Jornal das Primeiras MATEMÁTICAS

Número 9
Dezembro 2017

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR

Ludus

O algoritmo dos doces

Hugo Pereira de Almeida
FCUL, Universidade de Lisboa
hugo79@sapo.pt

Resumo: *Este artigo apresenta uma interpretação lúdica do algoritmo de Euclides, bastante adequada para trabalhar com alunos do 5.º ano de escolaridade.*

Palavras-chave: algoritmo de Euclides.

1 Introdução

O algoritmo de Euclides, apresentado no Livro VII dos *Elementos* [1], é habitualmente visto como o primeiro algoritmo da história da Matemática. Trata-se de um método simples e extremamente eficaz para a determinação do máximo divisor comum de dois números naturais. Por utilizar apenas a divisão inteira, constitui um método adequado para trabalhar com alunos do 5.º ano de escolaridade.

O tópico aparece contemplado no *Programa e Metas para o Ensino Básico* de 2013 (PMEB, [2]), "como particularmente adaptado aos alunos do 5.º ano de escolaridade". O algoritmo insere-se no domínio de conteúdo "Números e Operações", devendo ser abordado no estudo dos "Números racionais não negativos".

Ainda segundo o PMEB de 2013, deverá ser atendida a meta NO5.3.7: "Utilizar o algoritmo de Euclides para determinar os divisores comuns de dois números naturais e, em particular, identificar o respetivo máximo divisor comum". Trata-se de uma meta incluída no conjunto NO5.3–"Conhecer e aplicar propriedades dos divisores", no âmbito do estudo dos "Números Naturais".

Para aplicar o algoritmo e determinar o máximo divisor comum de dois números naturais é necessário, primeiro, dividir o maior desses números pelo menor e, seguidamente, dividir o divisor dessa primeira divisão pelo seu resto respetivo. Isto de forma sucessiva até se encontrar um resto zero, sendo o divisor dessa "última" divisão o m.d.c. que se pretendia determinar.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \cline{2-2} 6 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 6 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

$$\text{m.d.c.}(8,30) = 2$$

Figura 1: Exemplo de execução do algoritmo de Euclides.

2 Algoritmo com bolos

Uma forma simples de entender e explicar o funcionamento do algoritmo de Euclides é... recorrendo a bolos!

Imaginemos que temos duas qualidades distintas de bolos, eventualmente em diferentes quantidades. Imaginemos também que pretendemos compor pacotes de bolos, assegurando que não sobra nenhum bolo, e que todos os pacotes têm exatamente a mesma composição. Qual é o número máximo de pacotes que podemos criar? Responder a esta questão implica determinar o máximo divisor comum entre os números de bolos de cada qualidade.

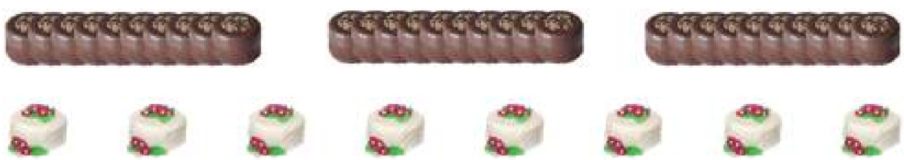

Figura 2: 30 bolos de chocolate e 8 bolos de baunilha.

Consideremos novamente o par $(8, 30)$ mas, desta vez, correspondendo a dois conjuntos de deliciosos bolos (Figura 2). Atendendo à condição enunciada de compor pacotes com igual conteúdo, qualquer pasteleiro pode verificar facilmente que não pode obter mais do que 8 pacotes de bolos. Caso contrário, fica com pacotes sem bolos de baunilha.

Colocando 1 bolo de baunilha em cada pacote e distribuindo os bolos de chocolate de forma equitativa pelos pacotes, o pasteleiro chega à situação exposta na Figura 3:

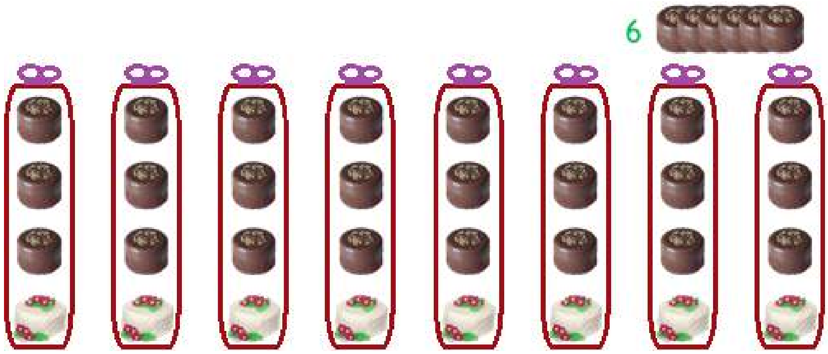

Figura 3: 8 pacotes com 3 bolos de chocolate e 1 bolo de baunilha; sobram 6 bolos de chocolate.

O que fazer com os 6 bolos de chocolate que sobram? A resposta a esta questão consiste em determinar o m.d.c.$(6, 8)$.

O que está agora em causa para o pasteleiro, habitualmente tratado por Sr. Trivial, é o facto de não poder criar mais do que 6 pacotes de bolos ou, caso contrário, não é atendida uma das duas condições iniciais e sobram bolos de chocolate. Como pode o Sr. Trivial resolver este problema?

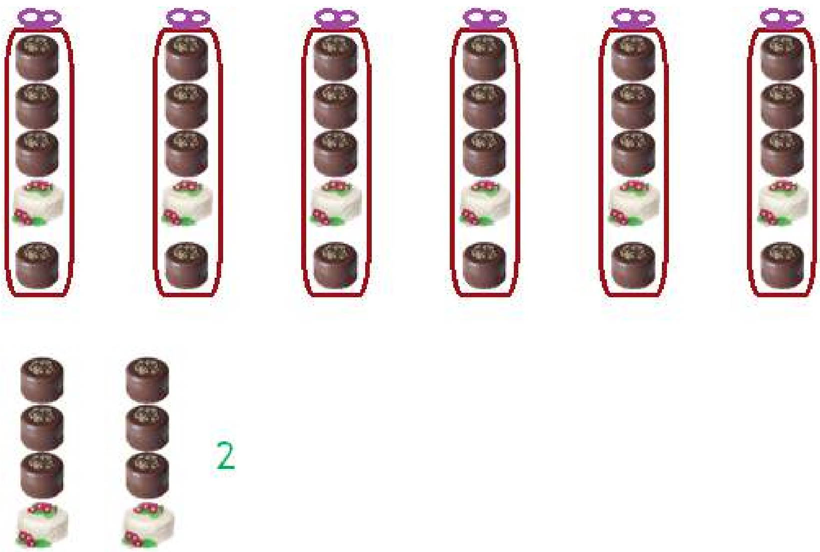

Figura 4: 6 pacotes com 4 bolos de chocolate e 1 bolo de baunilha; sobram 2 conjuntos com 3 bolos de chocolate e 1 bolo de baunilha.

O Sr. Trivial compõe 6 pacotes de bolos. Coloca 1 bolo de chocolate das sobras que obteve na sua primeira tentativa em cada um dos pacotes. Depois, distribui por esses pacotes os conjuntos de 4 bolos (1 de baunilha e 3 de chocolate) criados anteriormente (Figura 4).

Porém, um novo problema emerge. O que fazer com os dois conjuntos de 4 bolos que sobram? Responder a esta questão é determinar o m.d.c.$(2, 6)$. O Sr. Trivial conclui que não pode compor mais do que dois pacotes de bolos, caso contrário sobram bolos.

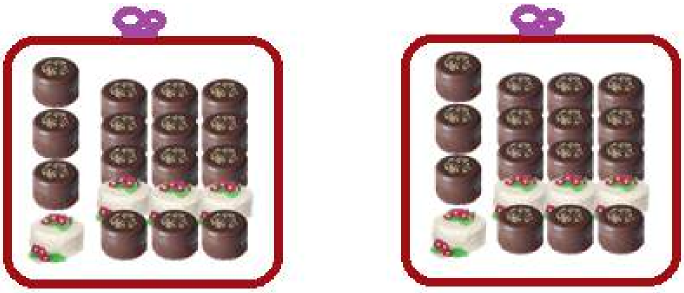

Figura 5: 2 pacotes com 15 bolos de chocolate e 4 bolos de baunilha.

O Sr. Trivial coloca em cada pacote um dos dois conjuntos de 4 bolos que restaram na segunda tentativa e distribui pelos dois pacotes os seis conjuntos de 5 bolos criados anteriormente. A Figura 5 mostra a situação a que chega.

Conclui então o Sr. Trivial que não pode compor mais do que 2 pacotes de bolos. Portanto, m.d.c.$(8, 30) = 2$. Cada um dos 2 pacotes fica com 4 bolos de baunilha e 15 bolos de chocolate.

Suponhamos agora que o Sr. Trivial dispõe de 9 bolos de chocolate e de 14 bolos de baunilha (9 e 14 são primos entre si). Quantos pacotes de bolos pode formar sem que lhe sobrem bolos e garantindo que os pacotes ficam com a mesma composição?

Numa primeira fase, não é possível formar mais do que 9 pacotes de bolos, cada um com 1 bolo de chocolote e 1 bolo de baunilha. Sobram 5 bolos de baunilha (Figura 6).

Depois, não é possível formar mais do que 5 pacotes. Cada um desses pacotes recebe 1 conjunto de 2 bolos anteriormente formados (Figura 7).

Ao formar 5 pacotes para incluir os 5 bolos de baunilha que sobraram numa primeira fase, sobram 4 conjuntos de 2 bolos. Consequentemente, no máximo, já só se pode compor 4 pacotes.

Figura 6: 9 pacotes com 1 bolo de chocolate e 1 bolo de baunilha; sobram 5 bolos de baunilha.

Figura 7: 5 pacotes com 1 bolo de chocolate e 2 bolos de baunilha; sobram 4 conjuntos com 1 bolo de chocolate e 1 bolo de baunilha.

Prosseguindo da mesma forma, depois de se formar quatro pacotes com 2 bolos de chocolate e 3 bolos de baunilha, sobra um conjunto de 3 bolos (Figura 8). Logo. não é possível formar mais de um pacote de bolos.

Figura 8: 4 pacotes com 2 bolos de chocolate e 3 bolos de baunilha; sobra 1 conjunto com 1 bolo de chocolate e 2 bolos de baunilha.

Tudo isto era expectável, uma vez que 9 e 14 são primos entre si.

Figura 9: Números primos entre si originam sempre um único pacote.

3 Mais do que duas qualidades de bolos

E se o Sr. Trivial tiver três qualidades de bolos? Haverá forma de constituir pacotes com a mesma composição? Como?

Suponhamos que o Sr. Trivial anda agora às voltas com 35 bolos de laranja, 20 bolos de baunilha e 15 bolos de chocolate. Quantos pacotes com igual composição consegue fazer? Não mais do que quinze, caso contrário terá pacotes sem bolos de chocolate. A Figura 10 ilustra a situação a que chega o nosso diligente pasteleiro após uma primeira tentativa.

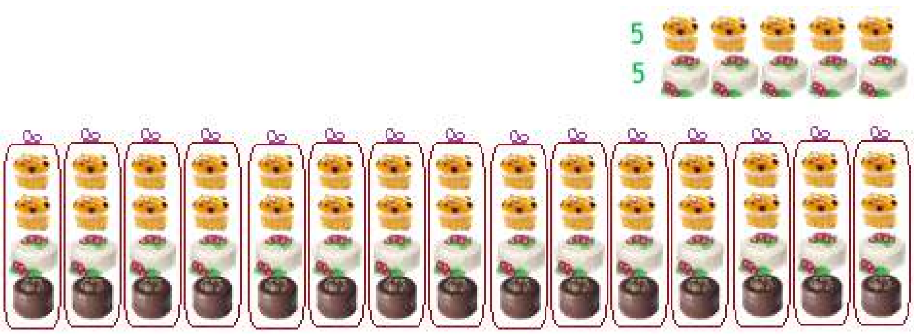

Figura 10: 15 pacotes com 1 bolo de chocolate, 1 de baunilha e 2 de laranja; sobram 5 bolos de laranja e 5 bolos de baunilha.

Quinze pacotes de bolos criou já o mestre pasteleiro Sr. Trivial. Porém, tem de lidar outra vez com o problema das sobras. Por causa destas, na segunda tentativa, não pode compor mais do que 5 pacotes. E como os consegue fazer, tem-se que m.d.c.$(35, 20, 15) = 5$, e essa é a solução (Figura 11).

Figura 11: 5 pacotes com 3 bolos de chocolate, 4 bolos de baunilha e 7 bolos de laranja.

Com o seu espirito inventivo e inquiridor, o Mestre Trivial quer perceber o que acontece se, ao compor pacotes, lhe sobrarem quantidades diferentes de bolos. Para isso, experimenta com o triplo $(8, 14, 19)$.

Nesta fase, já é trivial para o Mestre homónimo que não pode compor mais do que oito pacotes de bolos. No entanto, tem agora de resolver o problema das sobras.

Figura 12: 8 pacotes com 1 bolo de chocolate, 1 bolo de baunilha e 2 bolos de laranja; sobram 3 bolos de laranja e 6 bolos de baunilha.

Fazendo conjuntos de igual composição com as sobras, tem-se a situação da Figura 13. O Mestre não pode compor mais do que três pacotes.

Figura 13: Arrumação das sobras.

Por cada um dos grupos criados com as sobras, o Mestre distribui os oito conjuntos de 4 bolos obtidos inicialmente, chegando à situação exposta na Figura 14.

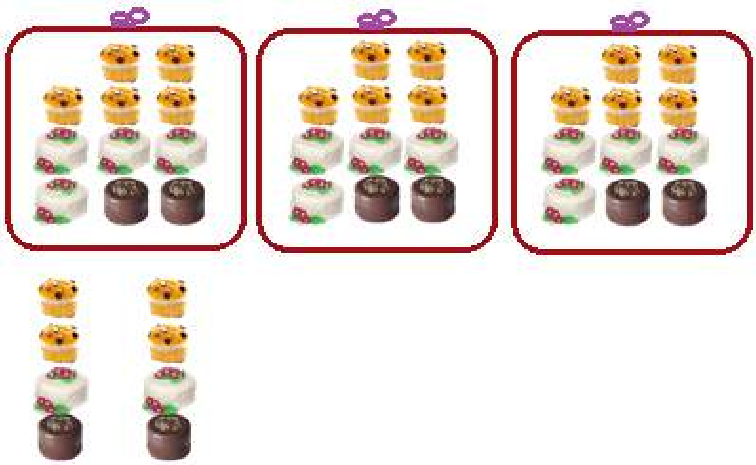

Figura 14: 3 pacotes com 2 bolos de chocolate, 4 bolos de baunilha e 5 bolos de laranja; sobram 2 conjuntos com 1 bolo de chocolate, 1 bolo de baunilha e 2 bolos de laranja.

E, mais uma vez, o problema consiste em determinar o que fazer com os dois conjuntos restantes. Certamente, não serão criados mais do que dois pacotes. Mas como? Veja-se na Figura 15 a composição dos dois pacotes criados pelo Mestre Trivial.

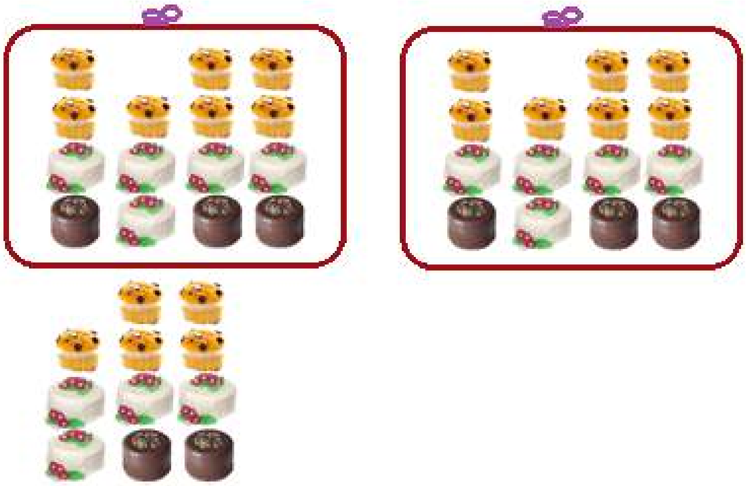

Figura 15: 2 pacotes com 3 bolos de chocolate, 5 bolos de baunilha e 7 bolos de laranja; sobra 1 conjunto com 2 bolos de chocolate, 4 bolos de baunilha e 5 bolos de laranja.

Nesta última composição um problema persiste, sobrando um conjunto de 11 bolos. Neste momento já é claro para o Mestre que o número de pacotes que se consegue compor é sempre determinado pelas sobras. Portanto, o Mestre apenas consegue compor um pacote, ou seja, o m.d.c.$(8, 14, 19) = 1$.

Figura 16: Como m.d.c.$(8, 14, 19) = 1$, o Mestre só conseguiu fazer um pacote.

No exemplo que acabou de ser analisado, o Mestre Trivial obteve uma situação inicial em que, em relação às sobras, um dos números era múltiplo do outro. O que acontece se isso não acontecer?

Suponhamos que temos 20 bolos de laranja, 15 de baunilha e 8 de chocolate. Nesse caso, relativamente às sobras, o número de bolos de laranja não é múltiplo do número de bolos de baunilha (Figura 17).

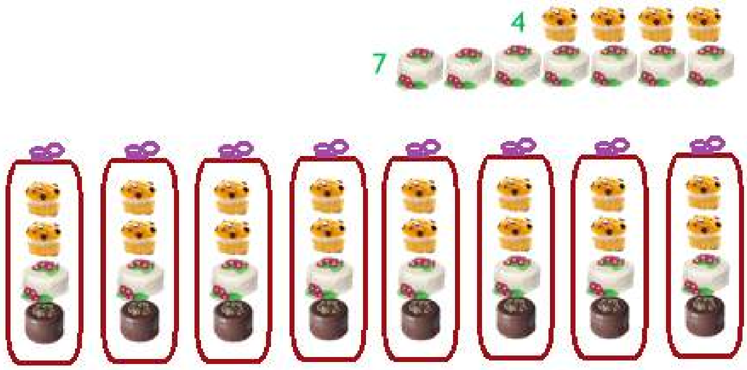

Figura 17: 8 pacotes com 1 bolo de chocolate, 1 bolo de baunilha e 2 bolos de laranja; sobram 7 bolos de baunilha e 4 bolos de laranja.

É impossível "harmonizar" as sobras em mais do que 1 conjunto de igual composição. Portanto, não pode ser criado mais do que um pacote de bolos.

Figura 18: m.d.c.$(8, 15, 20) = 1$.

4 Conclusão

O algoritmo de Euclides pode ser entendido como um processo de formação sucessiva de conjuntos iguais, sendo o número de conjuntos condicionado pelos elementos que sobram no passo anterior (ou, no primeiro passo, pelos elementos do conjunto com menor cardinalidade). Esta abordagem permite determinar o máximo divisor comum entre 2, 3, ou n números e, acima de tudo, permite criar contextos em que o máximo divisor comum é determinado com recurso a materiais manipuláveis. Esse facto favorece bastante a compreensão, especialmente quando se pensa em crianças do 5.º ano de escolaridade.

O leitor pode experimentar o processo em [3].

Referências

[1] Heath, L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover Publications, 1956.

[2] Ministério da Educação e Ciência. *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*, MEC – Direção Geral da Educação, homologado a 17 de junho de 2013.

[3] Carvalho, A., Santos, C. *Geogebra applet*–"Algoritmo dos Bolos" por Hugo Pereira de Almeida, 2017.
https://www.geogebra.org/m/VGb74WRz