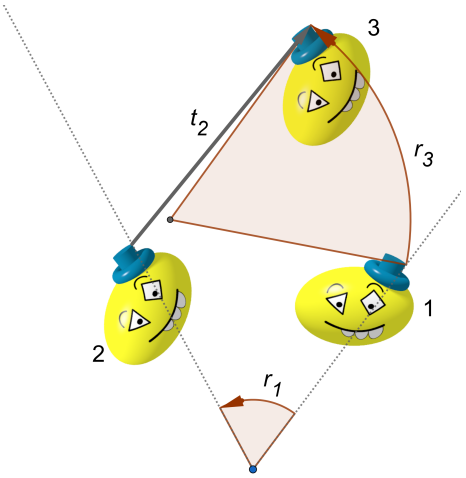


Figura 6: Rotação seguida de translação.

E o que acontece se aplicarmos uma reflexão seguida de outra? Há dois casos a considerar: **1)** ou as rectas se intersectam; ou **2)** as rectas são paralelas.

Caso 1: aplicando à imagem 1, a reflexão rf_1 seguida da reflexão rf_2, obtemos a imagem 3. Neste caso, aplicar rf_1 seguida de rf_2 é uma rotação, designada na Figura 7 por r_3**.**

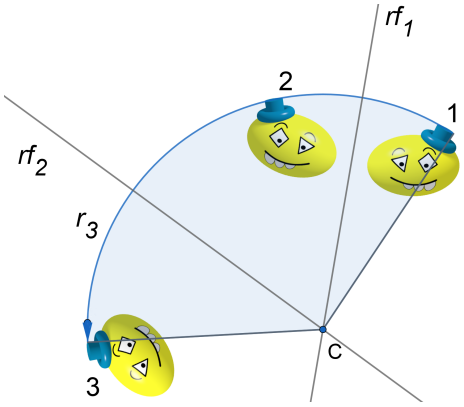


Figura 7: Composição de reflexões (eixos concorrentes).

Caso 2: aplicando à imagem 1, a reflexão rf_1 seguida da reflexão rf_2 , obtemos a imagem 3. Neste caso, aplicar rf_1 seguida de rf_2 é uma translação, designada na Figura 8 por t_3 **.**

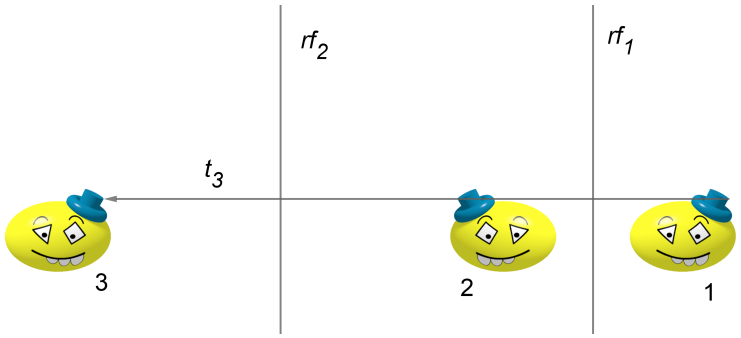


Figura 8: Composição de reflexões (eixos paralelos).

Em todos os exemplos, vimos que se aplicarmos uma isometria seguida de outra obtemos uma nova isometria. Isso não é uma surpresa porque, dadas duas isometrias i_1 e i_2 , se i_1 respeita distâncias e i_2 também, então, aplicando i_1 seguida de i_2, obtemos algo que ainda respeita distâncias.

E se aplicarmos duas translações como as ilustradas na Figura 9? Neste caso, a imagem 1 é enviada em 2 por t_1, que por sua vez é levada em 1 por t_2. E, em particular, cada ponto é enviado em si mesmo. As duas translações dizem-se então **inversas** uma da outra.

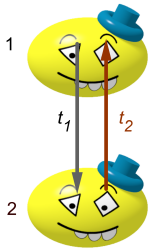


Figura 9: Translações inversas.

1.1.2 Sobre simetrias

Será que aplicando duas simetrias de uma dada imagem, uma a seguir à outra, ainda obtemos uma simetria da imagem?

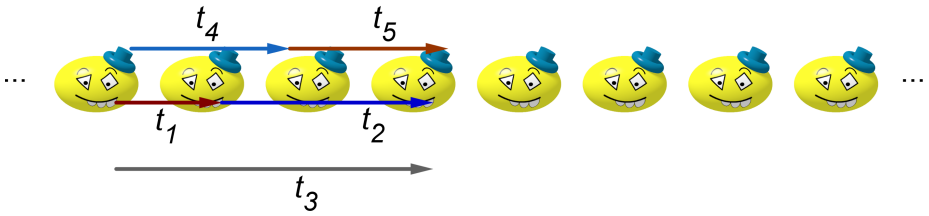


Figura 10: Quais as simetrias de translação do friso?

Na Figura 10, as translações t_1 e t_2 são simetrias do friso. Aplicando t_1 seguida de t_2, obtemos uma nova translação - t_3 -, que ainda é simetria do friso. Mas note-se que há translações t_4 e t_5 que não são simetrias do friso, embora consideradas uma a seguir à outra dêem uma simetria do friso (t_3).

Na Figura 11, analogamente, as rotações r_1 e r_2 são simetrias da rosácea (um octógono) abaixo. Aplicando r_1 seguida de r_2, obtemos uma nova simetria da rosácea: a rotação r_3. Contudo, embora as rotações r_4 e r_5 não sejam simetrias da rosácea, r_6 (a rotação que se obtém quando se considera r_4 seguida de r_5) é uma sua simetria.

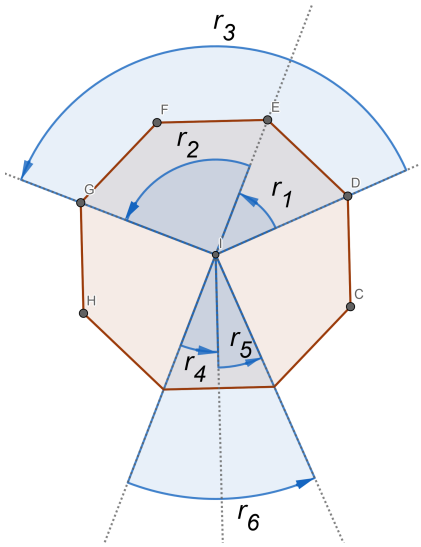


Figura 11: Quais as simetrias de rotação da rosácea?

Em todos os exemplos, vimos que se aplicarmos duas simetrias de uma mesma figura - s_1 e s_2 - uma seguida da outra, ainda obtemos uma nova simetria. Isso não é uma surpresa porque sendo s_1 e s_2 isometrias, aplicando s_1 seguida de s_2, ainda temos uma isometria. Acresce que como s_1 e s_2 conservam a mesma figura, aplicando s_1 seguida de s_2 obtemos algo que ainda conserva a mesma figura.

2 Criar simetrias (Gerador)

Uma das funcionalidades do GeClaMini é um Gerador ("Criar simetrias"), através da qual é possível gerar padrões, frisos ou rosáceas. Ao seleccionarmos esta ferramenta, deparamo-nos com a imagem exposta na Figura 12:

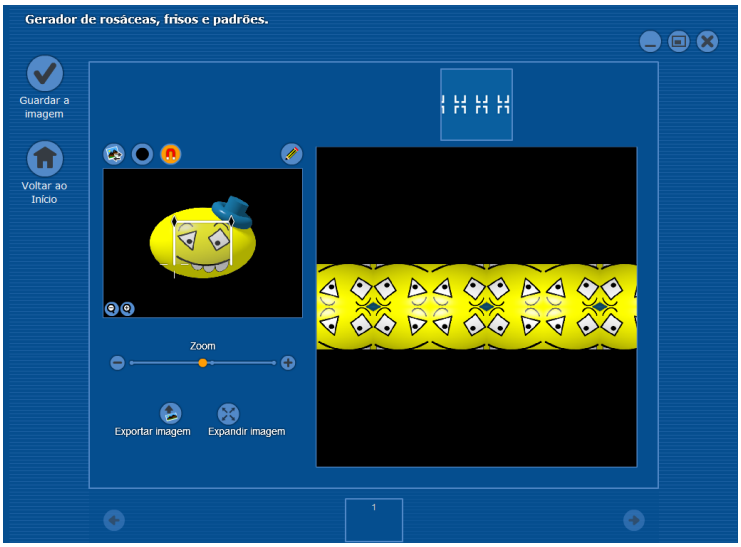


Figura 12: Gerador.

O que está representado na imagem?

Imaginemos que partimos de 3 espelhos, sendo dois deles perpendiculares a um terceiro – na Figura 13, os espelhos estão representados a branco:

Figura 13: Espelhos.

Suponhamos agora que no fundo dessa "caixa aberta de espelhos" é colocada uma imagem como a que se mostra na Figura 14:

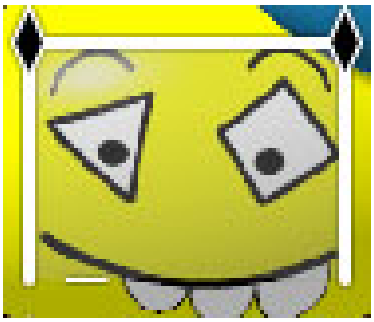
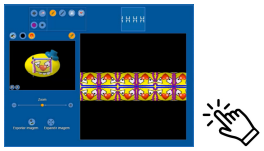


Figura 14: Fundo de uma caixa de espelhos.

Se espreitássemos a referida "caixa", visualizaríamos um friso como o exibido acima (e algo análogo se passaria com qualquer imagem escolhida para fundo da "caixa de espelhos"). Apercebemo-nos assim que a "caixa de espelhos" mencionada gera sempre um (mesmo) tipo de friso...

2.1 Ferramentas de ilustração

Na animação seguinte exploramos diferentes instrumentos de ilustração patentes no GeClaMini:



Notemos, em particular, que a opção

permite escolher as nossas próprias fotografias como motivo para as rosáceas/frisos/padrões que pretendemos gerar.

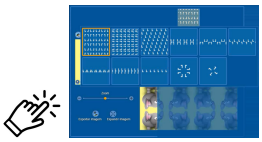
2.2 Mudando o tipo de simetria

Até ao momento, explorámos diversas ferramentas de ilustração. Contudo, nunca alterámos o tipo de simetria da imagem final, não tendo em particular obtido exemplares de rosáceas ou padrões. Como proceder para mudar o tipo de simetria?

Selecionando o botão

,

acedemos a esquemas de todos os padrões, frisos e rosáceas que se podem construir com o GeClaMini:



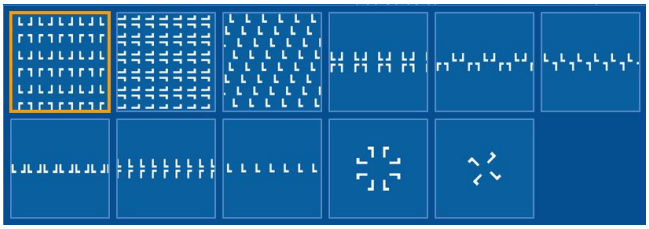


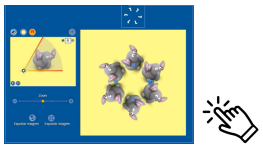
Figura 15: Mudando o tipo de simetria.

NOTA: observando o menú relativo à mudança de tipo de simetria, apercebemo-nos que o GeClaMini apenas possibilita a construção de 3 tipos diferentes de padrão e 6 tipos de friso, o que, pelo que referimos anteriormente, não esgota todas as possibilidades: no plano, existem 17 tipos de padrões e 7 tipos de frisos! Mais uma vez estamos perante uma "limitação" propositada do GeClaMini: para explorarmos um outro tipo de padrão ou o 7.º friso (em falta), é necessário recorrer ao GeCla.

Na animação anterior, e para o caso específico das rosáceas, observámos que as podemos obter clicando num de dois botões:

Contudo, ao seleccionarmos um deles, deparamo-nos com uma opção inexistente para frisos/padrões:

O número apresentado (2) corresponde ao total de simetrias de rotação existentes na rosácea a construir. Experimente mudar a opção, por exemplo escolhendo 3 ou 6:



2.3 Gravação de imagens

Uma vez obtido o friso, rosácea ou padrão desejado, o passo seguinte será gravá-lo e aqui há duas opções similares:

e

.

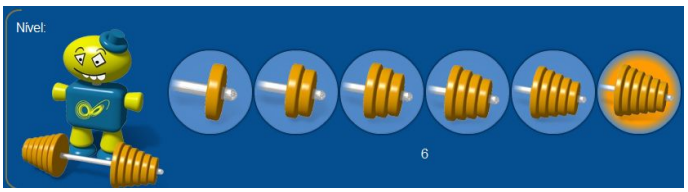
Embora parecidas, estas instruções têm finalidades distintas: a primeira é útil no caso de pretendermos gravar a imagem com uma resolução alta (até um máximo de 1920x1440) e a segunda, embora associada a uma resolução fixa (600x450), tem a particularidade de gravar no ficheiro da imagem informação completa sobre as suas simetrias. Assim, se posteriormente pretendermos classificar a imagem gerada recorrendo à ajuda incorporada no GeClaMini, devemos seleccionar a opção **Guardar a imagem**.

2.4 Opções

Seleccionando Opções no Menu Principal do GeClaMini, poderá escolher:

1. o número de imagens a gerar:

2. o nível de dificuldade das imagens:



Por exemplo, o Nível 2 conduz apenas a rosáceas.

3 Classificação de imagens com o GeClaMini

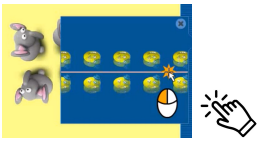
No GeClaMini, são disponibilizadas duas ferramentas para a pesquisa de simetrias: **Procurar simetrias** e **Que tipo de simetria? (Classificador)**, podendo a primeira ser usada como "modo de treino" da segunda.

Em ambas as ferramentas, somos confrontados com a necessidade de escolher imagens locais ou na internet (Figura 16):

Figura 16: Escolha das imagens.

No primeiro cenário, devemos seleccionar imagens patentes no nosso computador (o programa exibe, por defeito, a pasta usada pelo Gerador) e, no segundo, devemos introduzir um endereço html. Notemos que, caso as imagens não tenham sido gravadas com o GeCla/GeClaMini, o programa desconhece as suas simetrias, não podendo auxiliar aquando da classificação.

NOTA: em caso de dúvida sobre como assinalar no programa as diferentes simetrias, é possível recorrer a filmes explicativos patentes no GeClaMini:

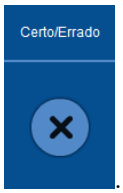


3.1 Procurar Simetrias

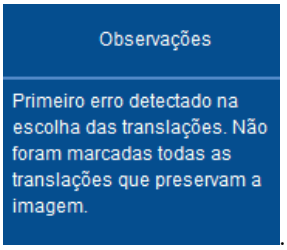
No filme que se segue, exibimos uma procura de simetrias de translação, rotação e reflexão de um dado friso. Notemos que tal pesquisa falhou nas simetrias de reflexão.

3.2 Que tipo de simetria? (classificador)

Suponhamos que queremos descobrir quais as simetrias de uma determinada imagem criada pelo GeClaMini. Podemos escolher uma de duas opções: na opção **Com ajuda**, somos avisados dos nossos eventuais erros em tempo real, e **Sem ajuda**: no final recebemos informação sobre se acertámos ou errámos:



Se errarmos, recebemos ainda um relatório relativo ao primeiro erro detectado:



3.2.1 Classificação de uma imagem - um exemplo ilustrado

Vejamos agora um exemplo ilustrado de uma classificação. Consideremos o friso da Figura 17:

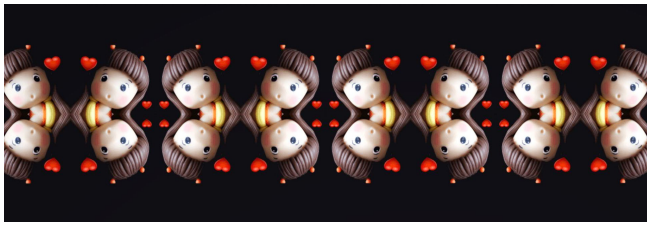


Figura 17: Friso para classificar.

Comecemos por assinalar no GeClaMini uma simetria de translação do friso, por exemplo, na Figura 18, t_1. Ao marcá-la, surge uma faixa no GeClaMini - o que representa?

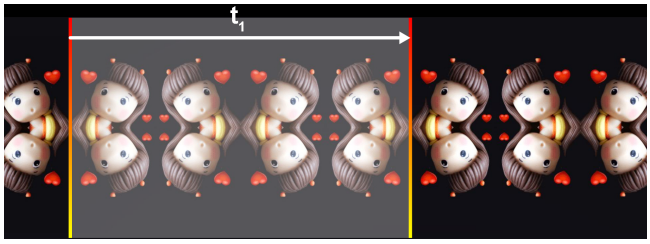


Figura 18: Uma simetria de translação.

Reparemos que se aplicarmos t_1 a essa faixa, e depois aplicarmos 2 vezes t_1, 3 vezes t_1, ..., e a seguir aplicamos também a inversa de t_1, que designaremos por t_2, e depois 2 vezes t_2, 3 vezes t_2, ..., obtemos o friso original:

Aquela região assinalada tem, pois, o suficiente para reconstruir o friso original.

Será que conseguíamos fazer o mesmo com uma faixa menor? Note-se que na faixa assinalada há algo repetido (em termos de translação).

Com efeito, essa repetição surge por haver uma simetria de translação do friso t_3, "menor" que t_1 e que não foi ainda assinalada. E ao marcar agora t_3, o programa diminui a faixa assinalada para metade (Figura 19):

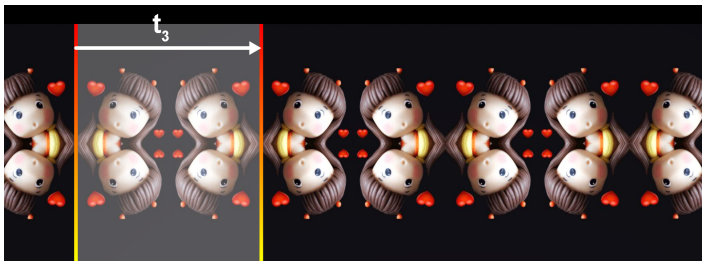


Figura 19: Translação minimal.

Para esta nova faixa, não há nada repetido para translações no seu interior: ela é **minimal** para as translações. Não havendo mais simetrias de translação a assinalar, passamos para as reflexões, começando por marcar uma reflexão horizontal (Figura 20). Notemos que a "faixa" ficou agora dividida ao meio, porque se entrar com a reflexão horizontal, basta aquela parte para reconstituir a faixa anterior.

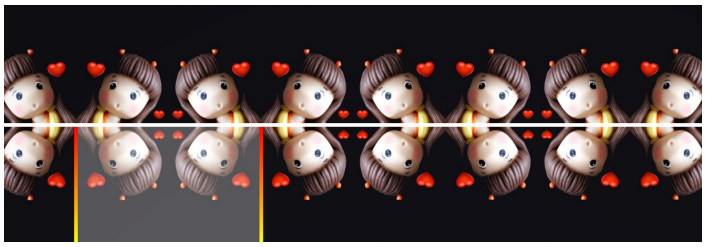


Figura 20: Reflexão horizontal.

Ao marcarmos no GeClaMini uma simetria de reflexão vertical, obtemos a imagem exposta na Figura 21:

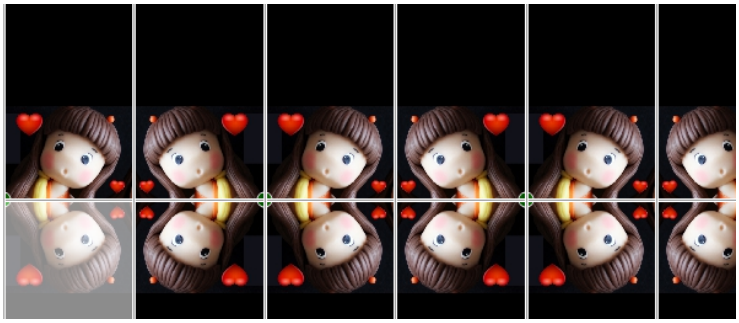


Figura 21: Reflexão vertical.

Aparentemente, falta ainda marcar as simetrias de rotação... Ao assinalarmos no GeClaMini uma simetria de rotação, somos confrontados com a seguinte mensagem: "A simetria que marcaste resulta das anteriores". Porquê?

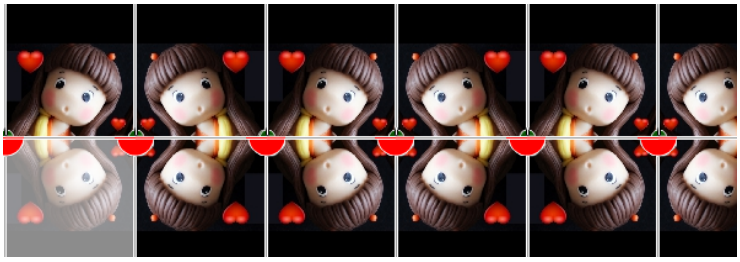


Figura 22: E quanto às simetrias de rotação?

O programa não nos está a comunicar um erro! Apenas nos informa que já conhece as simetrias de rotação, pelo que não é necessário assinalá-las... Com efeito, neste caso, o programa já conhece as simetrias de rotação porque neste caso todas elas resultam de aplicar uma simetria de reflexão seguida de outra.

Concentremo-nos agora numa pequena região marcada na Figura 22:

Aplicando a ela as duas reflexões (horizontal e vertical) que marcámos, obtemos a região de que havíamos partido antes de assinalar as reflexões (Figura 23):

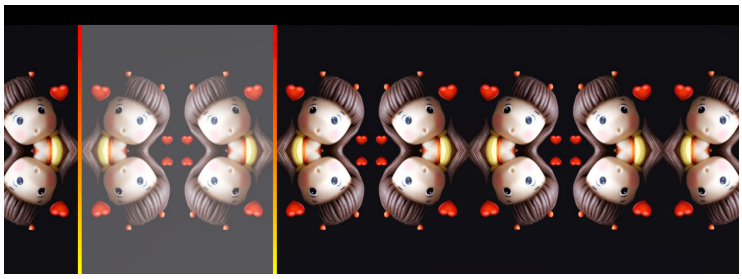
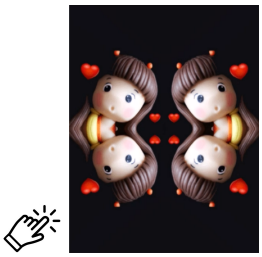


Figura 23: Região de que havíamos partido antes de assinalar as reflexões.



Por sua vez, aplicando a esta última região todas as simetrias de translação, obtemos o friso original:

Notemos que a região

tem duas particularidades:

1. aplicando a ela todas as simetrias encontradas, reconstitui-se o friso original:

2. não é possível obter o friso a partir de uma região mais pequena.

Uma tal região é designada por **região fundamental** ou **motivo** do friso.

3.2.2 Opções existentes

Observações:

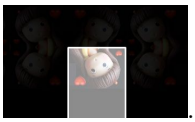
1. por uma questão técnica, no classificador, é necessário seguir uma ordem pré-definida na procura das simetrias: 1) translação, 2) reflexão, 3) rotação;
2. durante a classificação, podemos anular os nossos enganos em

.

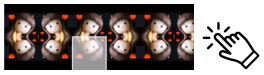
3. no final, devemos accionar o botão **Terminei!**

.

NOTA: Após concluirmos a classificação, surge uma figura pequena a destacado. No caso acima ilustrado, é a seguinte:

 .

Observemos um filme que ilustra as diferentes opções do Classificador:



Seleccionando:

1.
,

observamos a imagem "final" gerada a partir do motivo encontrado e das simetrias obtidas na classificação efectuada;

2.
,

obtemos o motivo resultante da classificação;

3.
,

visualizamos as simetrias detectadas;

4.
,

e arrastando o cursor, podemos comparar as diferenças entre as imagens "original" e "final".

Clicando no botão **Terminei!**, obtemos uma avaliação do nosso desempenho, avaliação essa que poderá ser gravada seleccionando

.

4 Competição

Conforme referido inicialmente, o GeClaMini (tal como o GeCla) tem uma vertente lúdica, ao permitir a realização de competições.

Existem dois modos de competição:

1. **usando 1 computador** – ambos os jogadores geram e classificam imagens de forma alternada num mesmo computador;

2. **usando 2 computadores** – é necessário uma pasta partilhada acessível a ambos os jogadores.

4.1 Recorrendo a 2 computadores

Quando há algum tipo de rede (que pode ser interna!) sugerimos a utilização do modo **2 computadores**. Neste cenário, é necessário a partilha prévia de uma pasta na qual ambos os jogadores tenham permissão de leitura e escrita: tal pasta pode ser local ou estar numa "Cloud" (por exemplo na Dropbox). De seguida, ilustramos uma competição com recurso a uma pasta partilhada na Dropbox, algo análogo pode ser realizado recorrendo a sistemas como Google Drive, Microsoft OneDrive, etc. **NOTA IMPORTANTE:** para funcionar, é necessário ter a Dropbox (ou Google Drive/ Microsoft OneDrive/ ...) previamente instalada nos computadores!

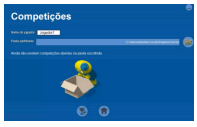
4.1.1 Início da competição

Ambos os jogadores devem:

1. entrar no modo Competição, 2 Computadores**;**

2. introduzir o seu nome;

3. escolher uma mesma pasta que haja sido previamente partilhada.



4.1.2 Criação da competição

1. um dos jogadores, aqui designado por Jogador 1, inicia a competição, clicando em

;

2. de seguida, escolhe tanto o grau de dificuldade pretendido como o número de imagens;

3. o segundo jogador aguarda a recepção (automática) de um convite para participar na competição gerada pelo Jogador 1.

4.1.3 Competição

1. cada jogador cria, no seu computador, um certo número de imagens (número esse que havia sido definido pelo Jogador 1);

2. após ambos finalizarem a geração, e de forma automática, cada jogador recebe as imagens do adversário para classificar;

3. no final da classificação, cada jogador recebe uma pontuação e um relatório referentes aos resultados obtidos.

NOTA: na pasta partilhada, são guardadas cópias das figuras geradas e da pontuação obtida. Caso um dos jogadores pretenda voltar a classificar as imagens criadas, basta abri-las no modo **Classificador**.

5 Notas finais

Uma competição de GeCla entre alunos portugueses de uma escola de Valadares e alunos italianos de uma escola de Besozzo realizou-se no passado [3, 5, 6]. O Atractor está disponível para apoiar a logística e facilitar contactos para escolas interessadas em promover competições de GeClaMini.

Está previsto o lançamento para breve de uma versão do GeCla para tablets e smartphones (sistemas Android e IOs). Se estiver interessado em ser informado deste lançamento ou de outras novidades do Atractor, subscreva a Newsletter do Atractor.

Referências

[1] Associação Atractor, criada em 30 de Abril de 1999, vocacionada para a divulgação da matemática. https://www.atractor.pt

[2] Associação Atractor. "Simetria: uso do programa GeCla como ferramenta didáctica", *Revista de Ciência Elementar*, 4, Novembro/Dezembro, 2016.

[3] Associação Atractor. "1.º Portugal - Itália em GeCla", *Revista Gazeta da Matemática*, 171, Novembro, 2013.

[4] GeCla, software realizado no Atractor, no âmbito de bolsa atribuída pela FCT. Versão 1.03 – 2019/05/03. https://www.atractor.pt/mat/GeCla

[5] Pedrini, P. "A tutto GeCla!", *Revista XlaTangente*, 41, Outubro, 2013.

[6] Simões, M. "I competição internacional GeCla! Relatos de uma experiência", *Revista Educação e Matemática*, 127, Março/Abril, 2014.