Número 19
Dezembro, 2022

Ludus

Propriedade e Edição
Associação Ludus, Museu de Ciência, Rua da Escola Politécnica 56
1250-102 Lisboa, Portugal
Email: jpm@ludus-opuscula.org URL: http://jpm.ludus-opuscula.org

Informações

O *Jornal das Primeiras Matemáticas* é semestral, eletrónico e incide sobre a matemática do pré-escolar e dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. A comissão editorial poderá aceitar artigos focados noutros níveis de ensino desde que o conteúdo se mostre suficientemente relevante para permitir o devido aproveitamento para os níveis que constituem o objeto do jornal. O público alvo é constituído preferencialmente por educadores e por professores dos 1.º e 2.º ciclos, mas poderá estender-se a pais, encarregados de educação e crianças. Os números saem nos exatos momentos de Solstício. As secções serão as seguintes (em cada número poderá haver mais de um artigo por secção ou secções que não sejam contempladas):

Entrevistas
Jogos
Matemática no Quotidiano
Necessidades Educativas Especiais
Notícias
Os Primeiros Livros
Problemas e Desafios
Recursos Didáticos
Temas da Matemática Elementar
Vária

Os autores são matemáticos, professores, educadores, formadores e investigadores, próximos da realidade do pré-escolar e dos 1.º e 2.º ciclos. Isto é uma norma geral não obrigatória. Os textos são da responsabilidade dos autores, não refletindo qualquer visão editorial do jornal.

Índice

JOGOS ALUSIVOS À PRIMEIRA DEZENA NA EDUCAÇÃO PRÉ-ESCOLAR

Isabel Melo, Raquel Dinis, Ricardo Cunha Teixeira

FCSH-UAc, FCSH-UAc & NICA-UAc, FCT-UAc & NICA-UAc

isabel_melo_1999@hotmail.com, raquel.jj.dinis@uac.pt, ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *Neste artigo, analisamos o contributo de jogos pedagógicos, inspirados nos princípios orientadores do Método de Singapura para o ensino-aprendizagem da Matemática na Educação Pré-Escolar, no desenvolvimento do sentido de número, envolvendo a primeira dezena. Os jogos foram implementados no decorrer de um estágio pedagógico na Educação Pré-Escolar, no âmbito do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico, da Universidade dos Açores.*

Palavras-chave: Jogos pedagógicos, Ensino da Matemática na Educação Pré-Escolar, Sentido de número, Método de Singapura, Abordagem CPA.

1 Do jogo pedagógico aos princípios orientadores do Método de Singapura

A brincadeira, a ludicidade e o jogo são fundamentais para que as crianças tenham um papel ativo na construção do seu conhecimento, pois é por meio da ação que se experienciam novas estratégias e se reflete sobre as mesmas, numa perspetiva de aperfeiçoamento de competências e conhecimentos, que conduz à compreensão e, consequentemente, à aprendizagem: *a criança aprende fazendo.* Tendo isto em consideração, ao serem fornecidas oportunidades de jogo, as crianças desenvolvem as suas capacidades de reflexão e pensamento, tal como a sua compreensão de conceitos e procedimentos importantes [24].

O recurso ao jogo em contexto pedagógico estimula a compreensão de conceitos e procedimentos, num nível crescente de complexidade e abstração, potenciando, assim, o sucesso escolar. A prática de jogos é, pois, de extrema importância para o desenvolvimento holístico das crianças. Deste modo, aliar as potencialidades do jogo ao processo de ensino-aprendizagem perspetiva-se ser uma estratégia muito vantajosa.

Assim, por meio do jogo pedagógico, possibilita-se uma abordagem informal e intuitiva dos conceitos e procedimentos matemáticos abstratos que, de forma mais natural e atrativa, são compreendidos [8]. Assumindo esta perspetiva, os docentes são encorajados a olhar para o jogo pedagógico como um recurso "desbloqueador das relações entre conceitos matemáticos" ([13], p. 26) e, por isso, promotor de aprendizagens ativas e significativas, não devendo ser encarado meramente como uma atividade extracurricular.

O recurso ao jogo na sala de aula possibilita a passagem de uma metodologia expositiva para uma metodologia centrada no aluno, que passa a participar ativamente na construção do seu conhecimento. Deste modo, o jogo pedagógico é considerado "um processo dinâmico no qual o aluno torna-se o agente dessa construção ao vivenciar situações, estabelecer conexões com o seu conhecimento prévio, perceber sentidos e construir significados" ([6], p. 183).

As dinâmicas promovidas pela prática de jogos pedagógicos ganham, assim, algum potencial se forem articuladas com metodologias ativas que respeitem a natureza da própria Matemática. O Método de Singapura é um exemplo claro neste sentido [10, 25]. Singapura ocupa sistematicamente os lugares cimeiros do TIMSS [19, 20, 21, 22, 23]. O TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) avalia o desempenho dos alunos do 4.º ano e do 8.º ano em Matemática e em Ciências, tendo por finalidade gerar informação sobre os resultados do desempenho dos alunos e sobre os contextos em que estes aprendem.

O Grupo de Trabalho de Matemática, criado pelo Ministério da Educação (Despacho n.º 12 530/2018, de 28 de dezembro), elaborou um conjunto de 24 recomendações sobre o ensino, a aprendizagem e a avaliação na disciplina de Matemática [5]. Estas recomendações apresentam características comuns com os princípios orientadores de Singapura. Não é por acaso que este relatório dedica várias páginas ao programa de Matemática implementado em Singapura.

Na base do Método de Singapura estão três teorias edificadoras: a abordagem concreto-pictórico-abstrato (designada habitualmente por abordagem CPA), inspirada nos trabalhos de Jerome Bruner [1], os princípios da variabilidade matemática e percetiva de Zoltán Dienes [2] e a compreensão instrumental versus compreensão relacional de Richard Skemp [18].

Skemp [18] debruça-se sobre dois tipos diferentes de compreensão, estabelecendo uma distinção entre compreensão instrumental e compreensão relacional. No contexto da compreensão instrumental, a criança aprende uma regra, algoritmo ou método e executa-o/a de memória sem compreender, exatamente, o motivo que a leva a executar a regra ou algoritmo: "*pupils know the ruler but without reason, likely from memory only*" ([3], p. 42). Em oposição, quando o discente alcança a compreensão relacional, para além de conhecer a regra ou algoritmo, ele compreende-a/o e é capaz de explicar o motivo da sua aplicação.

Assim, no contexto de uma compreensão instrumental, o aluno aplica uma regra recorrendo à memorização. Por seu turno, com uma compreensão relacional existe a efetiva compreensão da regra, pelo que, quando confrontado, o aluno é capaz de explicar o procedimento matemático subjacente à sua aplicação. Edge [3] corrobora a ideia de que a aposta numa compreensão relacional é mais vantajosa, a longo prazo, para a aprendizagem das crianças, afirmando que Skemp reconhece que "*in the short run, teaching for instrumental understanding is easier and may have short-term positive effects. However, for a long-term value, relational understanding must be the focus of instruction*" (p. 42). Na verdade, "*It is more adaptable to new tasks* [...] *It is easier to remember* [...] *Relational knowledge can be effective as a goal in itself* [...] *Relational schemas are organic in quality* [...]" ([18], pp. 9-11).

Por seu turno, Dienes [2] é o autor dos princípios de variabilidade matemática e percetiva. Em relação ao princípio da variabilidade matemática, o autor refere que a abordagem a um conceito deve focar os atributos matemáticos essenciais à sua compreensão, "por meio de experiências que incluam o maior número possível de variáveis" ([2], p. 41). Neste sentido, deve-se variar os aspetos que não são essenciais à estrutura do conceito e centrar a atenção no aspeto constante, alcançando-se "o conceito matemático geral, livre de qualquer mancha e particularização" ([2], p. 190).

Por seu turno, o princípio da variabilidade percetiva privilegia a utilização de diversos materiais e contextos para abordar um determinado conceito: "a mesma estrutura conceptual deve ser apresentada na forma de tantos equivalentes percetivos quanto possível" ([2], p. 42). Para Dienes, "a essência da abstração é retirar propriedades comuns de diferentes tipos de situações" ([2], p. 190). Neste contexto, a exploração de representações múltiplas é de elevada relevância, uma vez que permite variar a representação percetiva e manter a estrutura concetual [3].

Por fim, devemos referir a abordagem concreto-pictórico-abstrato (abordagem CPA), inspirada nos trabalhos de Bruner [1]. Para este autor, a aprendizagem da Matemática é um processo ativo, que deve seguir uma caminhada progressiva e faseada do concreto para o abstrato, com vista à compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos. Ao experienciarem esta caminhada, os alunos têm a oportunidade de explorar três estádios de aprendizagem, que Bruner denominou por ativo, icónico e simbólico. Em maior detalhe, Bruner [1] explicita que:

> *Any set of knowledge* [...] *can be represented in three ways: by a set of actions appropriate for achieving a certain result (enactive representation); by a set of summary images or graphics that stand for a concept without defining it fully (iconic representation); and a set of symbolic or logical propositions drawn from a symbolic system that is governed by rules or laws forming* [...] *propositions (symbolic representation).* (pp. 44-45)

Neste sentido, fomenta-se a compreensão de conceitos e procedimentos abstratos, através de representações concretas e pictóricas, o que constitui um aspeto extremamente enriquecedor para a aprendizagem ativa e significativa da criança.

O currículo de Singapura inspirou-se nos estudos deste psicólogo para estruturar e organizar as dinâmicas de aprendizagem. Hoong, Kin e Pien [7] compararam as duas abordagens e concluíram que existe uma correspondência direta entre a abordagem ativo-icónico-simbólico de Bruner [1] e a abordagem CPA do Método de Singapura, constituindo esta mudança de designação uma tentativa sobretudo de simplificação da linguagem.

No presente artigo, seguimos a estruturação da aprendizagem da Matemática na Educação Pré-Escolar, inspirada no Método de Singapura, de acordo com os oito grandes temas apresentados por Santos e Teixeira [16]. Os jogos centram-se no desenvolvimento do sentido de número, no contexto da primeira dezena [15], mobilizando outros temas, nomeadamente tarefas envolvendo propriedades e critérios [14].

2 Jogos promotores do sentido de número

Neste tópico, apresentamos uma série de jogos de exploração dos números de 1 a 10, que foram implementados em contexto da Educação Pré-Escolar. Faremos a descrição, análise e reflexão sobre as experiências de aprendizagem promovidas, tendo como fundamento os princípios orientadores do Método de Singapura.

2.1 O Ouriço e os números

Neste jogo, procurámos desenvolver a abordagem CPA do Método de Singapura, com foco nos números naturais até 5. Esta abordagem surgiu integrada numa intervenção dedicada à temática "Estações do Ano – outono", em que se quis distinguir o ouriço dos castanheiros do ouriço-cacheiro. A Figura 1 apresenta um registo fotográfico do jogo, que abaixo se caracteriza.

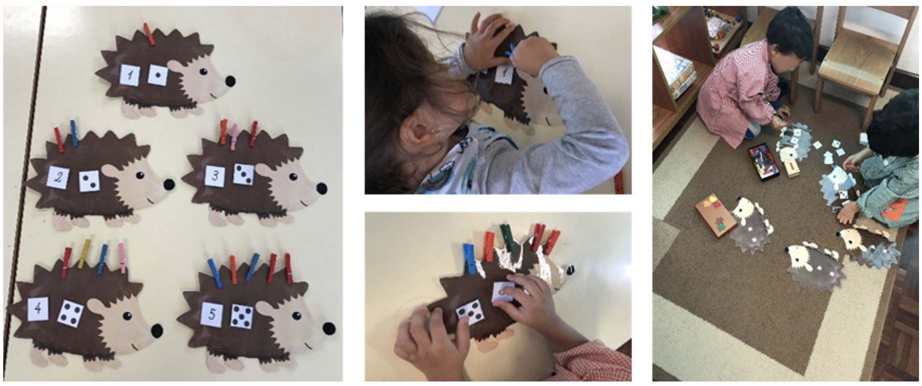


Figura 1: Registo fotográfico do jogo "O Ouriço e os números".

Material necessário

Para a implementação deste jogo, foram utilizados cinco cartões em formato de ouriço-cacheiro, cinco cartões de pequenas dimensões, cada um com uma representação pictórica de um número do 1 ao 5, cinco cartões, do mesmo tamanho, com a representação abstrata (numeral escrito) dos números do 1 ao 5 e diversas molas pequenas. No cartão principal e em cada cartão mais pequeno, relativo à representação pictórica ou abstrata, foram colocados pedaços de velcro, facilitando a realização da atividade. Além disso, todos os cartões foram plastificados para garantir maior durabilidade.

Salientamos que foram utilizados apenas cartões com os números do 1 ao 5, porém, consoante o desenvolvimento e conhecimentos das crianças é possível ir acrescentando outros cartões, compondo a primeira dezena.

Dinâmica de jogo

Optámos por realizar o jogo com quatro crianças em simultâneo, constituindo duas equipas de dois elementos cada.

A dinâmica desenvolvida favoreceu a cooperação. De facto, ao iniciar o jogo, os dois elementos de cada equipa tinham de se auxiliar mutuamente de modo a completar o ouriço-cacheiro, ganhando a equipa que o conseguisse fazer em primeiro lugar e com todas as representações corretas. Com as crianças de 5 e 6 anos, além da implementação do jogo a pares, ocorreu também a realização individual a pedido delas próprias. Nesta versão, cada um dos quatro jogadores dispunha de um conjunto de cartões para completar individualmente, vencendo o jogador que os completasse corretamente em primeiro lugar.

Em relação ao desenvolvimento do jogo, diferenciamos a sua abordagem, de modo a adequar o nível de dificuldade aos conhecimentos das crianças. Assim, num primeiro nível e para as crianças de 3/4 anos, a estagiária forneceu a cada uma um cartão de jogo de ouriço-cacheiro com a representação pictórica e abstrata de um determinado número (diferente para cada jogador), tendo a criança de o completar com a respetiva representação concreta, isto é, colocando molas em quantidade correspondente. Ao longo das diversas explorações, fomos variando a representação que as crianças tinham de identificar, percorrendo, assim, a identificação dos três tipos de representação do número: concreto (através da colocação das molas), pictórico (apresentando o cartão com os pequenos círculos) e abstrato (colocando o cartão com o respetivo numeral). Importa referir que, nas primeiras explorações, auxiliámos as crianças por forma a que fossem alcançando as aprendizagens pretendidas.

Por sua vez, com algumas crianças de 4 anos e com as crianças de 5 e 6 anos incidimos o desenvolvimento do jogo na descoberta de duas das representações de um determinado número. Como tal, num primeiro nível, a estagiária forneceu a cada criança um cartão de jogo de ouriço-cacheiro com o cartão da representação abstrata de um determinado número, sendo este diferente para cada jogador. Em seguida, as crianças tinham de reconhecer o numeral, identificar a respetiva representação pictórica, pondo o destacável no cartão principal, bem como colocar a quantidade de molas correspondente (concreto).

O jogo foi concebido de modo a explorar diferentes representações. Com isto, conseguimos aplicar seis dinâmicas diferentes, as quais passamos a descrever: i), ii) e iii) apresentar dois elementos (molas e cartão com registo pictórico, molas e cartão com o numeral ou cartão com registo pictórico e numeral) e a criança tem de identificar a representação em falta; iv) apresentar a representação abstrata e a criança tem de identificar a representação pictórica e colocar as molas (concreto); v) apresentar a representação pictórica e a criança tem de associar o cartão com o numeral e colocar o número de molas correspondente; vi) colocar as molas e a criança tem de associar a representação pictórica e abstrata.

Após a exploração orientada, demos liberdade às crianças de serem elas próprias a escolher um cartão com um determinado numeral para completar o seu cartão de jogo.

2.2 Qual é a minha metade?

Este jogo combina representações pictóricas e simbólicas da abordagem CPA, com a dinâmica de jogo da memória, na exploração dos números naturais até 5. A Figura 2 ilustra o jogo desenvolvido, que em seguida se apresenta e analisa.

Figura 2: Registo fotográfico do jogo "Qual é a minha metade?".

Material necessário

Para o desenvolvimento deste jogo foram necessários cinco *puzzles*, cada um representativo de um número do 1 ao 5. Cada *puzzle* era composto por duas peças, em que uma apresentava a imagem de uma metade de uma maçã com a representação abstrata de um número (numeral) e a outra peça expunha a outra metade da maçã com uma representação pictórica do mesmo número (com recurso a pequenas sementes).

Dinâmica de jogo

Este jogo individual apresenta duas dinâmicas. Inicialmente, colocaram-se todas as peças dos *puzzles* aleatoriamente em cima da mesa, com as suas faces viradas para cima, por forma a serem observadas. Em seguida, a criança tinha de selecionar uma peça à sua escolha (podendo ser a da representação pictórica ou simbólica) e completar o *puzzle*, associando-lhe a peça com a metade de maçã correspondente: se inicialmente tivesse escolhido a representação pictórica, tinha de associar a representação simbólica ou vice-versa.

Numa segunda dinâmica, o jogo foi realizado com uma tipologia semelhante ao jogo da memória. Como tal, todas as peças dos *puzzles* foram novamente colocadas de forma aleatória em cima da mesa, mas com as faces viradas para baixo, sem que as crianças conseguissem observar as imagens. Para a sua realização, a criança escolhia uma das peças, colocando-a à sua frente com a face virada para cima. Em seguida, por forma a completar o *puzzle*, tinha de ir virando as restantes peças até acertar na representação correspondente. Sempre que era virada uma peça que não pertencia ao *puzzle* em questão, ela era novamente colocada com a imagem para baixo. Com este procedimento, a criança ia memorizando a posição de determinadas peças e, assim, conseguia efetuar os emparelhamentos de forma sucessivamente mais rápida.

Para além destas duas dinâmicas individuais foram exploradas outras situações, em momentos de brincadeira livre entre as crianças e entre a estagiária e as crianças, que possibilitaram momentos de interação em grupo, cooperação e competição. Neste contexto, uma terceira dinâmica foi realizada da mesma forma que a primeira, diferenciando-se desta por ter sido desenvolvida a pares. Assim, acrescentou-se o elemento competitivo, em que ganhava a criança que conseguisse completar corretamente um maior número de *puzzles*. De igual forma, desenvolveu-se o jogo com a tipologia de jogo de memória a pares, promovendo-se a competição entre os elementos do mesmo par.

Com o objetivo de estimarmos a cooperação entre as crianças, avançamos para uma terceira fase em que desenvolvemos o jogo em grupos de quatro crianças, compostos por equipas de dois elementos cada. Desta forma, os jogadores de cada equipa tinham de se auxiliar mutuamente na composição dos *puzzles* (nas dinâmicas com as faces viradas para cima e para baixo), com o objetivo de ganhar o jogo, isto é, de completar corretamente o maior número possível de *puzzles*. Foi nosso objetivo promover situações de competição que estimulassem a cooperação entre os elementos de um mesmo par.

2.3 Quantos são?

Este jogo foi introduzido numa intervenção dedicada à temática da "Educação Ambiental". Com o presente jogo, para além da abordagem CPA, tencionámos desenvolver os princípios da contagem, envolvendo os números naturais até 5 [4, 15]: *contagem estável* (saber a sequência das palavras-número – "1,2,3,4,5"), *correspondência um-para-um* (fazer corresponder a cada termo numérico um item para contar, sem contar itens mais de uma vez ou esquecer-se de algum), *abstração* (diversificar os itens a contar – objetos, sons, personagens de uma história, etc.), *irrelevância da ordem* (o resultado de uma contagem não depende de onde se começa nem da organização espacial da contagem) e *cardinal* (o último item a ser contado reflete o número total de itens).

Na Figura 3 consta o registo fotográfico do jogo, que nesta sequência se apresenta e caracteriza.

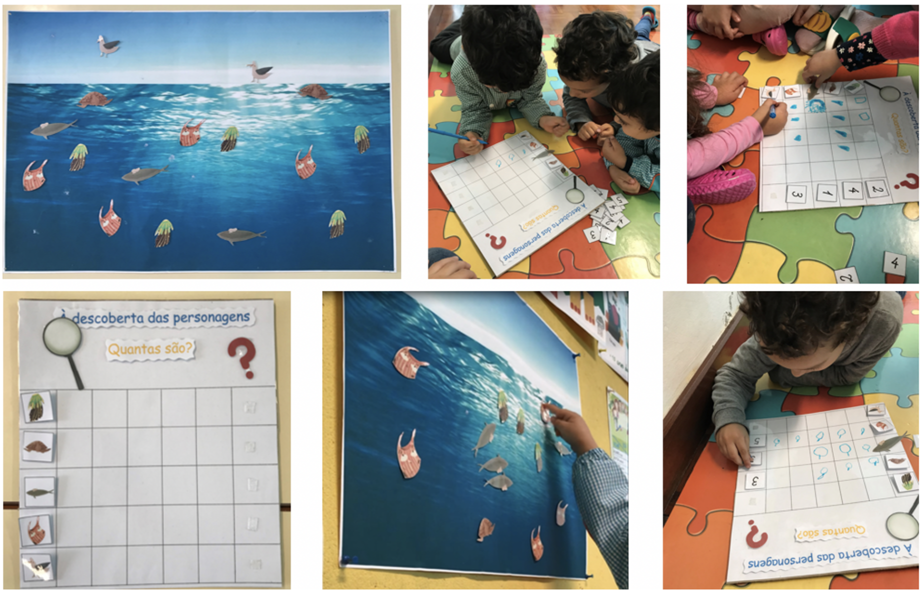


Figura 3: Registo fotográfico do jogo “Quantos são?”.

Material necessário

Com vista à implementação deste jogo, foi utilizado um cenário de um oceano em tamanho A2 e 25 cartões com o formato das personagens da história explorada, que se intitulava *Será o Mar o Meu Lugar?*, de Saran Roberts [11].

Importa referir que foram disponibilizadas cinco cópias de cada uma das cinco personagens: 5 gaivotas, 5 tartarugas, 5 águas-vivas, 5 baleias e 5 cópias da personagem Tomé da história. Para além destes elementos, o jogo também contemplava uma tabela plastificada para registo pictórico e simbólico, um cartão destacável com a imagem de cada personagem da história, para colocar no início de cada linha da tabela, cartões com os numerais, do 1 ao 5, e um marcador. O material disponibilizado permitiu, em diferentes explorações, variar as quantidades de cada personagem, bem como a disposição dos cartões no cenário.

Dinâmica de jogo

Este jogo começou por ser planificado com a intenção de contagem e registo. Contudo, de forma voluntária, as crianças acrescentaram a atribuição de pontos por cada desafio correto e a identificação, no final, de um vencedor. As partidas decorreram em grupos de cinco crianças.

Para iniciar o jogo, as várias personagens eram dispostas no cenário, segundo diferentes arrumações e diversificando as quantidades de cada uma de modo a abranger todos os números do 1 ao 5, como, por exemplo: uma baleia, duas águas-vivas, três tartarugas, quatro cópias da personagem Tomé e cinco gaivotas. Importa salientar que diferenciámos a abordagem ao jogo, tendo em consideração o desenvolvimento das crianças, no que se refere à disposição das personagens no cenário. Como tal, com as crianças de 3 e 4 anos as personagens ficaram dispostas em grupos do mesmo tipo, enquanto que, para as restantes crianças (que eram a maioria), as personagens foram colocadas no cenário de forma aleatória.

Após a colocação das personagens no cenário, cada criança, à vez, contava o número de exemplares da personagem escolhida (exploração concreta). Em seguida, na linha da tabela correspondente à personagem selecionada, pintava ou fazia um desenho em tantos quadrados quantos a quantidade de exemplares da sua personagem (registo pictórico). Por fim, era selecionado e colado, no final da fila de quadrados, o cartão com o numeral correspondente à quantidade de exemplares da personagem (registo abstrato).

Desta forma, procurámos desenvolver/consolidar quatro dos cinco princípios da contagem: os princípios da contagem estável e da correspondência um-para-um (na contagem dos exemplares da sua personagem, as crianças apontavam para cada um à medida que iam contando em voz alta); o princípio da irrelevância da ordem (as crianças eram estimuladas a contar os exemplares de uma mesma personagem, que se encontravam dispersos pelo cenário, a partir de diferentes posições); e o princípio da cardinalidade (concluída a contagem no cenário e efetuado o registo pictórico na tabela, a criança era questionada sobre quantos exemplares da personagem existiam no cenário; em seguida, referia o número e colava na tabela o cartão com o numeral correspondente, de modo que esta pudesse constatar que o último item contado correspondia ao cardinal desse conjunto). No contexto da dinâmica deste jogo, também é possível explorar o princípio da abstração, por exemplo, solicitando que o participante bata tantas palmas quantas as cópias da sua personagem (outras possibilidades passam por saltar, assobiar, subir ou descer degraus de uma escada, etc.).

Além disso, importa realçar que houve o cuidado de elaborar cinco exemplares de cada uma das cinco personagens. Este cuidado teve o intuito de, em cada repetição do jogo, podermos variar as quantidades de cada personagem, levando a que o jogo não se tornasse repetitivo. Deste modo, as crianças realizaram o jogo através da aplicação de conhecimentos (contagens) e não por saberem, por exemplo, que existiam sempre duas baleias, independentemente da sua posição. Assim, o jogo tornou-se mais dinâmico e estimulador de aprendizagens enriquecedoras. De notar que este cenário de abordagem CPA pode ser adaptado para a exploração dos números até 10, com a mesma dinâmica, se recorrermos a dez cópias de dez personagens diferentes.

2.4 Puzzle numérico

Neste exemplo, mobilizámos a abordagem CPA através de um jogo, para a aprendizagem dos números naturais até 10. O registo fotográfico consta na Figura 4, seguindo-se a sua caracterização e análise.

Material necessário

O jogo era constituído por 10 *puzzles*, cada um referente a um número do 1 ao 10. Cada *puzzle* era composto por quatro peças: a primeira continha a representação

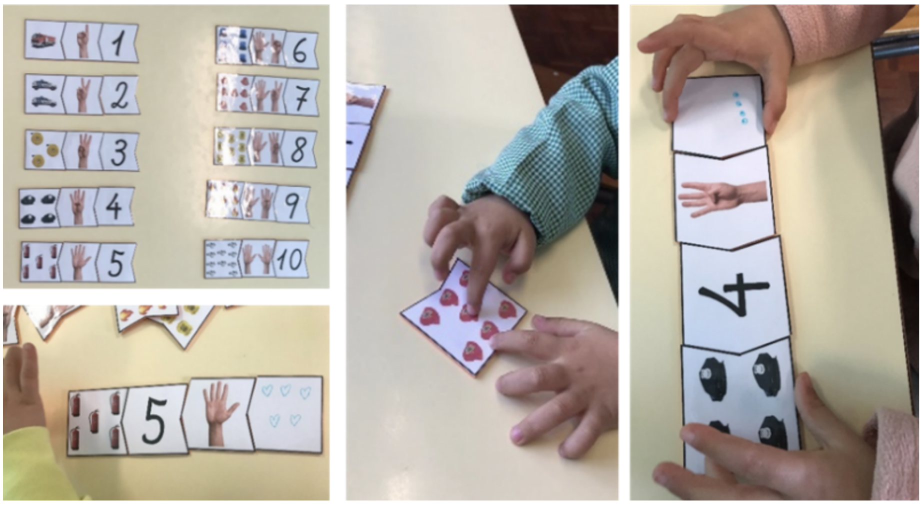


Figura 4: Registo fotográfico do jogo "Puzzle numérico".

pictórica de um número do 1 ao 10, com imagens reais de um determinado objeto; a segunda peça apresentava a representação do mesmo número com a imagem dos dedos das mãos; a terceira continha o numeral (representação abstrata) e a última era uma peça em branco, que se destinava a um registo pictórico a ser efetuado pelo participante. As peças podiam ser encaixadas por qualquer ordem. Na análise que se segue, utiliza-se a ordem das peças referida acima.

Dinâmica de jogo

Numa primeira abordagem, o jogo foi explorado em grande grupo no tapete. A estagiária colocou as várias peças dispostas no tapete, escolheu a primeira peça do *puzzle* do número 3 e, em conjunto, as crianças realizaram a contagem dos elementos/itens. De seguida, uma das crianças selecionou a segunda peça do *puzzle* correspondente, fez a contagem dos dedos da mão e reproduziu essa configuração com a sua mão. Posteriormente, outra criança identificou a terceira peça (numeral) e uma quarta utilizou a peça em branco. A última peça tinha o intuito de as crianças efetuarem, autonomamente, uma representação pictórica do número, pelo que a criança em questão desenhou três pontos. Repetiu-se o mesmo procedimento para os *puzzles* dos números 5 e 7.

Após esta exploração, o jogo foi realizado a pares. A estagiária começou por distribuir aleatoriamente as peças do jogo numa mesa e por fornecer a primeira peça a cada um dos jogadores, sem que os mesmos a observassem. De seguida, foi dado um sinal para iniciar o jogo, a partir do qual cada criança teve de completar o seu *puzzle* com as restantes peças correspondentes: colocar a peça com a representação envolvendo a imagem dos dedos das mãos, a peça com o numeral e escrever/desenhar na peça em branco, de modo a efetuar um registo pictórico partindo da escolha livre do símbolo a usar. Assim, ganhou o jogo a criança que primeiro conseguiu completar corretamente o seu *puzzle*.

É importante referir que a peça em branco não foi contabilizada para ganhar o jogo, uma vez que, por exemplo, para os *puzzles* dos números 2 e 7, a criança que tivesse de fazer a representação pictórica do número 2 estaria em vantagem em relação à que fizesse a do número 7, por demorar menos tempo a desenhar. Assim, contabilizámos apenas a construção do *puzzle* com as três peças iniciais para determinar quem ganhava o jogo, pelo facto de estas peças exigirem apenas a sua seleção, colocando, assim, ambos os jogadores no mesmo nível. Além disso, queríamos que as crianças dispusessem livremente de tempo para escolherem o símbolo a usar para efetuarem o registo pictórico, comparando posteriormente os símbolos empregues nas representações dos diferentes números.

O jogo foi realizado de três formas diferentes, dada a diferenciação pedagógica implementada no que diz respeito ao conhecimento dos números dos *puzzles*. Neste sentido, com as crianças mais pequenas e com as que apresentavam maiores dúvidas, realizámos os *puzzles* apenas dos números até 5, enquanto que com as restantes crianças recorremos aos números até ao 10. De facto, existia um grupo de crianças que necessitava de consolidar o intervalo numérico de 1 a 5, enquanto as restantes já tinham os primeiros cinco números naturais bem consolidados e apresentavam alguns conhecimentos relativos aos restantes números. Importa referir que a abordagem dos *puzzles* dos números até ao 10 foi faseada, isto é, em primeiro lugar dinamizámos os *puzzles* do 6 ao 10 e posteriormente do 1 ao 10, por sugestão das próprias crianças.

2.5 Lança e avança

Com este jogo tencionámos consolidar os números naturais até 5, articulando os princípios da contagem [4, 15] com a subitização, ou seja, com o reconhecimento de pequenas quantidades sem contagem [9, 15]. A Figura 5 expõe o jogo referido, sendo acompanhada pela respetiva caracterização.

Material necessário

Para a dinamização deste jogo foram necessários dois arcos, duas bolas e seis pinos. Para além disso, utilizaram-se dois dados em forma de cubo de grandes dimensões, construídos a partir de caixas de café: um primeiro dado (o *dado numérico*) com cinco faces com os numerais do 1 ao 5 (representação abstrata) e com uma face com um símbolo que solicitava novo lançamento, e um segundo dado (o *dado dos deslocamentos*) com imagens reais apelando a diversos tipos de deslocamentos (saltar a pés juntos, saltar num só pé, saltos em tesoura, saltos com agachamento, etc.).

No chão existiam, ainda, 15 casas de jogo (cartolinas) dispostas em três filas, cada uma com 5 casas. Em cada fila, as casas de jogo apresentavam o registo pictórico de um número, do 1 ao 5, sendo que na primeira fila a disposição das pintas estava de acordo com a arrumação habitual presente nos dados tradicionais e nas peças de dominó, e as restantes filas contemplavam diversas arrumações das pintas que compunham os registos pictóricos. No final do percurso do jogo, encontrava-se uma cartolina com a palavra “meta” e estavam disponíveis diversos cartões com questões sobre a temática em exploração, relativa ao tema “As Profissões”.

Figura 5: Registo fotográfico do jogo "Lança e avança".

Dinâmica de jogo

O jogo foi implementado numa sessão de Educação Física, pelo que o grupo de crianças foi dividido em duas equipas, jogando duas crianças de cada vez, uma de cada equipa. Com a dinâmica mobilizada, o jogo permitiu integrar diversos domínios de conteúdo, distribuídos por três etapas. Neste contexto, e no domínio da Educação Física, para iniciar o jogo, cada uma das duas crianças tinha de se colocar dentro de um arco e lançar uma bola em direção a três pinos de jogo, ganhando a que os derrubasse em primeiro lugar ou em maior quantidade. Esta etapa determinava a primeira criança a jogar na etapa seguinte.

A segunda etapa versou os domínios da Matemática e da Educação Física. Como tal, as crianças, à vez, tinham de lançar o dado numérico, reconhecer o numeral e identificar, na primeira fila de casas de jogo, a casa cuja representação pictórica correspondia ao numeral da face superior do dado numérico (podendo contar as pintas das casas dessa fila, sempre que necessário, ou seja, sempre que os participantes não conseguissem identificar as quantidades representas em cada casa, sem contagem). Após essa identificação, a criança deslocava-se para a casa de jogo correspondente, lançava o dado dos deslocamentos e realizava o movimento determinado pela face superior desse dado tantas vezes quantas o número da sua casa. A título de exemplo, uma criança que estivesse na casa do número 3 e obtivesse o movimento de saltos a pés juntos no lançamento do dado dos deslocamentos, teria então de realizar três saltos a pés juntos. Esta dinâmica foi realizada para cada fila. Se um jogador não acertasse na casa correspondente ao número obtido no lançamento do dado numérico, este voltava para a posição onde se encontrava antes dessa jogada.

Nesta etapa do jogo, procurámos desenvolver a abordagem CPA (invertendo a ordem mais tradicional de exploração), com aplicação dos cinco princípios da contagem. Partia-se do abstrato, com o reconhecimento do numeral obtido no lançamento do primeiro dado (o dado numérico). Seguia-se o reconhecimento da representação pictórica desse número, na fila correspondente à fase do jogo, aplicando na contagem das pintas das casas dessa fila, sempre que necessário, os princípios da contagem estável (contar em voz alta usando corretamente a sequência das palavras-número), da correspondência um-para-um (contar apontando de modo a não esquecer ou repetir elementos), da irrelevância da ordem (verificar que o resultado de uma contagem não depende de onde se começa nem da organização espacial usada na contagem) e do cardinal (verificar que o último elemento a ser contado reflete o número total de elementos). Por fim, estimulava-se a fase concreta através da realização de movimentos em número igual ao do valor do dado numérico, desenvolvendo-se, com isto, os princípios da abstração ("tudo pode ser contado", incluindo saltos) e da contagem estável (aplicar corretamente a sequência das palavras-número). Além disso, apelámos à subitização, mediante a apresentação de diversas arrumações das pintas nas casas de jogo, estimulando as representações múltiplas dos registos pictóricos de um mesmo número e o reconhecimento de pequenas quantidades sem contagem.

Na última etapa, os participantes tinham de responder a uma questão sobre a temática em exploração, "As Profissões". No final de cada ronda, o jogador que chegasse em primeiro lugar e respondesse corretamente à questão apresentada ganhava um ponto. No término das rondas, a equipa com mais pontos era declarada vencedora.

3 Potencialidades pedagógicas dos jogos implementados

Todas as crianças participaram de forma ativa nas dinâmicas propostas, tendo demonstrando muito empenho e alguma capacidade de concentração, o que, por sua vez, se traduziu na compreensão dos conteúdos e no desenvolvimento das aprendizagens pretendidas. A abordagem CPA [1] foi constante e central nos jogos desenvolvidos. Esta abordagem revela-se especialmente rica para a aprendizagem das crianças em idade Pré-Escolar, uma vez que através dela oferecem-se oportunidades "*to interact with concrete manipulatives or concrete experiences to construct meanings and connect this learning experience with the pictorial and abstract representations of the mathematics concepts*" ([17], p. 35).

Nos jogos introduzidos, desenvolvemos diferentes dinâmicas que permitiram explorar o potencial da abordagem CPA. Neste sentido, os jogos "O Ouriço e os números", "Quantos são?" e "Lança e avança" possibilitaram explorar os três estádios defendidos por Bruner [1]. Por sua vez, os jogos "Qual é a minha metade?" e "Puzzle numérico" centraram-se essencialmente em registos pictóricos e simbólicos, embora as peças do jogo "Puzzle numérico" com a representação dos números através dos dedos das mãos tenham apelado a que as crianças usassem os seus próprios dedos para verificar essa representação.

Entendemos que a multiplicidade de dinâmicas desenvolvidas revelou-se eficaz para a aprendizagem das crianças. Através delas, promovemos a exploração de diferentes registos, não só em termos da caminhada progressiva rumo à abstração, como também reforçando as representações múltiplas das diferentes fases, incluindo a sua exploração em sentido inverso (dos registos simbólicos à concretização), como aconteceu no jogo "Lança e avança", permitindo estimular o pensamento e a compreensão do sentido de número e, assim, aprendizagens mais enriquecedoras e significativas.

No jogo "O Ouriço e os números", observámos uma situação interessante e merecedora de reflexão. Em momentos de escolha livre do número a explorar, constatámos que algumas crianças não escolhiam o número 5, preferindo realizar o jogo apenas com os números 1, 2 ou 3. Ao questionarmos sobre o porquê de não escolherem o número 5, obtivemos a seguinte resposta: "Eu perdia, por causa que eu demorava mais tempo que o [criança E]" (criança L). Com isto, concluímos que estas crianças já tinham consolidados os conhecimentos a este nível, evidenciando-se o sentido de número e a compreensão da comparação de quantidades, ou seja, que o número 5 é maior que o número 1, por exemplo. Com este conhecimento, as crianças sabiam que ao escolher o número 5 iriam perder o jogo porque tinham de colocar mais molas, levando mais tempo que o adversário.

Destacamos o jogo "Qual é a minha metade?" com a variante de jogo da memória, pelo facto de ter convocado a memória visual das crianças. Durante a sua realização, apercebemo-nos de que a maioria das crianças apresentava um bom desenvolvimento da memória visual, uma vez que numa jogada em que era necessário descobrir uma carta que já tinha sido visualizada, elas conseguiam fazer o par logo na primeira tentativa. Quando jogado em equipas, verificou-se um forte sentido de cooperação, dado que os jogadores se auxiliavam uns aos outros na descoberta dos pares, combinando estratégias para tal, como, por exemplo, um elemento da equipa memorizava as posições dos cartões com as representações pictóricas, enquanto o seu colega memorizava as dos cartões com representações simbólicas.

Em relação ao jogo "Puzzle numérico", disponibilizaram-se peças com diferentes representações de cada número, de modo a potenciar o desenvolvimento do sentido de número através de representações múltiplas. Com a introdução da peça em branco, pretendíamos que fossem as crianças a criar a sua própria representação pictórica, apelando, assim, a um maior enriquecimento dos registos partindo das suas vivências.

Neste ponto, constatámos que as crianças, para além de fazerem a representação utilizando pontos e outras formas, também manifestaram interesse em escrever o numeral, apelando à representação simbólica. Considerámos uma situação pertinente que releva o interesse das crianças pela escrita dos numerais. Neste sentido, verificámos que algumas crianças demonstraram maior facilidade em escrever os numerais do 1 ao 5 após exploração visual dos respetivos símbolos, de modo a recordar o grafismo associado a cada numeral.

É ainda de referir que tivemos como foco o desenvolvimento dos cinco princípios da contagem [4, 15]. Nesta ótica, promovemos a contagem estável, incentivando o registo oral da sequência correta das palavras-número, e a correspondência um-para-um, em que as crianças associavam cada palavra-número a um objeto do conjunto, apontando para esse objeto, de modo que não fossem contados objetos mais de uma vez ou que algum objeto ficasse por contar. Outro princípio explorado foi o da cardinalidade, segundo o qual a última palavra-número da sequência determina o cardinal do conjunto de objetos ou seres que está a ser contado. De modo a desenvolver este princípio, procurámos que as crianças apresentassem um cartão com o numeral relativo ao número de objetos/seres após cada contagem. Em jogos como "Quantos são?" e "Lança e avança" apelámos, também, ao princípio da irrelevância da ordem, com contagens efetuadas a partir de diferentes posições, de modo que as crianças percebessem que o número de objetos ou seres de um conjunto é sempre o mesmo, não dependendo das posições onde começa e termina a contagem nem da organização espacial da própria contagem. No jogo "Lança e avança", abordámos também o princípio da abstração, promovendo uma diversidade de contagens, em particular de movimentos, numa lógica em que "tudo pode ser contado". Vimos também que o mesmo princípio pode ser explorado no jogo "Quantos são?".

Neste contexto, constatámos que a maioria das crianças foi desenvolvendo os diferentes princípios da contagem e ultrapassando algumas dificuldades que se manifestaram no decorrer das explorações efetuadas. Em relação ao princípio da contagem estável, importa referir que uma das crianças de 3 anos sabia inicialmente, apenas, a sequência das palavras-número até ao número três, trocando em seguida o quatro com o cinco. No que concerne ao princípio da cardinalidade, a mesma criança de 3 anos e duas de 4 anos inicialmente não reconheciam que o último número a ser referido na contagem representava o total de objetos do conjunto. Porém, no decorrer das sucessivas realizações de jogos e do acompanhamento pela estagiária, estas crianças foram colmatando as lacunas verificadas.

Um aspeto merecedor de reflexão diz respeito à disposição dos objetos/itens envolvidos na contagem. Nos jogos "O ouriço e os números", "Qual é a minha metade?", "Lança e avança" e "Puzzle numérico" (com números até 5), as crianças não demonstraram dificuldades significativas nas contagens, ao contrário do observado nos jogos "Quantos são?" (sobretudo quando os cartões de uma mesma personagem se encontravam mais dispersos no cenário) e "Puzzle numérico" (com números do 6 ao 10). Nestes últimos dois jogos, algumas crianças tendiam a repetir a contagem de elementos que já tinham contado ou a perder-se na contagem.

Analisando as dinâmicas dos diferentes jogos mencionados, constatámos que as dificuldades surgiram sobretudo quando os elementos mobilizados na contagem se encontravam dispersos e desorganizados. Desta forma, verificámos que as dificuldades observadas estavam diretamente relacionadas com as arrumações dos objetos e, no caso do jogo "Puzzle numérico" (com números do 6 ao 10), também com a maior quantidade de elementos que tinham de ser mobilizados na contagem.

Sempre que surgiam dificuldades nas contagens, a estagiária pedia à criança que voltasse a contar ou, por iniciativa própria, ela voltava a fazê-lo, tendo mais cuidado de modo a não repetir o mesmo elemento na contagem e a não se esquecer de contar um determinado elemento desse conjunto. Com as repetições das contagens, verificou-se que os educandos começavam a utilizar estratégias para não se perderem nessas contagens. Por exemplo, várias crianças contavam da esquerda para a direita ou vice-versa, no sentido dos ponteiros do relógio ou, ainda, assinalando ou colocando de lado os objetos já contados, por forma a não serem contados novamente. Assim, registou-se um progresso significativo das crianças, no decorrer do estágio, na aplicação dos princípios da correspondência um-para-um e da irrelevância da ordem, tendo a maioria alcançado essas competências na íntegra, mesmo em situações de maior grau de dificuldade.

Esta análise remete-nos para a importância de um investimento na subitização na Educação Pré-Escolar, com vista a obtermos por parte das crianças "rápidos, precisos e confiantes julgamentos relativos ao número de objetos de uma coleção, sem os contar" ([15], p. 27), pelo que entendemos pertinente uma reflexão mais detalhada sobre o assunto. Neste contexto, destacamos o jogo "Lança e avança", pelo facto de este promover explicitamente a subitização. De facto, o jogo apresentava três tipos diferentes de arrumações para os diversos números, de modo a apelar às representações múltiplas, com o intuito de levar as crianças a reconhecerem pequenas quantidades sem necessidade de contagem.

Na primeira ronda do jogo, observámos que existiu algum cuidado por parte das crianças que, com o passar do tempo, nas rondas seguintes, foi diminuindo no sentido em que muitas começaram a ter maior destreza no reconhecimento das arrumações. Importa, portanto, referir que nem todas as crianças dominavam o reconhecimento de pequenas quantidades sem contagem, evidenciando-se algumas dificuldades no grupo das crianças mais jovens. Mesmo assim, estas eram capazes de identificar as diferentes arrumações dos números 1, 2 e 3, o que vai ao encontro da ideia defendida por Laurence Rousselle e Maria-Pascale Noel [12], de que a competência de reconhecer pequenas quantidades sem contagem, especificamente para os números 1, 2 e 3, é "muito precoce e anterior à própria contagem" ([15], p. 27).

Ao longo das intervenções desenvolvidas, verificámos que as diversas situações de jogo permitiram que as crianças fossem de forma progressiva praticando e consolidando os conteúdos explorados, com clara evolução nas contagens, por intermédio da aplicação dos cinco princípios da contagem, e na ampliação do intervalo numérico, de 1 a 10, despertando de forma consistente para o sentido de número.

Neste enquadramento, todos os jogos mencionados demonstraram ser eficazes na promoção da motivação das crianças e na sua participação ativa. Além disso, estimularam o desenvolvimento do sentido de número, numa caminhada progressiva, pautada pela exploração de representações múltiplas [2] e pela mobilização da abordagem CPA [1] e de diferentes arrumações de estímulo à subitização, promovendo-se uma aprendizagem com compreensão [18]. Por tudo isto, concluímos que as dinâmicas de jogo introduzidas foram importantes instrumentos potenciadores de uma aprendizagem ativa e significativa.

Agradecimentos

O trabalho exposto neste artigo baseia-se numa parte do relatório de estágio "Jogar e compreender: o contributo dos jogos pedagógicos inspirados no Método de Singapura para o ensino e a aprendizagem da Matemática na Educação Pré-Escolar e 1.º Ciclo do Ensino Básico", desenvolvido no contexto do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico da Universidade dos Açores. Agradece-se, por isso, aos intervenientes no estágio pedagógico que decorreu na Educação Pré-Escolar, em particular às crianças e à educadora cooperante. Agradece-se, também, à Rute Pavão, pela elaboração do jogo "Qual é a minha metade?".

Referências

[1] Bruner, J. S. *Para uma Teoria da Educação* (Trad. M. Vaz), Relógio D'Água Editores, 1966.

[2] Dienes, Z. *Aprendizado Moderno de Matemática* (Trad. J. E. Fortes), Zahar Editores, 1970.

[3] Edge, D. "Teaching and Learning", in L. P. Yee, L. N. Hoe, *Teaching Primary School Mathematics: A Resource Book*, 2nd Edition, Singapore: McGraw-Hill, 35-53, 2009.

[4] Gelman, R., Gallistel, C. R. *The Child's Understanding of Number*, Harvard University Press, 1978.

[5] Grupo de Trabalho de Matemática. *Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática*, Ministério da Educação, 2019. Obtido em outubro de 2022 de `https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/recomendacoes_para_a_melhoria_das_aprendizagens_dos_alunos_em_matematica.pdf`.

[6] Hiratsuka, P. I. "A mudança da prática do professor e a construção do conhecimento matemático", *Cadernos dos núcleos de ensino da UNESP* 1, 182-189, 2006.

[7] Hoong, L. Y., Kin, H. W., Pien, C. L. "Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its Origins and Charting its Future", *The Mathematics Educator* 16 (1), 1-18, 2015.

[8] Lopes, A. V., Bernardes, A., Loureiro, C., Varandas, J., Oliveira, M. J., Delgado, M. J., Bastos, M., Graça, T. *Actividades matemáticas na sala de aula*, Texto Editora, 1990.

[9] Marcelino, L. "Aprendizagem da Matemática: despiste e intervenção preventiva em crianças do 1.º ano de escolaridade", *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 17, 51-63, 2021.

[10] Ministry of Education of Singapore. *Mathematics Syllabus: Primary One to Six*, Ministry of Education of Singapore, 2013. Obtido em outubro de 2022 de `https://www.moe.gov.sg/primary/curriculum/syllabus`

[11] Roberts, S. *Será o Mar o Meu Lugar?* (Ilust. H. Peck)., Booksmile, 2020.

[12] Rouselle, L., Noël, M. P., "The development of automatic numerosity processes in preschoolers: Evidence for numerosity-perceptual interference", *Developmental Psychology* 44 (2), 544-560, 2008.

[13] Santos, F. L. *A Matemática e o Jogo – Influência no rendimento escolar*, Dissertação de mestrado, Universidade Nova de Lisboa, 2008.

[14] Santos, C. P., Teixeira, R. C. "Propriedades e Critérios no Pré-Escolar", *Jornal das Primeiras Matemáticas* 3, 3-16, 2014.

[15] Santos, C. P., Teixeira, R. C. "Matemática na Educação Pré-Escolar: A Primeira Dezena", *Jornal das Primeiras Matemáticas* 3, 17-46, 2014.

[16] Santos, C. P., Teixeira, R. C. "Kindergarten Activities for Early Mathematics", In *Proceedings of Recreational Mathematics Colloquium IV* (pp. 49-77), Associação Ludus, 2016.

[17] Seto, C., Yuan, G. Y., Wan, T., Hui, C. S. "Concrete-Pictorial-Abstract Approach: Fostering Understanding in Mathematics", In N. H. Lee, C. Seto, R. A. Rahim, L. S. Tan (Ed.), *Mathematics Teaching in Singapore* (pp. 35-51), World Scientific, 2020.

[18] Skemp, R. *Mathematics in the Primary School*, Routledge, 1989.

[19] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2003 International Mathematics Report*, 2003. Obtido em outubro de 2022 de `http://timss.bc.edu/PDF/t03_download/T03INTLMATRPT.pdf`.

[20] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2007 International Mathematics Report*, 2007. Obtido em outubro de 2022 de `http://timss.bc.edu/TIMSS2007/PDF/TIMSS2007_InternationalMathematicsReport.pdf`.

[21] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*, 2011. Obtido em outubro de 2022 de `http://timss.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_FullBook.pdf`.

[22] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*, 2015. Obtido em outubro de 2022 de `http://timss2015.org/timss-2015/mathematics/student-achievement/`.

[23] TIMSS & PIRLS International Study Center. *TIMSS 2019 International Results in Mathematics*, 2019. Obtido em outubro de 2022 de `https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/`.

[24] Wassermann, S. *Brincadeiras sérias na Escola Primárica*, Instituto Piaget, 1990.

[25] Yee, L. P., Hoe, L. N. (Eds.) *Teaching Primary School Mathematics: A Resource Book*, 2nd Edition, McGraw-Hill, 2009.

Notícias

Pinóquio na cidade dos sólidos

Andreia Hall

CIDMA & DMat, Universidade de Aveiro, Portugal

andreia.hall@ua.pt

Resumo: *Nesta notícia, anuncia-se a publicação de um livro, Pinóquio na Cidade dos Sólidos, que é o segundo volume da coleção As Aventuras Matemáticas do Pinóquio, destinada a crianças dos 5 aos 11 anos. Nesta coleção pretende-se interligar a matemática com a literatura infantil e a ilustração, três áreas importantes no desenvolvimento das crianças. Este volume é dedicado à geometria espacial, em particular aos sólidos geométricos, que são apresentados através das formas dos edifícios de uma cidade especial, a Cidade dos Sólidos. Tal como no primeiro volume da coleção, duas aventuras inéditas seguidas de desafios matemáticos levam os leitores ou ouvintes a explorar a matemática duma forma original.*

Palavras-chave: Sólidos geométricos, literatura infantil, interdisciplinariedade.

As Aventuras Matemáticas do Pinóquio, Vol. 2

As Aventuras Matemáticas do Pinóquio são uma coleção de livros que pretende levar as crianças a explorar a matemática de uma forma divertida e integrada com atividades do seu dia a dia, em particular com o prazer de ouvir contar histórias, partindo duma recriação da bem conhecida personagem da literatura clássica infantil, o Pinóquio.

No primeiro volume, publicado em 2021 e descrito numa outra notícia do Jornal das Primeiras Matemáticas, é criado um novo Pinóquio, digital, feito em computador a partir de figuras planas. Tal como o boneco de madeira original de Carlo Collodi, também este novo Pinóquio aspira a transformar-se num menino de verdade. Por agora ele apenas quer ganhar volume já que está farto de ser constituído por figuras planas, sem volume. É assim que surge o segundo volume da coleção, intitulado *Pinóquio na Cidade dos Sólidos*, publicado em julho de 2022 pela editora Edições Esgotadas. Seguindo o formato do primeiro volume, o livro é constituído por duas histórias, *A Cidade dos Sólidos* e *As Fadas Soliboa e Solimá*, seguidas de propostas de atividades matemáticas. Da primeira à última página o livro foi cuidadosamente ilustrado com uma qualidade estética que se destaca. A Figura 1 contém uma imagem da capa do livro.

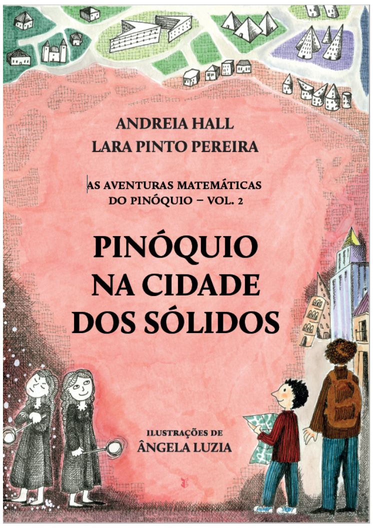
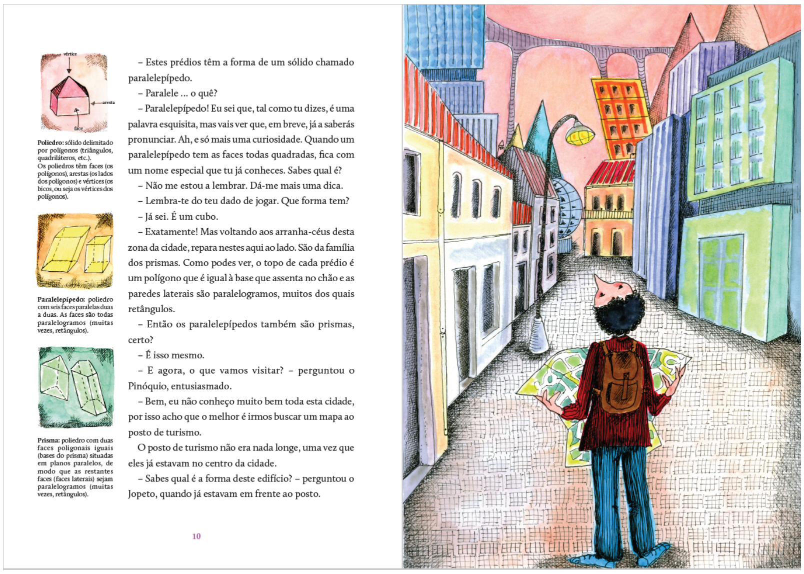


Figura 1: Capa do livro *Pinóquio na Cidade dos Sólidos*.

Na primeira história, o Pinóquio embarca numa excitante viagem à Cidade dos Sólidos onde fica a conhecer algumas famílias de sólidos geométricos e se vê envolvido numa aventura em busca de um tesouro. Tal como no primeiro volume, cada história é acompanhada com diversos tipos de ilustração (meia página, página inteira, apontamentos laterais) e todos os conceitos são explicados em apontamentos nas margens das folhas. A Figura 2 contém as páginas 10-11 do livro onde se pode ver o Pinóquio à chegada da Cidade dos Sólidos numa ilustração de página inteira bem como alguns apontamentos explicativos laterais sobre poliedros, paralelepípedos e prismas.



Poliedro: sólido delimitado por polígonos (triângulos, quadriláteros, etc.).
Os poliedros têm faces (os polígonos), arestas (os lados dos polígonos) e vértices (os bicos, ou seja os vértices dos polígonos).

Paralelepípedo: poliedro com seis faces paralelas duas a duas. As faces são todas paralelogramos (muitas vezes, retângulos).

Prisma: poliedro com duas faces poligonais iguais (bases do prisma) situadas em planos paralelos, de modo que as restantes faces (faces laterais) sejam paralelogramos (muitas vezes, retângulos).

– Estes prédios têm a forma de um sólido chamado paralelepípedo.

– Paralele ... o quê?

– Paralelepípedo! Eu sei que, tal como tu dizes, é uma palavra esquisita, mas vais ver que, em breve, já a saberás pronunciar. Ah, e só mais uma curiosidade. Quando um paralelepípedo tem as faces todas quadradas, fica com um nome especial que tu já conheces. Sabes qual é?

– Não me estou a lembrar. Dá-me mais uma dica.

– Lembra-te do teu dado de jogar. Que forma tem?

– Já sei. É um cubo.

– Exatamente! Mas voltando aos arranha-céus desta zona da cidade, repara nestes aqui ao lado. São da família dos prismas. Como podes ver, o topo de cada prédio é um polígono que é igual à base que assenta no chão e as paredes laterais são paralelogramos, muitos dos quais retângulos.

– Então os paralelepípedos também são prismas, certo?

– É isso mesmo.

– E agora, o que vamos visitar? – perguntou o Pinóquio, entusiasmado.

– Bem, eu não conheço muito bem toda esta cidade, por isso acho que o melhor é irmos buscar um mapa ao posto de turismo.

O posto de turismo não era nada longe, uma vez que eles já estavam no centro da cidade.

– Sabes qual é a forma deste edifício? – perguntou o Jopeto, quando já estavam em frente ao posto.

10

Figura 2: Páginas 10-11 do livro com a chegada à Cidade dos Sólidos e algumas notas explicativas laterais.

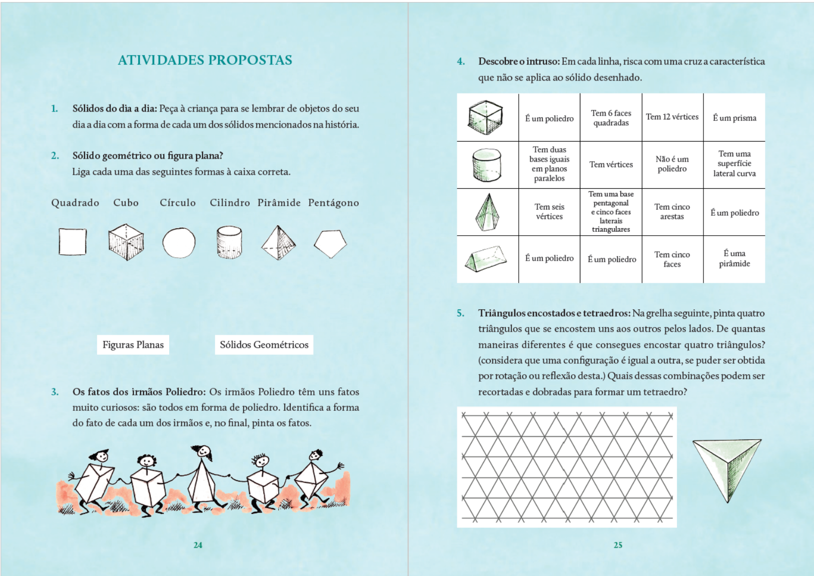
A segunda história é uma aventura que envolve duas irmãs fadas, a Soliboa e a Solimá. No seu tempo de aprendizes foram incumbidas de criar uma cidade de sólidos. Mas, como confundiram o conceito de sólido geométrico com o estado sólido da matéria, criaram cidades onde tudo estava no estado sólido, ou seja, fazia muito frio e toda a água estava na forma de gelo. Com muito esforço e dedicação conseguiram trazer o calor e a vida a uma das cidades. Agora aconteceu uma catástrofe: a cidade foi invadida por uma onda de frio e tudo congelou à sua volta. A sorte do Pinóquio foi não ser humano e apenas digital. Só assim pode salvar o seu pai Jopeto e toda a cidade. A Figura 3 mostra as páginas iniciais desta história.

Figura 3: Páginas 36-37 da história *As Fadas Soliboa e Solimá*.

Nesta história exploram-se temas que extrapolam a matemática: exploram-se emoções e relações humanas, explora-se a importância de reconhecer que errar é humano e que é importante dar uma segunda oportunidade para corrigirmos os nossos erros. Exploram-se também conceitos de outras ciências, nomeadamente os estados da matéria: estado sólido, estado líquido e estado gasoso. Os apontamentos explicativos destes conceitos encontram-se na Figura 4.

Figura 4: Apontamentos explicativos sobre os estados da matéria.

Tal como no primeiro volume das Aventuras Matemáticas do Pinóquio, no final de cada história encontra-se um conjunto de atividades/desafios matemáticos com diferentes graus de dificuldade e tipologia. As Figuras 5 e 6 mostram as páginas 24-25 e 40-41 com algumas das atividade propostas.



ATIVIDADES PROPOSTAS

1. **Sólidos do dia a dia:** Peça à criança para se lembrar de objetos do seu dia a dia com a forma de cada um dos sólidos mencionados na história.

2. **Sólido geométrico ou figura plana?**
Liga cada uma das seguintes formas à caixa correta.

Quadrado Cubo Círculo Cilindro Pirâmide Pentágono

Figuras Planas Sólidos Geométricos

3. **Os fatos dos irmãos Poliedro:** Os irmãos Poliedro têm uns fatos muito curiosos: são todos em forma de poliedro. Identifica a forma do fato de cada um dos irmãos e, no final, pinta os fatos.

24

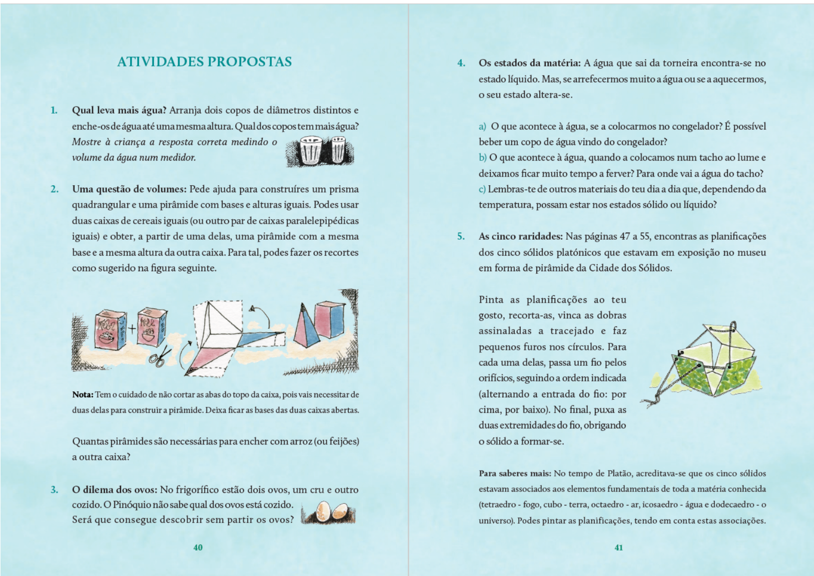
4. **Descobre o intruso:** Em cada linha, risca com uma cruz a característica que não se aplica ao sólido desenhado.

	É um poliedro	Tem 6 faces quadradas	Tem 12 vértices	É um prisma
	Tem duas bases iguais em planos paralelos	Tem vértices	Não é um poliedro	Tem uma superfície lateral curva
	Tem seis vértices	Tem uma base pentagonal e cinco faces laterais triangulares	Tem cinco arestas	É um poliedro
	É um poliedro	É um poliedro	Tem cinco faces	É uma pirâmide

5. **Triângulos encostados e tetraedros:** Na grelha seguinte, pinta quatro triângulos que se encostem uns aos outros pelos lados. De quantas maneiras diferentes é que consegues encostar quatro triângulos? (considera que uma configuração é igual a outra, se puder ser obtida por rotação ou reflexão desta.) Quais dessas combinações podem ser recortadas e dobradas para formar um tetraedro?

25

Figura 5: Páginas 24-25 com propostas de atividades.



ATIVIDADES PROPOSTAS

1. **Qual leva mais água?** Arranja dois copos de diâmetros distintos e enche-os de água até uma mesma altura. Qual dos copos tem mais água? *Mostre à criança a resposta correta medindo o volume da água num medidor.*

2. **Uma questão de volumes:** Pede ajuda para construíres um prisma quadrangular e uma pirâmide com bases e alturas iguais. Podes usar duas caixas de cereais iguais (ou outro par de caixas paralelepipédicas iguais) e obter, a partir de uma delas, uma pirâmide com a mesma base e a mesma altura da outra caixa. Para tal, podes fazer os recortes como sugerido na figura seguinte.

Nota: Tem o cuidado de não cortar as abas do topo da caixa, pois vais necessitar de duas delas para construir a pirâmide. Deixa ficar as bases das duas caixas abertas.

Quantas pirâmides são necessárias para encher com arroz (ou feijões) a outra caixa?

3. **O dilema dos ovos:** No frigorífico estão dois ovos, um cru e outro cozido. O Pinóquio não sabe qual dos ovos está cozido. Será que consegue descobrir sem partir os ovos?

40

4. **Os estados da matéria:** A água que sai da torneira encontra-se no estado líquido. Mas, se arrefecermos muito a água ou se a aquecermos, o seu estado altera-se.

a) O que acontece à água, se a colocarmos no congelador? É possível beber um copo de água vindo do congelador?
b) O que acontece à água, quando a colocamos num tacho ao lume e deixamos ficar muito tempo a ferver? Para onde vai a água do tacho?
c) Lembras-te de outros materiais do teu dia a dia que, dependendo da temperatura, possam estar nos estados sólido ou líquido?

5. **As cinco raridades:** Nas páginas 47 a 55, encontras as planificações dos cinco sólidos platónicos que estavam em exposição no museu em forma de pirâmide da Cidade dos Sólidos.

Pinta as planificações ao teu gosto, recorta-as, vinca as dobras assinaladas a tracejado e faz pequenos furos nos círculos. Para cada uma delas, passa um fio pelos orifícios, seguindo a ordem indicada (alternando a entrada do fio: por cima, por baixo). No final, puxa as duas extremidades do fio, obrigando o sólido a formar-se.

Para saberes mais: No tempo de Platão, acreditava-se que os cinco sólidos estavam associados aos elementos fundamentais de toda a matéria conhecida (tetraedro - fogo, cubo - terra, octaedro - ar, icosaedro - água e dodecaedro - o universo). Podes pintar as planificações, tendo em conta estas associações.

41

Figura 6: Páginas 40-41 com propostas de atividades.

Pinóquio na Cidade dos Sólidos foi um grande desafio de ilustração. Desenhar no papel uma cidade tridimensional com edifícios invulgares de forma a serem notórias as diferenças entre as diferentes famílias de sólidos, incluindo versões retas e oblíquas, regulares e não regulares, convexas e côncavas, foi um desafio enorme para a ilustradora. O resultado superou as expectativas das autoras. Para terminar apresentamos a ilustração fantástica do mapa da Cidade dos Sólidos usado para as guardas do livro (Figura 7).

Figura 7: Guardas do livro Pinóquio na Cidade dos Sólidos.

Tal como o primeiro volume da coleção, este segundo volume foi escrito pelas autoras, Andreia Hall e Lara Pinto Pereira, e ilustrado por Ângela Luzia. Ambos os volumes têm tido muito boa recetividade do público. Em novembro de 2022 foi já publicada a oitava edição do primeiro volume, *Pinóquio no Bosque das Figuras Planas*, e a quarta edição do segundo volume, *Pinóquio na Cidade dos Sólidos*.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia, pelos projetos UIDB/04106/2020 e UIDP/04106/2020 do Centro de Investigação de Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA).

Ludus

Problemas e Desafios

PROBLEMAS DOS NOSSOS AVÓS (17)

Hélder Pinto, Ângelo Silva
Instituto Piaget, RECI & CIDMA - Universidade de Aveiro,
Instituto Piaget
helder.pinto@ipiaget.pt, angelo.silva@ipiaget.pt

Resumo: *Nesta secção do Jornal das Primeiras Matemáticas apresentam-se regularmente alguns problemas de matemática de livros escolares portugueses do passado.*

Palavras-chave: manuais de matemática antigos, problemas de matemática elementar.

Preâmbulo

Os problemas escolares utilizados no ensino da Matemática, em particular no ensino elementar, têm sofrido algumas alterações ao longo dos tempos. Muitas vezes a diferença não está nos conteúdos – pois as matérias básicas como a aritmética e a geometria, de grosso modo, mantém-se as mesmas – mas sim na forma e no contexto com que estes problemas são apresentados.

Nesta secção do *Jornal das Primeiras Matemáticas* apresentaremos regularmente alguns problemas de matemática que foram publicados em livros escolares portugueses do passado. Contaremos com a colaboração dos nossos leitores, que poderão fazer-nos chegar cópias de problemas antigos que considerem interessantes através do e-mail hbmpinto1981@gmail.com.

Compêndio de Álgebra (1.º tomo, 6.º ano)

Neste número apresentamos o "Compêndio de Álgebra" (Figura), 1.º tomo, 6.º ano, da autoria do Professor Sebastião e Silva (Catedrático da Faculdade de Ciências de Lisboa) e do Professor Silva Paulo (Professor Efetivo do Liceu Nacional de Oeiras), publicado pela Livraria Cruz de Braga. Note-se que este livro foi aprovado em 1968 como livro único (o exemplar aqui apresentado está carimbado e apresenta o número 20183).

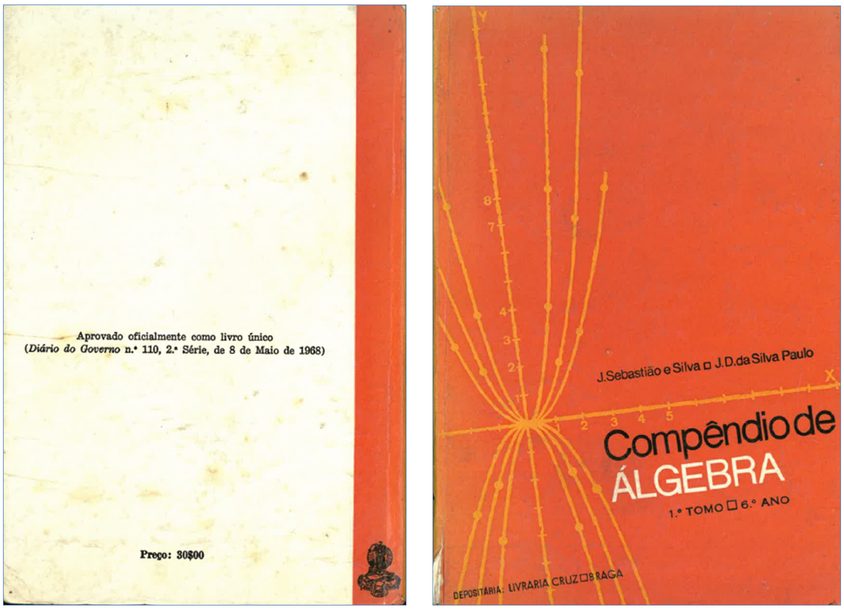
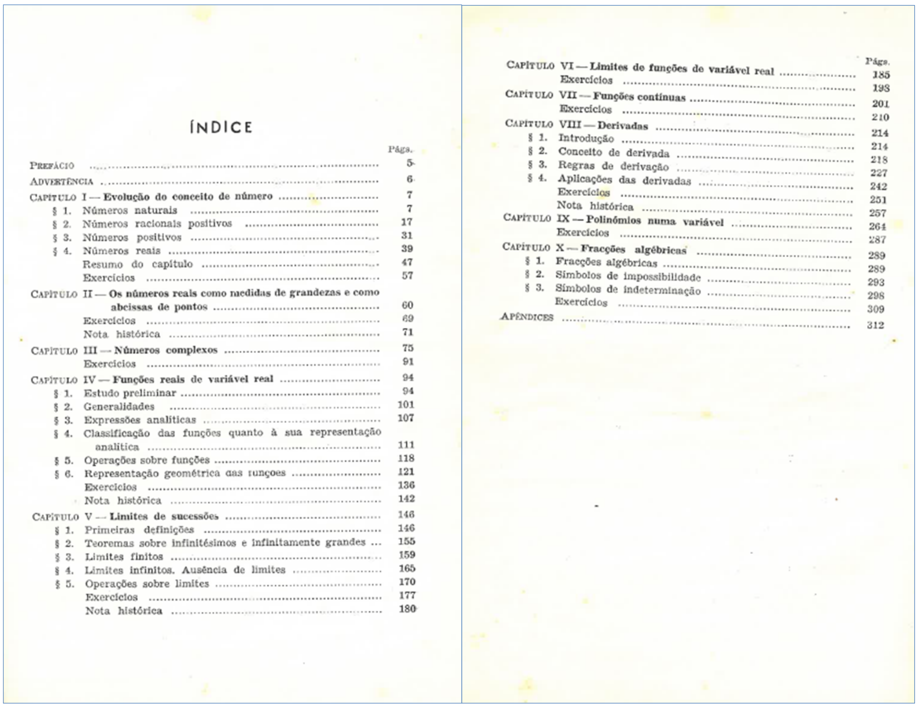


Figura 1: Capa e Contracapa de [1].

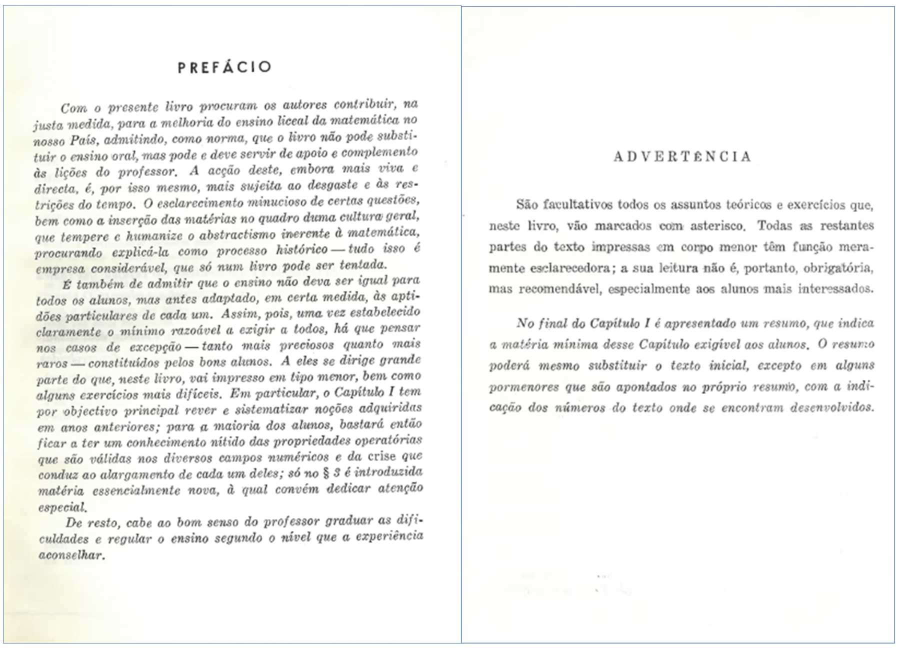
Este livro foi publicado em 1968 e destinava-se ao antigo 6.º ano de escolaridade do ensino liceal (atual 10.º ano). Este compêndio abarca uma grande variedade de temas de Álgebra (Figura 2), apresentando várias partes de texto cuja leitura não era "obrigatória, mas recomendável, especialmente aos alunos mais interessados" (Figura 3). No Prefácio fala-se ainda no "mínimo razoável a exigir a todos [os alunos]" (um pouco à imagem das atuais aprendizagens essenciais atuais. . .) e que, depois disso, "há que pensar nos casos de excepção constituídos pelos bons alunos". Saliente-se ainda a autonomia dada aos professores: "cabe ao bom senso do professor graduar as dificuldades e regular o ensino segundo o nível que a experiência aconselhar".

As partes de texto não obrigatórias eram apresentadas com um tamanho de letra menor, apresentando, muitas vezes, enunciados de exercícios mais complexos, demonstrações matemáticas, bem como extensas notas históricas. Nas imagens que se seguem iremos reproduzir a maioria dessas notas históricas, uma vez que a sua extensão e profundidade de conteúdos não era usual em manuais escolares desta natureza (por exemplo, são apresentados detalhadamente, os famosos paradoxos de Zenão, Figura 11).



ÍNDICE

Figura 2: Índice de [1], pp. 315-316.



PREFÁCIO

Com o presente livro procuram os autores contribuir, na justa medida, para a melhoria do ensino liceal da matemática no nosso País, admitindo, como norma, que o livro não pode substituir o ensino oral, mas pode e deve servir de apoio e complemento às lições do professor. A acção deste, embora mais viva e directa, é, por isso mesmo, mais sujeita ao desgaste e às restrições do tempo. O esclarecimento minucioso de certas questões, bem como a inserção das matérias no quadro duma cultura geral, que tempere e humanize o abstractismo inerente à matemática, procurando explicá-la como processo histórico — tudo isso é empresa considerável, que só num livro pode ser tentada.

É também de admitir que o ensino não deva ser igual para todos os alunos, mas antes adaptado, em certa medida, às aptidões particulares de cada um. Assim, pois, uma vez estabelecido claramente o mínimo razoável a exigir a todos, há que pensar nos casos de excepção — tanto mais preciosos quanto mais raros — constituídos pelos bons alunos. A eles se dirige grande parte do que, neste livro, vai impresso em tipo menor, bem como alguns exercícios mais difíceis. Em particular, o Capítulo I tem por objectivo principal rever e sistematizar noções adquiridas em anos anteriores; para a maioria dos alunos, bastará então ficar a ter um conhecimento nítido das propriedades operatórias que são válidas nos diversos campos numéricos e da crise que conduz ao alargamento de cada um deles; só no § 3 é introduzida matéria essencialmente nova, à qual convém dedicar atenção especial.

De resto, cabe ao bom senso do professor graduar as dificuldades e regular o ensino segundo o nível que a experiência aconselhar.

ADVERTÊNCIA

São facultativos todos os assuntos teóricos e exercícios que, neste livro, vão marcados com asterisco. Todas as restantes partes do texto impressas em corpo menor têm função meramente esclarecedora; a sua leitura não é, portanto, obrigatória, mas recomendável, especialmente aos alunos mais interessados.

No final do Capítulo I é apresentado um resumo, que indica a matéria mínima desse Capítulo exigível aos alunos. O resumo poderá mesmo substituir o texto inicial, excepto em alguns pormenores que são apontados no próprio resumo, com a indicação dos números do texto onde se encontram desenvolvidos.

Figura 3: Prefácio e Advertência de [1], pp. 5-6.

Capítulo I. Evolução do conceito de número

(Do número natural ao número real)

A noção de número desempenha um papel fundamental na civilização moderna. Não seria possível construir um navio, um automóvel, um avião, uma ponte, um edifício ou mesmo objectos vários de uso comum; não seriam possíveis viagens marítimas ou aéreas, instalações de electricidade, telégrafo ou telefones, produções industriais ou melhoramentos agrícolas, etc., etc. — sem efectuar contagens, medições e cálculos, por vezes longos e complicadíssimos. Todo o movimento económico de uma nação, até nos mínimos pormenores, é traduzido e regulado por meio de números. À nossa volta encontramos os mais variados instrumentos de medição, pelos quais a nossa vida é pautada: o relógio, a fita métrica, a balança, o contador da água, do gás ou da electricidade, etc., etc.

As ciências mais avançadas são precisamente aquelas que mais empregam a linguagem dos números. De resto, a matemática está a tornar-se cada vez mais necessária em todas as ciências da natureza, puras e aplicadas (desde a física à biologia), bem como nas ciências sociais (economia, finanças, etc.). Até na psicologia tem sido utilizada com êxito.

Mas o conceito de número, tal como hoje se apresenta, é apenas fase de uma evolução que tem durado milénios. Entre a atitude mental do pastor, que amontoa seixos para saber quantas ovelhas tem no rebanho, e a do matemático, que demonstra a irracionalidade do número π, medeiam muitos séculos de história. Vamos aqui recordar como o conceito de número aparece e é sucessivamente alargado, para corresponder às necessidades da ciência pura e da técnica.

§ 1. NÚMEROS NATURAIS

(1.ª forma do conceito de número)

1. **Número de elementos de um conjunto.** — No contacto com a natureza, o homem é levado a considerar vários *conjuntos de seres materiais:* conjuntos de árvores, conjuntos de ovelhas,

Figura 4: [1], p. 7.

Em vez de tomar para unidade um comprimento U positivo, poderia tomar-se um comprimento negativo: isso equivaleria a mudar a orientação da recta.

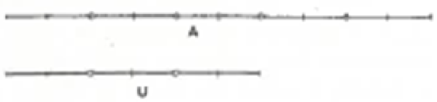
Chama-se *referencial*, numa recta orientada, o sistema constituído por um ponto O, tomado como origem, e por um comprimento U não nulo, tomado como unidade. É claro que, mudando o referencial, muda geralmente a abcissa dum ponto.

O que acaba de ser dito para pontos duma recta aplica-*mutatis mutandis*, a instantes, a temperaturas, etc. (ver exercios 4 a 7).

5. **Grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis** (¹). — Costuma dizer-se que uma grandeza A é *comensurável* com outra grandeza U da mesma espécie (não nula), se a medida de A em relação a U é um número racional; caso contrário, diz-se que A é *incomensurável* com U.

Etimològicamente, «incomensurável com U» significa «que não se pode medir com U». A razão histórica da escolha deste termo encontra-se no facto de não se ter admitido inicialmente a existência dos números irracionais, que depois também foram chamados «números inexprimíveis», «números surdos», etc. (ver NOTA HISTÓRICA no final do capítulo).

Por exemplo, na figura junta os dois comprimentos A e U representados por segmentos de recta são *comensuráveis entre si*, visto que a razão A/U é o número racional 5/3 que também se pode representar por 10/6, por 20/12, etc., ou mesmo pela dízima infinita *periódica* 1,(6):



$$\frac{A}{U} = \frac{5}{3} = \frac{10}{6} = 1{,}66\ldots6\ldots$$

Na prática, as medidas das grandezas são sempre aproximadas, e nem sequer faz sentido falar de «medida exacta» duma grandeza. Nestas con-

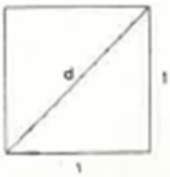
(¹) A leitura deste número tem especial interesse para a cultura geral do aluno. O assunto aqui tratado liga-se directamente ao da NOTA HISTÓRICA, cuja leitura é igualmente recomendável, por idênticas razões.

Figura 5: [1], p. 67.

68 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

dições, os números irracionais não chegam a ser pràticamente necessários: seria insensato dizer, por exemplo, que a medida da massa deste livro em gramas é um número irracional (afirmação que não é verdadeira nem falsa, mas apenas destituída de sentido).

É ùnicamente em assuntos teóricos, por exemplo em geometria, que somos levados a admitir a existência dos números irracionais para poder demonstrar com rigor e comodidade vários teoremas importantes. A ausência do conceito de número irracional daria então origem a enormes dificuldades.



Assim, em geometria euclidiana, a diagonal dum quadrado é incomensurável com o lado do mesmo. Com efeito, se representarmos por d a medida da diagonal, tomando para unidade o lado, tem-se, segundo o TEOREMA DE PITÁGORAS:

$$1^2 + 1^2 = d^2 \quad \text{donde} \quad d = \sqrt{2}$$

e já sabemos que $\sqrt{2}$ é um número irracional. *Foi este mesmo o primeiro caso que se conheceu de grandezas incomensuráveis* (ver NOTA HISTÓRICA).

Anàlogamente, a medida do comprimento duma circunferência qualquer, tomando para unidade o diâmetro, é o número irracional π, que está calculado com mais de 10 000 decimais. Indicamo-lo a seguir com 50 decimais:

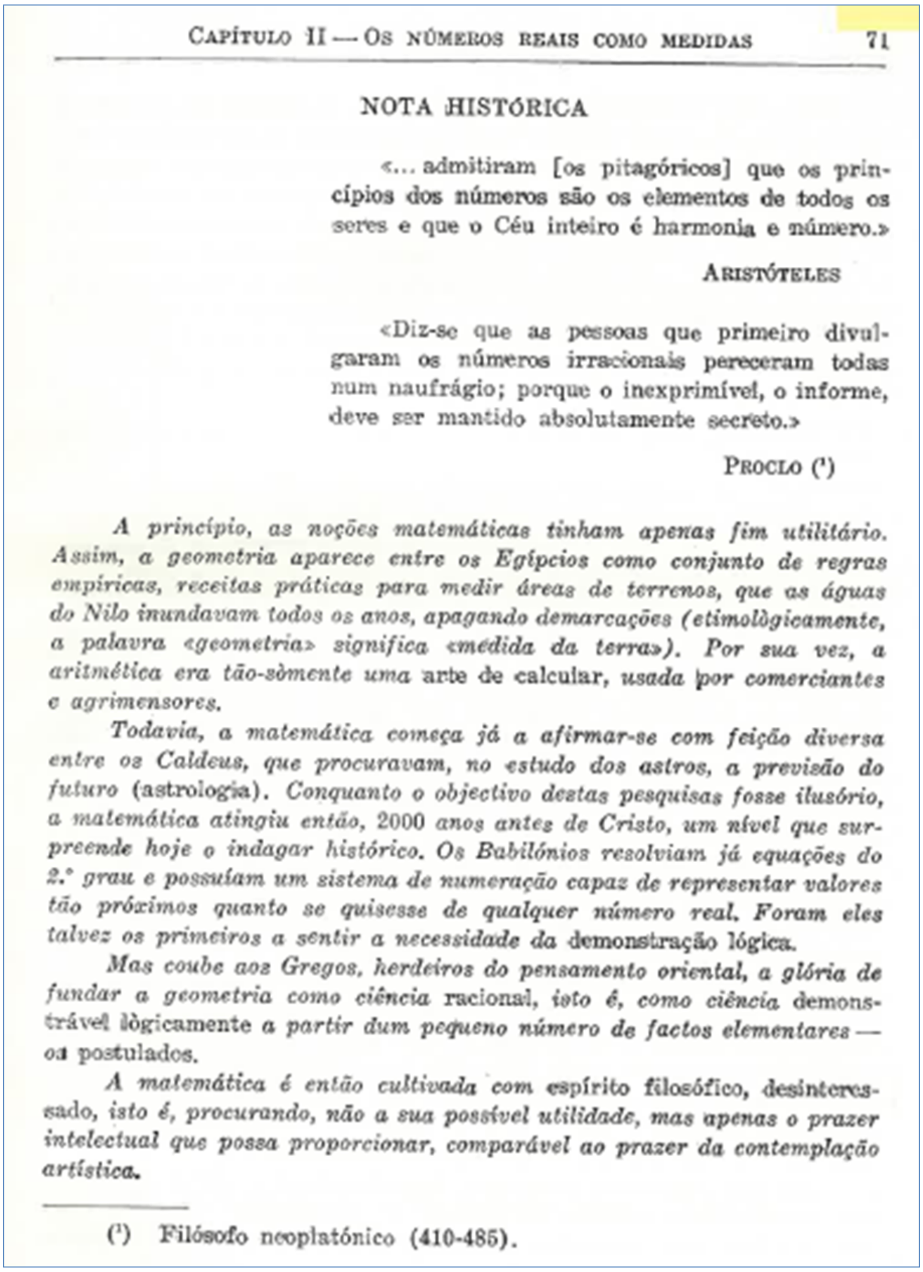
$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433$$
$$83279\ 50288\ 51991\ 69399\ 32510$$

NOTA — Na prática não será necessário, geralmente, utilizar mais de 4 algarismos decimais de π. Com 16 decimais, obtém-se, a menos da espessura dum cabelo, o comprimento duma circunferência de raio igual à distância média da Terra ao Sol!

Segundo parece, o que levava inicialmente os calculadores a determinar muitos algarismos decimais de π era a esperança de encontrar um período e, portanto, uma expressão exacta, fraccionária, daquele número. Mas esta esperança desvaneceu-se, depois que, em 1770, o suíço J. H. LAMBERT demonstrou que π é um número irracional.

O cálculo de π com 10 000 decimais foi feito em 1950 na Universidade de Harvard (Estados Unidos), usando a potentíssima máquina electrónica de calcular ENIAC, que esteve ao serviço daquela Universidade, para o cálculo de π e de outras constantes necessárias em questões teóricas e práticas da matemática. Antes disso, o número π estava calculado com 707 decimais, e depois disso já foi calculado com maior número de decimais.

Figura 6: [1], p. 68.



CAPÍTULO II — OS NÚMEROS REAIS COMO MEDIDAS 71

NOTA HISTÓRICA

«... admitiram [os pitagóricos] que os princípios dos números são os elementos de todos os seres e que o Céu inteiro é harmonia e número.»

ARISTÓTELES

«Diz-se que as pessoas que primeiro divulgaram os números irracionais pereceram todas num naufrágio; porque o inexprimível, o informe, deve ser mantido absolutamente secreto.»

PROCLO (¹)

A princípio, as noções matemáticas tinham apenas fim utilitário. Assim, a geometria aparece entre os Egípcios como conjunto de regras empíricas, receitas práticas para medir áreas de terrenos, que as águas do Nilo inundavam todos os anos, apagando demarcações (etimològicamente, a palavra «geometria» significa «medida da terra»). Por sua vez, a aritmética era tão-sòmente uma arte de calcular, *usada por comerciantes e agrimensores.*

Todavia, a matemática começa já a afirmar-se com feição diversa entre os Caldeus, que procuravam, no estudo dos astros, a previsão do futuro (astrologia). *Conquanto o objectivo destas pesquisas fosse ilusório, a matemática atingiu então, 2000 anos antes de Cristo, um nível que surpreende hoje o indagar histórico. Os Babilónios resolviam já equações do 2.° grau e possuíam um sistema de numeração capaz de representar valores tão próximos quanto se quisesse de qualquer número real. Foram eles talvez os primeiros a sentir a necessidade da* demonstração lógica.

Mas coube aos Gregos, herdeiros do pensamento oriental, a glória de fundar a geometria como ciência racional, *isto é, como ciência* demonstrável lògicamente *a partir dum pequeno número de factos elementares —* os postulados.

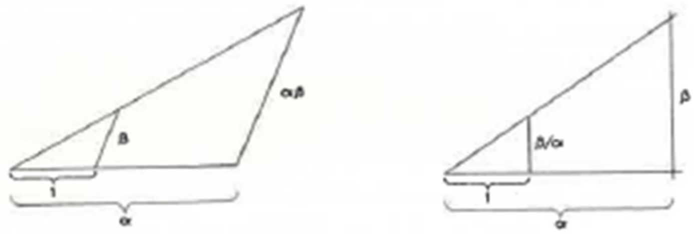
A matemática é então cultivada com espírito filosófico, desinteressado, *isto é, procurando, não a sua possível utilidade, mas apenas o prazer intelectual que possa proporcionar, comparável ao prazer da contemplação artística.*

(¹) Filósofo neoplatónico (410-485).

Figura 7: [1], p. 71.

72 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

Chegaram os Gregos a construir uma teoria geométrica *das grandezas, mas dela não souberam destacar uma correspondente teoria* aritmética *dos números reais. Por isso, tanto nos raciocínios como nos cálculos, representavam os números por segmentos de recta, escolhendo um destes para unidade. Assim, a adição e a subtracção de números reduziam-se à adição e à subtracção dos respectivos segmentos representativos. A multiplicação e a divisão podiam ser efectuadas segundo o teorema de* TALES, *como se indica nas figuras.*



A descoberta das grandezas incomensuráveis é um momento dramático na evolução desta teoria.

No século VI antes de Cristo, floresceu no Sul da Itália uma seita grega, de carácter científico-religioso, a que se chamou escola pitagórica, *por ter sido fundada, ao que parece, pelo filósofo* PITÁGORAS, *da ilha de Samos, personagem um tanto misteriosa, envolvida nas brumas da lenda. Pretendiam os pitagóricos explicar tudo por meio dos números — a começar pela música, cuja teoria lhes é, em parte, devida. É então que aparece, pela primeira vez, o termo «matemática» (em grego τὰ μαθηματικά, de μάθημα, «ensino»), usada como sinómio de «ciência racional». Os pitagóricos rendiam verdadeiro culto místico ao número* natural, *considerando-o como a essência de todas as coisas. Assim, admitiam que toda a figura fosse formada por um número* finito *de pontos, sendo estes pensados como ínfimos corpúsculos, todos iguais entre si* (átomos ou mónadas). *Daqui resultava que dois comprimentos seriam sempre grandezas comensuráveis; com efeito, sendo um segmento formado por* m *mónadas e outro por* n *mónadas, a razão entre o primeiro e o segundo seria* m/n. *Mas é o próprio teorema do quadrado da hipotenusa, atribuído a* PITÁGORAS, *que vem demolir esta doutrina, permitindo demonstrar que o lado do quadrado é incomensurável com a diagonal (ou seja que $\sqrt{2}$ é um número irracional).*

Eis aqui o momento dramático. Esta descoberta — que é, afinal, um dos acontecimentos capitais da história do pensamento — foi tida como um escândalo, uma calamidade, pelos seus próprios autores, que tentaram

Figura 8: [1], p. 72.

CAPÍTULO II — OS NÚMEROS REAIS COMO MEDIDAS 73

ocultá-la, convencidos de que os deuses os castigariam severamente, se eles divulgassem o que lhes parecia uma imperfeição da obra divina. O certo é que a teoria geométrica *das mónadas estava, então, condenada. Em seu lugar triunfa a teoria dos* filósofos de Eleia *(colónia grega no Sul da Itália), que concebiam o espaço como um* todo contínuo. *Estas duas concepções opostas são depois, em parte, conciliadas pela teoria de* DEMÓCRITO, *que se pode traduzir nestes termos: uma coisa é a matéria, outra coisa é o espaço em que se move a matéria; o espaço é contínuo, mas a matéria é discreta, formada por átomos* (1).

Porém a matemática grega ficou sempre subordinada à geometria. Para a criação da aritmética e da álgebra foi necessário, novamente, pôr de lado preocupações de rigor lógico e visar objectivos práticos, concretos. Assim procederam os Indianos — inventores do sistema de numeração decimal —, que, em cálculos audaciosos, não justificados, manejaram decididamente, e com êxito, os radicais e os números negativos. Mas tornava-se necessário, depois disso, legitimar os novos métodos.

Dum modo geral, todas as vezes que as necessidades do cálculo levavam a ampliar o campo dos números existentes, introduzindo novos entes numéricos, estes eram olhados com extrema desconfiança, que se reflectia nas curiosas designações atribuídas a esses entes. Assim, os irracionais foram denominados «números inexprimíveis», «números incalculáveis», «números surdos», etc. (ainda hoje, em inglês, se diz «surd roots». Depois, os números negativos, que a teoria das equações algébricas tornava cada vez mais inevitáveis, foram chamados «absurdos», «falsos», «fingidos», etc. Depois ainda, a mesma teoria das equações obrigou a introduzir os números imaginários, *de que trataremos no capítulo seguinte, e que também se chamaram «números impossíveis», «números quiméricos», etc.*

Durante muitos séculos não foi possível conceber os números fraccionários, os irracionais, etc., senão como medidas de grandezas. Só em fins do século passado, principalmente por obra dos matemáticos alemães DEDEKIND *e* CANTOR, *se pôde construir uma teoria rigorosa dos números reais, independente da geometria e da física.*

Note-se que, no estudo dos números, interessa muito menos ao matemático a maneira de efectuar os cálculos, do que o conjunto das propriedades gerais das operações. São estas propriedades que formam a essência da álgebra.

---

(1) Actualmente, no campo da física, torna a debater-se o problema da dualidade *discreto-contínuo.*

Figura 9: [1], p. 73.

COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

NOTA HISTÓRICA

«Oh cousas todas vãs, todas mudaves,
Qual é o coração que em vós confia?»

SÁ DE MIRANDA

Para nos guiar no mundo instável em que vivemos, a nossa razão (1) *precisa de se apoiar em certos princípios lógicos. Um deles é o* **princípio da não contradição,** *que se pode enunciar do seguinte modo:*

«Uma coisa não pode ter e não ter, ao mesmo tempo, uma mesma propriedade.»

Por exemplo, se dissermos que uma certa figura é quadrada e não é quadrada, *que um dado comprimento* mede 5 cm e não mede 5 cm, *etc., estamos a enunciar factos* contraditórios, *logo* impossíveis *à luz da razão. Se estivéssemos sempre assim a contradizer-nos, a linguagem seria mais do que inútil, nociva, e o homem desceria à condição de* irracional.

E todavia, no mundo que nos rodeia, nenhuma figura é (exactamente) quadrada, nenhum comprimento mede (exactamente) 5 cm. *Mais ainda, as propriedades dos corpos estão sempre a mudar e portanto a desdizerem-nos — de tal modo que, quando acabamos de afirmar* «a temperatura deste corpo é inferior a 20°», *já a temperatura do mesmo pode ter subido a mais de* 30°, *e, enquanto dizemos* «são agora 5 horas», *decorre ao menos um segundo. Este* «*constante mudar*» *da natureza, estas suas aparentes contradições, têm fornecido assunto inesgotável a poetas e filósofos.*

Na Grécia antiga defrontam-se, a princípio, duas correntes opostas, igualmente exageradas e exclusivistas nas suas afirmações. Dum lado estão os filósofos que podemos chamar empiristas (2). *Segundo estes,* a

(1) A palavra «razão» é aqui usada no sentido de «faculdade de conhecer e raciocinar». Recordemos que o homem se diz «animal racional» por ser dotado do uso da razão.

(2) Chama-se «empirismo», dum modo geral, ao uso da experiência, sem teoria ou raciocínio. Mas note-se que, além da razão e da experiência, há uma fonte directa de conhecimento — *a intuição* — que leva, por exemplo, o matemático a *pressentir* as verdades, ainda antes de as demonstrar.

Figura 10: [1], p. 142.

realidade é mudança, movimento, vida — *uma série de situações sempre novas, sempre diversas, que nenhuma regra ou teoria é capaz de traduzir: o mundo é pois* ininteligível. *Este ponto de vista ficou bem expresso na célebre imagem de* HERACLITO, o CONFUSO *(576-480 a. C.):*

«Tu não podes banhar-te duas vezes no mesmo rio; porque sempre novas águas correm sobre ti.»

E assim a realidade é como o fluir *de um rio, que está sempre a não ser o que há bem pouco ainda era (ou parecia ser).*

Do outro lado estão os filósofos racionalistas, *entre os quais figuram os pitagóricos e os eleatas (filósofos da escola de Eleia)* (1). *Para estes,* realidade é o que permanece, o que não muda: é o Ser, não o Variar. *A mudança, dizem eles, é contraditória, incompreensível — logo aparência, ilusão dos sentidos. E, se os seres particulares parecem mudar, o universo, como um todo, é imóvel, imutável, eterno — logo* inteligível, *logo* real. *Ficaram célebres os* **paradoxos do movimento** (2), *com os quais* ZENÃO *de Eleia desconcertou os filósofos de Atenas e provocou discussões durante séculos. Citaremos três desses argumentos:*

1) **Paradoxo da dicotomia.** *Tudo o que se move deve atingir metade do percurso, antes de chegar ao fim; e, ainda antes do meio, deve atingir um quarto, e antes de um quarto, um oitavo, e assim sucessivamente, sem mais acabar. Logo o movimento não chega a realizar-se, ao contrário do que parece.*

2) Paradoxo de «Aquiles e a tartaruga». *Aquiles corre para apanhar uma tartaruga que se afasta dele; mas quando chega ao lugar donde parte a tartaruga, já esta lá não está. A distância que os separa é agora mais pequena, mas enquanto Aquiles a percorre, também a tartaruga se desloca; e assim sucessivamente,* ao infinito. *Logo Aquiles, embora caminhando mais depressa, nunca pode atingir a tartaruga, ao contrário do que parece acontecer.*

3) Paradoxo da seta. *Lançada dum arco, uma seta fica imóvel em cada instante, pois que, de contrário, ocuparia várias posições num instante, o que é impossível. Ora o tempo é feito de instantes. Logo a seta ficará sempre imóvel, contràriamente ao que se observa.*

(Veremos mais adiante como, em matemática, se evitam estes paradoxos).

(1) Ver NOTA HISTÓRICA do Cap. II.
(2) Paradoxo = opinião contrária à comum.

Figura 11: [1], p. 143.

O racionalismo grego encontra a sua expressão apurada no **platonismo.** *Segundo* PLATÃO, *há duas formas de realidade: a* realidade sensível *ou* mundo dos fenómenos, *que nós conhecemos por intermédio dos nossos sentidos, e a* realidade inteligível *ou* mundo das Ideias, *que nós contemplamos por intermédio da razão. A primeira, mutável e imperfeita, seria apenas representação grosseira da segunda, que é a autêntica realidade, isenta de contradição — perfeita, incorruptível, eterna. Segundo esta doutrina, os conceitos matemáticos, relativos a números e a figuras geométricas, são seres do mundo inteligível: assim, por exemplo, os triângulos, que nós* vemos *e* desenhamos, *são apenas imagens toscas do verdadeiro* Triângulo, *que nós* idealizamos. *(Toda a matemática está, ainda hoje mais ou menos impregnada de platonismo).*

Finalmente ARISTÓTELES, *um dos espíritos mais amplos e equilibrados de todos os tempos* (¹), *procurou conciliar o racional e o empírico, o abstracto e o concreto, a teoria e a prática — como único meio para atingir o conhecimento científico. Todavia, a ciência grega, em parte paralisada pela crítica eleática, ficou reduzida a ciência do repouso e do equilíbrio:* geometria *e* estática.

Só em fins do século XVI, princípios do século XVII, com os trabalhos de KEPLER *sobre o movimento dos planetas e os de* GALILEU *relativos à queda dos graves, a matemática começa a ser aplicada com êxito ao estudo dos movimentos* (cinemática *e* dinâmica). *Mas a matemática dessa época difere já muito da geometria helénica: é a* análise matemática que surge agora, baseada no conceito de função. *Os seres materiais dão-se-nos a conhecer pelas suas variações, impressionando os nossos sentidos; mas também não seria possível conhecê-los, se nessas variações não houvesse uma* lei — *isto é, uma propriedade ou uma relação sensìvelmente constante. Ora as leis dos fenómenos são expressas por funções.* **São pois os conceitos matemáticos de variável e de função que permitem, à razão humana, interpretar o movimento e, dum modo geral, os fenómenos naturais.**

A partir desse momento, os fenómenos são submetidos ao cálculo e ao raciocínio. E começa uma nova era da ciência, que se prolonga até fins do século passado. Consegue-se então, por exemplo, prever com grande antecedência e precisão o movimento dum astro. Mas os êxitos assim alcançados pelo método matemático inebriam os cientistas: chega a admitir-se a

(¹) ARISTÓTELES (384-322 a. C.) foi discípulo de PLATÃO (429--347 a. C.), assim como este tinha sido discípulo de SÓCRATES (470-399 a. C).

Figura 12: [1], p. 144.

possibilidade duma fórmula universal, *que permita prever todo o futuro do universo. Nesta crença consiste o* determinismo absoluto, *forma exagerada de racionalismo — cujo extremo oposto é o empirismo absoluto ou* cepticismo.

A atitude do homem de ciência tornou-se mais comedida, especialmente ao abordar o estudo do átomo. É no equilíbrio sensato das duas tendências do nosso espírito — a racionalista e a empirista — que parece estar sempre o bom caminho. As leis naturais, expressas por meio de fórmulas, têm carácter aproximativo, contingente. Não podemos ter a pretensão de traduzir na simplicidade duma fórmula a infinita complexidade do real concreto. Não podemos pretender que o retrato seja uma cópia exacta e perfeita do original. As teorias científicas (a começar pela geometria) são apenas esquemas lógicos, *isto é, descrições simplificadas do mundo empírico, isentas de contradições internas. As contradições surgem sòmente quando a teoria está em desacordo com a prática, o que leva a aperfeiçoar a teoria, tornando-a mais* próxima *da realidade. É assim,* por aproximações sucessivas, *que a ciência parece progredir.*

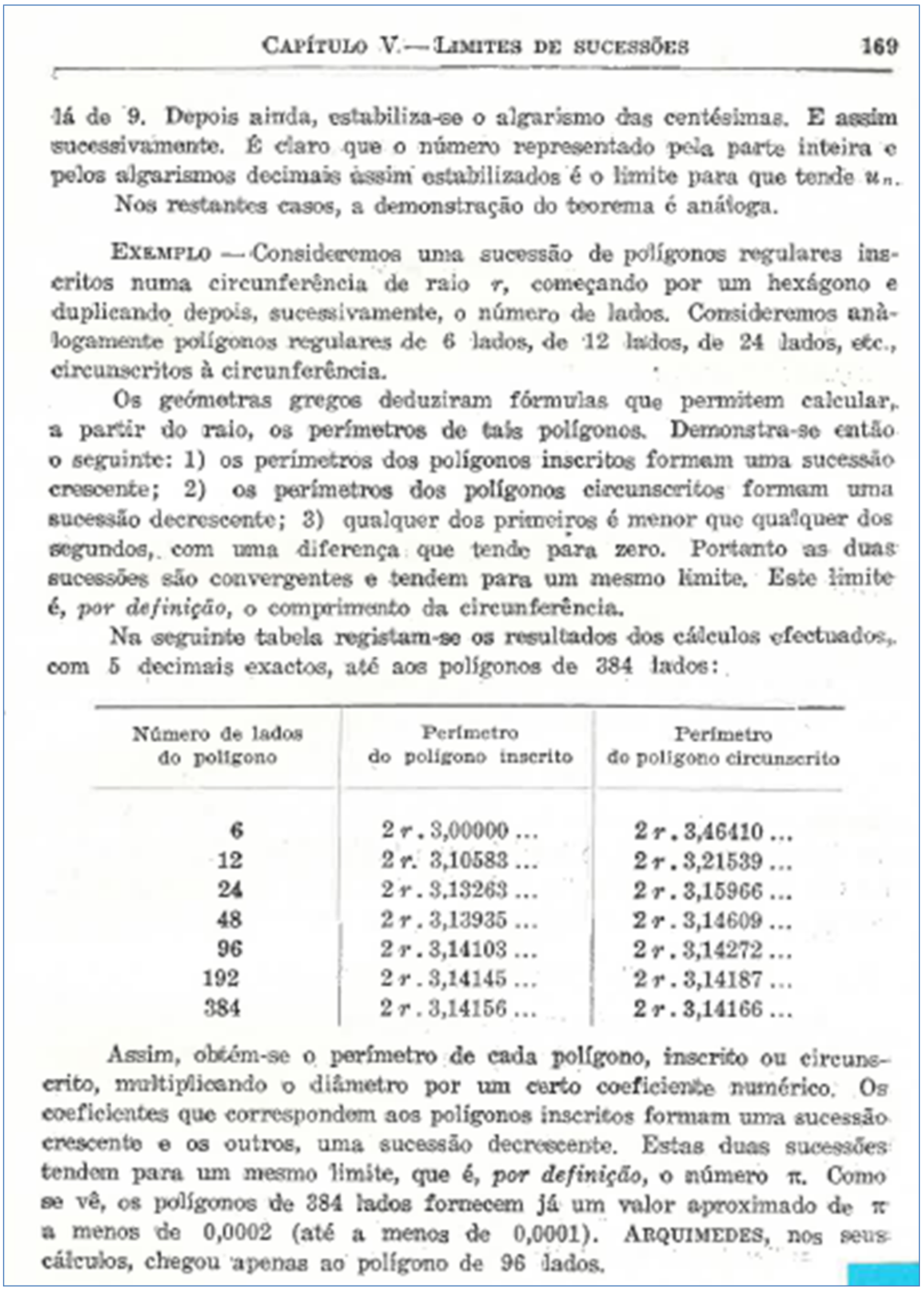
* * *

O termo «função» foi, ao que parece, introduzido em matemática por LEIBNIZ *(cuja biografia será esboçada mais adiante); mas, a princípio, o seu significado não se distinguia nìtidamente do de «expressão analítica».*

O conceito de função tem evoluído paralelamente ao de curva, seu correspondente geométrico. Dizia-se que uma curva era «geométrica» ou «arbitrária» conforme se sabia ou não representá-la analìticamente. Mas a operação de passagem ao limite veio alargar imenso as possibilidades de representação analítica, obrigando a modificar aquele critério. Finalmente, certos problemas práticos, *tais como o estudo das vibrações das cordas de instrumentos de música, o estudo da propagação do calor, etc., levaram, no século passado, os matemáticos (nomeadamente* DIRICHLET*) a adoptar o conceito de função numérica tal como hoje é definido, isto é, como correspondência arbitrária entre os valores de duas variáveis.*

No século XX, o desenvolvimento cada vez maior da matemática e a sua crescente intervenção nos mais diversos domínios da ciência e da técnica conduziram a generalizar o conceito de função ao caso de variáveis cujos valores pertencem a um conjunto de entes de natureza qualquer (números, funções, figuras geométricas, animais, pessoas, etc., etc.; ver atrás o n.º 7). Assim nasceu a **análise geral** *ou* **análise moderna,** *que compreende vários ramos:* lógica, teoria dos conjuntos, álgebra abstracta, topologia geral, *etc.*

Figura 13: [1], p. 145.



CAPÍTULO V. — LIMITES DE SUCESSÕES 169

lá de 9. Depois ainda, estabiliza-se o algarismo das centésimas. E assim sucessivamente. É claro que o número representado pela parte inteira e pelos algarismos decimais assim estabilizados é o limite para que tende u_n.

Nos restantes casos, a demonstração do teorema é análoga.

EXEMPLO — Consideremos uma sucessão de polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio r, começando por um hexágono e duplicando depois, sucessivamente, o número de lados. Consideremos analogamente polígonos regulares de 6 lados, de 12 lados, de 24 lados, etc., circunscritos à circunferência.

Os geómetras gregos deduziram fórmulas que permitem calcular, a partir do raio, os perímetros de tais polígonos. Demonstra-se então o seguinte: 1) os perímetros dos polígonos inscritos formam uma sucessão crescente; 2) os perímetros dos polígonos circunscritos formam uma sucessão decrescente; 3) qualquer dos primeiros é menor que qualquer dos segundos, com uma diferença que tende para zero. Portanto as duas sucessões são convergentes e tendem para um mesmo limite. Este limite é, *por definição*, o comprimento da circunferência.

Na seguinte tabela registam-se os resultados dos cálculos efectuados, com 5 decimais exactos, até aos polígonos de 384 lados:

Número de lados do polígono	Perímetro do polígono inscrito	Perímetro do polígono circunscrito
6	$2r \cdot 3{,}00000\ldots$	$2r \cdot 3{,}46410\ldots$
12	$2r \cdot 3{,}10583\ldots$	$2r \cdot 3{,}21539\ldots$
24	$2r \cdot 3{,}13263\ldots$	$2r \cdot 3{,}15966\ldots$
48	$2r \cdot 3{,}13935\ldots$	$2r \cdot 3{,}14609\ldots$
96	$2r \cdot 3{,}14103\ldots$	$2r \cdot 3{,}14272\ldots$
192	$2r \cdot 3{,}14145\ldots$	$2r \cdot 3{,}14187\ldots$
384	$2r \cdot 3{,}14156\ldots$	$2r \cdot 3{,}14166\ldots$

Assim, obtém-se o perímetro de cada polígono, inscrito ou circunscrito, multiplicando o diâmetro por um certo coeficiente numérico. Os coeficientes que correspondem aos polígonos inscritos formam uma sucessão crescente e os outros, uma sucessão decrescente. Estas duas sucessões tendem para um mesmo limite, que é, *por definição*, o número π. Como se vê, os polígonos de 384 lados fornecem já um valor aproximado de π a menos de 0,0002 (até a menos de 0,0001). ARQUIMEDES, nos seus cálculos, chegou apenas ao polígono de 96 lados.

Figura 14: [1], p. 169.

COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

NOTAS HISTÓRICAS

«O infinito! Nunca outra ideia perturbou tão fundamente o espírito do homem!»

DAVID HILBERT (¹)

I. **Infinito potencial e infinito actual.** *A par da ideia de movimento, uma outra foi evitada pelos clássicos gregos como incompreensível, rebelde aos métodos da razão: a ideia de infinito.*

A mais simples forma do infinito matemático é a que se apresenta na sucessão dos números naturais:

$$1\,,\;2\,,\;3\,,\;4\,,\ldots,\;n\,,\;n+1\,,\ldots$$

Etimològicamente, a palavra «infinito» significa «não acabado». Na verdade, a sucessão dos números naturais aparece primeiramente ao nosso espírito como se fosse uma lista em aberto, que pudéssemos sempre continuar, inscrevendo, após o último elemento n *considerado, um novo elemento,* $n+1$. *Tem-se deste modo a ideia duma variável que cresce para além de todo o limite — isto é, dum* infinitamente grande, *também chamado* infinito potencial.

Em linguagem filosófica, diz-se potencial *ou* em potência *tudo que não está ainda completamente realizado (tal como a estátua no bloco de mármore, antes de ser explicitada pelo escultor); e diz-se* actual *ou* em acto *o que se encontra totalmente realizado.*

Ora, o que repugnou à mentalidade grega não foi tanto a ideia de infinito potencial como a ideia de infinito actual. *Note-se desde já que esta «desconfiança» dos Gregos a respeito do infinito foi um entrave ao progresso científico. É certo que nos parece inconcebível a existência de um número infinito de* seres materiais simultâneos — *sejam eles estrelas, grãos de areia, átomos ou electrões. Todavia, é o próprio platonismo (ver* NOTAS HISTÓRICAS *do Cap. IV) que nos leva a conceber os números*

(¹) DAVID HILBERT, nascido em Königsberg (Alemanha), foi um dos maiores matemáticos dos últimos 50 anos (1862-1943). A sua obra estende-se por todos os sectores da matemática, pura e aplicada, desde a lógica à física matemática.

Figura 15: [1], p. 180.

naturais como eternos e imutáveis no **mundo das ideias** — *e portanto já realizados, na sua totalidade infinita. De resto, para evitar os paradoxos de* ZENÃO, *é-se obrigado a aceitar o infinito actual também nas ideias de espaço e tempo: todo o segmento de recta deve ser formado por uma infinidade de pontos, assim como todo o intervalo de tempo deve ser formado por uma infinidade de instantes. Só deste modo se explica que um ponto móvel ocupe, num tempo finito, um número* infinito *de posições — o que, segundo parece, os Gregos não admitiam, nem mesmo do ponto de vista platónico.*

Modernamente, a análise lógica dos fundamentos da matemática, empreendida por HILBERT, *leva a crer que nenhuma contradição resultará de admitir como existente a* totalidade *dos números naturais ou mesmo a dos números reais. Deste modo, poderemos dizer que* a ideia de infinito actual é compatível com os princípios da razão.

Outra sorte teve porém a ideia de infinitésimo actual.

II. Do conceito de infinitésimo ao conceito de limite. *Já desde os tempos antigos os matemáticos foram tentados a conceber toda a grandeza contínua positiva como se fosse a soma duma infinidade de* grandezas infinitamente pequenas, mas não nulas. *Assim, ao que parece, os pitagóricos, quando já não puderam ocultar por mais tempo aquele famoso «escândalo» das grandezas incomensuráveis, tentaram salvar a sua doutrina, concebendo as mónadas como uma espécie de infinitésimos. Estes seriam então os* infinitésimos actuais, *também chamados* indivisíveis, *cuja ideia se pode concretizar do seguinte modo:*

Suponhamos que se adoptou um comprimento U *para unidade. Então, um* infinitésimo actual *seria um comprimento* ω, *maior que o comprimento zero e menor que qualquer submúltiplo da unidade, isto é, tal que:*

$$\omega > 0 \quad e \quad \omega < \frac{U}{n}, \quad \textit{por maior que fosse } n.$$

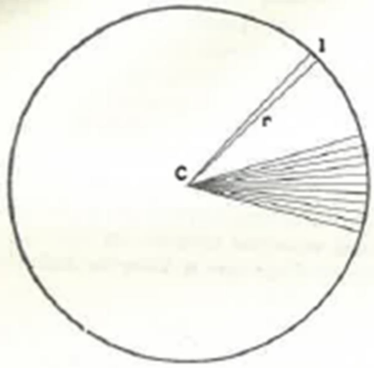
Porém, com os postulados da geometria euclidiana, a segunda condição não permite que ω *seja maior que zero, enquanto a primeira exige que* ω *seja maior que zero* (¹). *Assim,* o infinitésimo actual deveria ser ao mesmo tempo superior a zero e não superior a zero, *o que é impossível, segundo o princípio da não contradição. E o que se diz para comprimentos, diz-se para qualquer outra espécie contínua de grandezas.*

(¹) Note-se que, em certas geometrias, chamadas *não arquimedianas*, a situação é diversa.

Figura 16: [1], p. 181.

182 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.° ANO

Mas o mais curioso é que, admitindo a existência de tais entes contraditórios, se chegava a resultados certos. Assim, para obter a área do círculo, considerava-se a circunferência como polígono com um número infinito de lados infinitamente pequenos; deste modo, o círculo seria composto de uma infinidade de triângulos infinitésimos, de base igual ao lado, l, daquele polígono e de altura igual ao raio, r, do círculo; a área de cada um destes triângulos seria então $\frac{1}{2}\, l\, r$ *e a área,* A, *do círculo seria a soma de* todas *aquelas áreas elementares, isto é:*



$$\mathrm{A} = \Sigma \frac{1}{2}\, l\, r = \frac{1}{2}\, r\, \Sigma\, l$$

em que $\Sigma\, l$ *representa a soma de* todos *os lados do polígono, ou seja o* comprimento da circunferência. *Então, seria* $\Sigma\, l = 2\pi r$ *e portanto*

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\, r \cdot 2\pi r = \pi r^2,$$

o que está certo! E anàlogamente para a área do cone, para o volume da esfera, etc., etc.

(É claro que, na figura, o comprimento l indicado não é infinitésimo, mas apenas muito pequeno).

Estas «somas dum número infinito de parcelas infinitamente pequenas» vieram a chamar-se integrais *e, para as indicar, adoptou-se o sinal* $\int$, *deformação da letra S, em vez da correspondente letra grega* Σ *(sigma maiúsculo), que ficou reservada para os somatórios, isto é, para somas dum número* finito *de parcelas.*

Os precursores do cálculo infinitesimal — nomeadamente o frade italiano CAVALIERI *(1598?-1647), discípulo de* GALILEU *— usaram com êxito o método dos infinitésimos actuais* (ou método dos indivisíveis), *não só no cálculo de áreas e volumes, como ainda na resolução de vários problemas de mecânica. Desde logo este método foi alvo de críticas e sarcasmos, pela sua falta de coerência lógica. Porém os matemáticos que dele faziam uso encolhiam os ombros e aceitavam-no como processo* heurístico, *isto é, como meio de descoberta, cujas bases eram, sem dúvida, contradi-*

Figura 17: [1], p. 182.

tórias, mas cuja aplicação conduzia ràpidamente a fórmulas certas, que de outro modo não era fácil encontrar.

O pior é que, por tal processo, se chegava também a resultados, umas vezes duvidosos, outras vezes contraditórios. Tratava-se, enfim, dum método empírico — não racional. *Aliás, parece averiguado que já* ARQUIMEDES *usava o mesmo método, heurìsticamente, em vários problemas de cálculo integral; mas que depois, ao expor os resultados obtidos, os demonstrava com o rigor lógico da época, sem indicar o caminho que tinha seguido na investigação* (1).

A análise infinitesimal, criada por NEWTON *e por* LEIBNIZ *(como será explicado noutra Nota) desenvolveu-se prodigiosamente, graças ao êxito extraordinário das suas aplicações às ciências experimentais. Mas continuou a fazer-se sentir, apesar de todos os progressos, a falta duma sua fundamentação lógica impecável. Ainda em fins do século XVIII, o grande matemático* LAGRANGE *considerava lamentável o estado da matemática, dizendo, em resumo, o seguinte:* esta ciência é um formigueiro de contradições e se, apesar disso, conduziu a grandes resultados, é porque a infinita clemência de Deus dispôs as coisas de modo que os erros se compensassem uns aos outros. *Em 1784, a Academia de Berlim, presidida por* LAGRANGE, *abriu um concurso, pedindo* «uma teoria clara e precisa daquilo que se chama infinito em matemática» *e, em particular, a explicação de* «como é possível deduzir tantos teoremas verdadeiros duma suposição contraditória».

Mas, só uns 30 anos depois, outro grande matemático, o francês CAUCHY, *tratando sistemàticamente os infinitésimos como variáveis tendentes para zero e dando uma definição lógica rigorosa do conceito de limite, conseguiu finalmente edificar a análise matemática sobre uma base*

(1) ARQUIMEDES, natural de Siracusa, cidade grega da Sicília, é considerado um dos maiores génios matemáticos de todos os tempos (287-212 a. C.). Celebrizou-se não só pelas suas admiráveis descobertas de geometria, como ainda pelos seus estudos fundamentais de estática. (São bem conhecidas as circunstâncias em que, segundo se diz, descobriu o princípio da hidrostática que tem o seu nome). Durante 3 anos, a cidade de Siracusa, sitiada pelos Romanos, resistiu ao cerco, graças a engenhos por ele inventados (catapultas formidáveis, guindastes que levantavam os navios e os arremessavam contra os rochedos, etc.). Finalmente a cidade foi tomada de surpresa, e ARQUIMEDES, absorvido na contemplação duma figura que traçara no solo, foi assassinado por um soldado romano, a quem, segundo se diz, gritara colérico: «Não apagues os meus círculos!».

Figura 18: [1], p. 183.

184 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

racional. Além disso, CAUCHY *estendeu a análise, com igual rigor, ao campo das* funções de variável complexa, *que são hoje de grande interesse e utilidade, pelas suas aplicações à ciência pura e à técnica.*

Porém o edifício da análise só apareceu, em toda a sua perfeição lógica, depois de apeados os andaimes geométricos, por obra dos grandes matemáticos alemães DEDEKIND, CANTOR e WEIERSTRASS (cf. NOTA HISTÓRICA *do Cap. II*).

Modernamente, as questões relativas ao conceito de limite são estudadas num ramo da matemática chamado topologia.

III. O conceito de limite e os paradoxos de ZENÃO. *É o conceito de limite que, passados 24 séculos, permite esclarecer o tão debatido problema dos paradoxos de* ZENÃO. *Consideremos por exemplo o paradoxo de «Aquiles e a tartaruga». Suponhamos que Aquiles anda 10 vezes mais depressa que a tartaruga, começando por estar à distância de 10 metros desta. Então, quando Aquiles percorre os 10 m, a tartaruga andará 1 m; depois, quando Aquiles percorre esta distância, a tartaruga desloca-se mais 1 decímetro, e assim sucessivamente. Deste modo, as distâncias de Aquiles ao* seu ponto de partida *vão sendo as seguintes (expressas em metros):*

$$0\ ;\ 10\ ;\ 11\ ;\ 11{,}1\ ;\ 11{,}11\ ;\ 11{,}111\ ;\ 11{,}1111\ ;\ 11{,}11111\ ;\ \ldots$$

Ao mesmo tempo, as distâncias da tartaruga ao ponto de partida de Aquiles vão sendo:

$$10\ ;\ 11\ ;\ 11{,}1\ ;\ 11{,}11\ ;\ 11{,}111\ ;\ 11{,}1111\ ;\ 11{,}11111\ ;\ 11{,}111111\ ;\ \ldots$$

Ora, ambas estas sucessões têm por limite *o mesmo número:*

$$11{,}11111\ldots = 11\,\frac{1}{9}$$

Assim, para alcançar a tartaruga, Aquiles deverá percorrer 11 metros e 1/9 do metro — o que, de resto, se podia ver directamente, resolvendo a equação $x = 10(x - 10)$, *que traduz algèbricamente o problema.*

Afinal, o vício de raciocínio que se introduzia no paradoxo de ZENÃO *consistia em admitir, inconscientemente, que os espaços parciais 10 m, 1 m, 1 dm, 1 cm, etc., seriam todos percorridos por Aquiles em tempos iguais e, portanto, cada vez mais lentamente — o que não sucede, com certeza, se o movimento for sensìvelmente uniforme. Assim, por exemplo, se Aquiles caminhar à razão de 1 metro por segundo, ao fim de 11 segundos e 1/9 do segundo estará precisamente no ponto em que deve encontrar a tartaruga.*

É preciso não esquecer que estamos a raciocinar com esquemas abstractos de espaço e tempo, que são apenas simplificações da realidade.

Figura 19: [1], p. 184.

NOTAS HISTÓRICAS

I. **Notícias biográficas** (¹) — A) ISAAC NEWTON *nasceu na aldeia de Woolsthorpe, Inglaterra, no dia de Natal de 1642 (ano da morte de* GALILEU). *Seu pai, modesto agricultor, tinha falecido poucas semanas antes. Criança débil e meditativa, o pequeno* ISAAC *não participava nas brincadeiras dos rapazes da mesma idade, inventando ele próprio as suas distracções, tais como rodas hidráulicas, moinhos que moiam trigo, relógios de madeira que funcionavam, etc. Na escola, mantinha-se retraído, abstracto, chegando a ser o último da classe; até que um dia, tendo vencido em luta um colega que o agredira brutalmente, se encheu de brio e quis mostrar que também podia ser bom aluno. A partir desse momento, as suas possibilidades intelectuais começaram a chamar a atenção dos professores e da família.*

Aos 19 anos ingressa na Universidade de Cambridge. Segundo se conta, estava então para desposar uma sua linda conterrânea. Mas a ausência e os estudos devem tê-lo afastado do seu romance: ela casou, ele ficou solteiro. Em Cambridge, NEWTON *seguiu, com entusiasmo crescente, o curso de* BARROW, *matemático insigne, que expunha o seu próprio método para determinação de tangentes e cálculo de áreas. (Era este, em germe, o cálculo infinitesimal. De* BARROW *se viria a dizer que foi a «estrela da manhã, anunciando o nascimento do Sol»). O professor em breve se apercebeu do valor do discípulo. Mas, no destino deste, um facto imprevisto veio pesar ainda de modo decisivo.*

Em 1664-66 grassa em Inglaterra uma pavorosa epidemia de peste bubónica. A Universidade fecha e NEWTON *regressa à sua aldeia. Aqui,*

(¹) Para mais pormenores, ver por exemplo BELL, *Les grands mathématiciens* (trad.), Payot, Paris.

Figura 20: [1], p. 257.

258 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

no remanso da vida campestre, a criança sonhadora e tímida de outrora afirma a sua verdadeira natureza: uma espantosa capacidade de concentração, a par duma intuição genial. Em menos de dois anos, inventa o método das fluxões (*ou seja o* cálculo infinitesimal), *descobre* a lei da atracção universal, *efectua a* análise e a síntese da luz branca, *em experiências com prismas comprados numa feira, e concebe um novo tipo de telescópio.*

NEWTON *e* LEIBNIZ *(ver Nota seguinte) são hoje considerados os fundadores do cálculo infinitesimal. Seria no entanto erro grave pensar que o cálculo infinitesimal é obra exclusiva de dois homens isolados. É, pelo contrário, o resultado duma longa evolução, que começa na Antiguidade com* EUDOXO *e* ARQUIMEDES *(para não citar outros) e prossegue, na Idade Moderna, com* KEPLER, GALILEU, CAVALIERI, FERMAT, PASCAL, BARROW *e outros mais* (*ver* NOTAS HISTÓRICAS *anteriores*). *Todavia, o novo cálculo só se define claramente como corpo de doutrina, por obra de* NEWTON *e de* LEIBNIZ, *considerados por isso os seus criadores.*

Tem especial interesse observar como se chegou à lei da atracção universal. Um astrónomo dinamarquês, TYCHO BRAHÉ (1546-1601), *tinha registado as suas observações num catálogo de estrelas, que indicava a posição dos planetas no decurso de vários anos. Um seu jovem assistente,* KEPLER (1571-1630), *influenciado pelo pitagorismo, convenceu-se de que tais números encerravam, numa oculta harmonia, a chave do universo; assim, ao termo de 22 anos de cálculos pacientíssimos, descobriu as célebres leis, que têm hoje o seu nome, sobre o movimento dos planetas. Finalmente,* NEWTON, *aplicando o* **cálculo diferencial** (¹) *a estas leis, conclui que* toda a partícula material atrai qualquer outra com uma força directamente proporcional às massas de ambas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa (LEI DA ATRACÇÃO UNIVERSAL). *E, aplicando o* **cálculo integral**, *deduz desta lei o movimento dos planetas e dos seus satélites, a órbita dos cometas, a teoria exacta das marés, etc. — enfim, todo o* sistema de relojoaria *do mundo celeste.*

Um dos êxitos mais clamorosos da teoria de NEWTON *ocorreu um século após a sua morte. Tendo os astrónomos observado que o planeta Urano parecia afastar-se da lei de* NEWTON, *não hesitaram em atribuir esse desvio à atracção exercida por um planeta ainda desconhecido. O matemático francês* LEVERRIER *conseguiu calcular a posição do hipotético planeta segundo a lei de* NEWTON, *e comunicou os resultados ao astrónomo alemão*

(¹) Ver mais adiante, nesta NOTA, **cálculo diferencial e cálculo integral.**

Figura 21: [1], p. 258.

CAPÍTULO VIII — DERIVADAS 259

GALLE. Logo que recebeu a comunicação, GALLE, na noite de 23 de Setembro de 1841, dirigiu o telescópio para o ponto indicado pelos cálculos e ali encontrou, efectivamente, um novo planeta! A este se deu o nome de Neptuno.

E hoje, que o mundo assiste, empolgado, com emoção crescente, aos progressos inauditos da astronáutica, é presente, mais do que nunca, o génio de NEWTON, que possibilitou, à distância de séculos, as viagens das naves espaciais, com rotas preestabelecidas, de acordo com a lei da gravitação e por meio do cálculo infinitesimal!

Mas continuemos o perfil biográfico de ISAAC NEWTON.

Após aquele seu fecundíssimo retiro na aldeia, NEWTON retomou os estudos e, apenas com 26 anos, por vontade expressa de BARROW, sucedeu a este no lugar de professor de matemática. As aulas absorviam-lhe bem pouco tempo, o que lhe permitiu continuar, com afinco, as suas portentosas investigações. Mas só em 1684, a instâncias de seu amigo HALLEY (célebre astrónomo, cujo nome foi dado a um cometa), se decidiu a redigir as suas descobertas numa obra monumental, **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica** *(Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), publicada em 1687. Ora, em 1684, já LEIBNIZ tinha publicado uma obra em que expunha a sua invenção do cálculo infinitesimal. (Naquela época, a difusão dos livros e das ideias era muito mais lenta do que hoje). Daqui nasceu, passados anos, uma longa, estéril e azeda discussão, entre os dois grandes matemáticos, sobre a prioridade da descoberta, discussão esta acirrada pelos partidários de um e do outro. Até os espíritos mais elevados são susceptíveis de fraquezas!*

O prestígio de NEWTON cresceu enormemente, em sua vida e depois da sua morte, chegando a entravar o progresso da matemática em Inglaterra: NEWTON era considerado perfeito, inigualável, quase um deus, e os seus compatriotas não admitiam que outros matemáticos, incluindo LEIBNIZ, o pudessem ultrapassar em algum ponto.

Pessoalmente, NEWTON era humano e modesto. É-lhe atribuída esta frase: «Se consegui ver mais longe do que outros, foi porque me ergui sobre os ombros de gigantes» (KEPLER, GALILEU, *etc.*). *Mas NEWTON foi o gigante que pesou o Sol, a Terra, a Lua e outros planetas. Quando lhe perguntavam como conseguia fazer tão extraordinárias descobertas, respondia:* «Nocte dieque incubando» *(Pensando no assunto noite e dia). Nos períodos de maior actividade, esquecia-se de comer e de dormir, che-*

Figura 22: [1], p. 259.

260 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.° ANO

gando a adoecer. NEWTON *faleceu aos 85 anos e jaz na Abadia de Westminster, o que representa a mais alta consagração prestada pelo povo inglês a uma figura da sua história.*

B) GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ *nasceu em Leipzig, Alemanha, a 1 de Junho de 1646. A sua infância decorreu num ambiente de apurada cultura. O pai, professor de moral, morreu ainda novo, deixando-lhe uma boa biblioteca e a paixão dos livros.*

Ingressou aos 15 anos na Universidade de Leipzig, como estudante de Direito. Mas, nas horas vagas, lia com avidez obras filosóficas e científicas, principalmente de KEPLER, GALILEU *e* DESCARTES, *que despertaram nele o entusiasmo pela matemática. Doutorou-se em Direito aos 20 anos e, passado um ano, entrou ao serviço do Eleitor de Mogúncia como diplomata, o que lhe permitiu viajar e relacionar-se com os melhores espíritos da época.*

Em 1672 foi a Paris com a missão de convencer LUÍS XIV *a invadir o Egipto, em vez de atacar a Alemanha. (A resposta, polida, do Rei-Sol, foi lembrar-lhe que já tinha passado o tempo das Cruzadas).* LEIBNIZ *demora-se então quatro anos em Paris, o primeiro centro intelectual daquela época. Ali encontra* HUYGHENS, *célebre físico matemático holandês, autor da teoria do relógio e da teoria ondulatória da luz; dele recebe lições de matemática. Deslumbrado com a potência do método matemático,* LEIBNIZ *acaba, ele próprio, por inventar o cálculo infinitesimal, ignorando o que* NEWTON *tinha escrito, mas não publicado, sobre o mesmo assunto. Daqui as deploráveis controvérsias a que já fizemos referência e que envenenaram tanto a vida de* LEIBNIZ *como a de* NEWTON.

LEIBNIZ *foi um espírito genial, que manifestou a sua potência e originalidade nos mais diversos domínios: matemática, lógica, filosofia, direito, política, religião, história, literatura, etc. Enquanto* NEWTON *é o*

Figura 23: [1], p. 260.

matemático-físico, virado para a natureza, LEIBNIZ *é o matemático-filósofo, preocupado com os problemas do espírito. A sua formação aristotélica leva-o a conceber um projecto grandioso aos 20 anos: num ensaio escolar, propõe-se criar um método pelo qual todo o pensamento seja reduzido a uma espécie de cálculo algébrico, a que dará o nome de* «Characteristica Universalis» *(de «caracteres», símbolos algébricos). Assim, duas pessoas, em vez de discutirem com vãs palavras um assunto qualquer, limitar-se-iam a fazer cálculos, para saber qual teria razão. Havia certamente exagero, talvez propositado, neste projecto, que o acompanhou toda a vida: o pensamento é muito mais do que simples cálculo. Mas a verdade é que o sonho de* LEIBNIZ *veio a realizar-se em parte, dois séculos depois, na* **lógica matemática** *ou* **lógica simbólica,** *que tem hoje importância fundamental em matemática, assim como em filosofia.*

Uma das aplicações que LEIBNIZ *fez do seu método lógico foi a invenção da primeira máquina de multiplicar, dividir e extrair raízes. (Note-se, de passagem, que as modernas calculadoras electrónicas fazem largo emprego da lógica simbólica).*

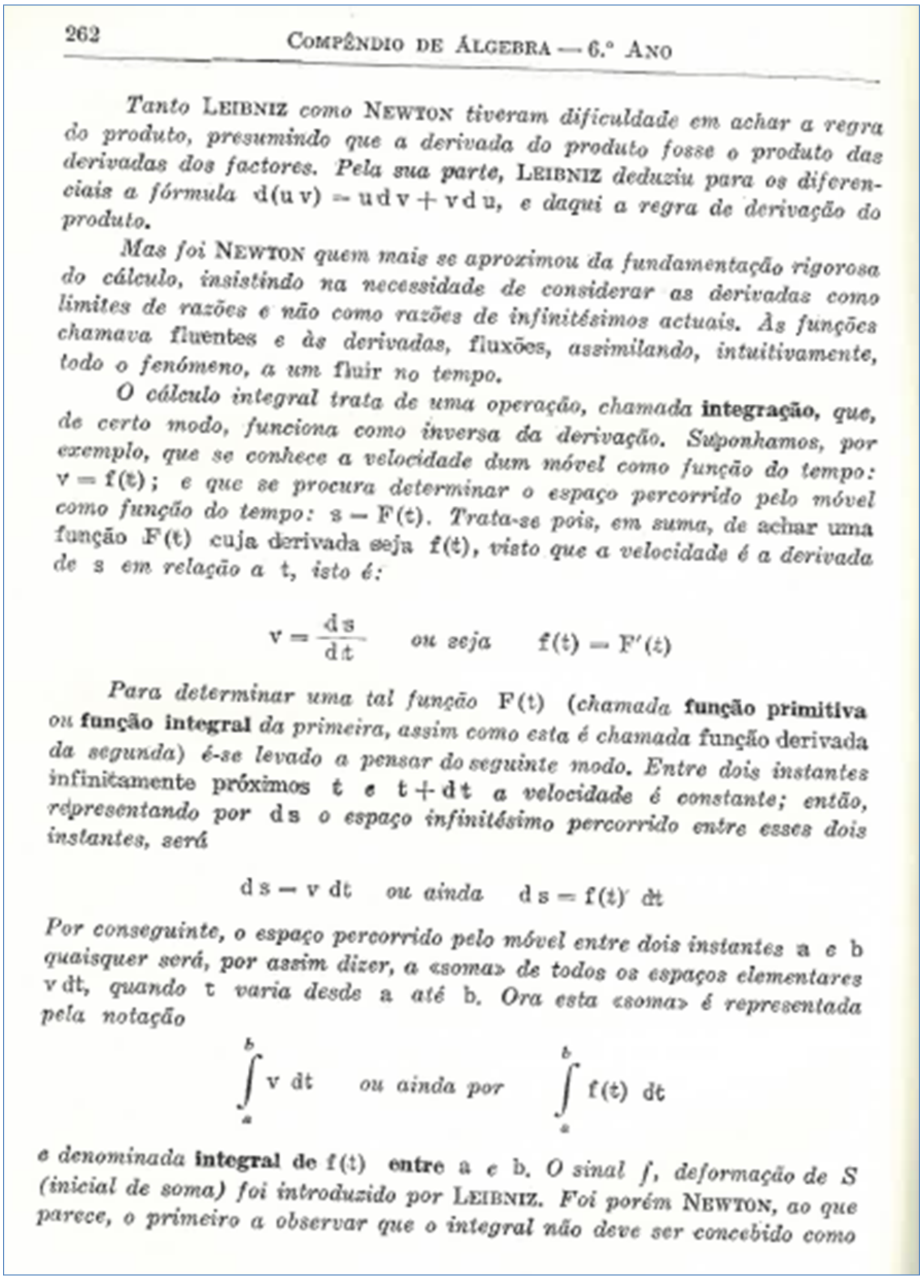
LEIBNIZ *faleceu aos 70 anos e foi sepultado numa obscura campa, em Hanover, esquecido pelos grandes e poderosos, a quem toda a vida serviu, queimando inglòriamente grande parte das suas preciosas energias.*

II. **Cálculo diferencial e cálculo integral** — *A análise infinitesimal compreende dois ramos principais: o* cálculo diferencial *e o* cálculo integral. *O primeiro desenvolve, com diversas variantes, o tema das derivadas. O adjectivo «diferencial» tem a seguinte origem: a derivada duma variável* y *em relação a outra variável* x *— que se define hoje como* limite *da razão incremental* $\Delta y/\Delta x$ *— era concebida por* LEIBNIZ, *como se fosse, ela própria, uma razão.*

$$\frac{dy}{dx}$$

em que dx *representa o* acréscimo infinitésimo *de* x *(chamado* diferencial de x*) e* dy *representa, à parte um termo desprezável, o acréscimo correspondente de* y *(chamado* diferencial de y*). Parece pois que* LEIBNIZ *considerava aqui os diferenciais* estàticamente, *isto é, como* infinitésimos actuais *e não como variáveis tendentes para zero. Seja como for, a verdade é que o conceito de diferencial pôde, mais tarde, ser definido de modo correcto, e a notação de* LEIBNIZ *para designar derivadas ainda hoje é correntemente usada, sendo por vezes mais cómoda e sugestiva do que as outras atrás indicadas.*

Figura 24: [1], p. 261.



262 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

Tanto LEIBNIZ *como* NEWTON *tiveram dificuldade em achar a regra do produto, presumindo que a derivada do produto fosse o produto das derivadas dos factores. Pela sua parte,* LEIBNIZ *deduziu para os diferenciais a fórmula* $d(uv) = u\,dv + v\,du$, *e daqui a regra de derivação do produto.*

Mas foi NEWTON *quem mais se aproximou da fundamentação rigorosa do cálculo, insistindo na necessidade de considerar as derivadas como limites de razões e não como razões de infinitésimos actuais. Às funções chamava* fluentes *e às derivadas,* fluxões, *assimilando, intuitivamente, todo o fenómeno, a um* fluir *no tempo.*

O cálculo integral trata de uma operação, chamada **integração,** *que, de certo modo, funciona como inversa da derivação. Suponhamos, por exemplo, que se conhece a velocidade dum móvel como função do tempo:* $v = f(t)$; *e que se procura determinar o espaço percorrido pelo móvel como função do tempo:* $s = F(t)$. *Trata-se pois, em suma, de achar uma* função $F(t)$ cuja derivada seja $f(t)$, *visto que a velocidade é a derivada de* s *em relação a* t, *isto é:*

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{ou seja} \quad f(t) = F'(t)$$

Para determinar uma tal função $F(t)$ *(chamada* **função primitiva** *ou* **função integral** *da primeira, assim como esta é chamada* função derivada *da segunda) é-se levado a pensar do seguinte modo. Entre dois instantes* infinitamente **próximos** t *e* $t + dt$ *a velocidade é constante; então, representando por* ds *o espaço infinitésimo percorrido entre esses dois instantes, será*

$$ds = v\,dt \quad \text{ou ainda} \quad ds = f(t)\,dt$$

Por conseguinte, o espaço percorrido pelo móvel entre dois instantes a *e* b *quaisquer será, por assim dizer, a «soma» de todos os espaços elementares* $v\,dt$, *quando* t *varia desde* a *até* b. *Ora esta «soma» é representada pela notação*

$$\int_a^b v\,dt \quad \text{ou ainda por} \quad \int_a^b f(t)\,dt$$

e denominada **integral de** $f(t)$ **entre** a *e* b. *O sinal* $\int$, *deformação de S (inicial de soma) foi introduzido por* LEIBNIZ. *Foi porém* NEWTON, *ao que parece, o primeiro a observar que o integral não deve ser concebido como*

Figura 25: [1], p. 262.

soma duma infinidade de infinitésimos, mas sim como limite *de somas finitas de quantidades que tendem para zero. Mais precisamente, se dividirmos o intervalo* $[a, b]$ *num número finito,* n*, de intervalos de comprimento* Δt *e tomarmos um valor* t_i *em cada um deles, o integral de* $f(t)$ *entre* a *e* b *deverá ser o limite da soma*

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t,$$

quando $\Delta t \to 0$ *(ou seja, quando* $n \to \infty$ *).*

Poderíamos dizer, em resumo, que o cálculo diferencial se aplica à análise *dos fenómenos, enquanto o cálculo integral se refere à* síntese, *isto é,* à reconstituição *dos fenómenos, na sua* integridade.

III. O paradoxo da seta e o conceito de derivada — *O paradoxo da seta (ver* NOTAS HISTÓRICAS *do Cap. IV) resolve-se em matemática do seguinte modo: O* estado de movimento *de um corpo num determinado instante traduz-se, não pela mudança de lugar, que seria impossível num só instante, mas sim pela* velocidade *de que está animado o corpo* nesse instante. *A seta só estaria imóvel em cada instante, se a velocidade fosse sempre* nula, *e só então, de facto, é que não haveria movimento.*

Assim, é o conceito de limite, sob as vestes do conceito de derivada, que vem resolver, do ponto de vista matemático, *mais este paradoxo de* ZENÃO.

Figura 26: [1], p. 263.

Agradecimento

Este trabalho foi financiado pela RECI pelo CIDMA-Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e pela FCT-Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito dos projectos UIDB/04106/2020 e UIDP/04106/2020.

Referências

[1] Sebastião e Silva, J. e Silva Paulo, J. D. *Compêndio de Álgebra* (1.º tomo, 6.º ano), Livraria Cruz, Braga, 1968.

Ludus

Temas da Matemática Elementar

MATEMÁTICA RECREATIVA PARA A AQUISIÇÃO DE COMPETÊNCIAS – RELATOS DE ATIVIDADES EM CONTEXTO DE PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA (PES)

Cristina Sousa, Alcina Figueiroa, Hélder Pinto

Instituto Piaget

Instituto Piaget, RECI

Instituto Piaget, RECI & CIDMA - Universidade de Aveiro

cristinasousa6@sapo.pt , alcina.figueiroa@ipiaget.pt, helder.pinto@ipiaget.pt

Resumo: *Este artigo apresenta um conjunto de atividades práticas desenvolvidas em Educação Pré-escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB), durante o período de Prática de Ensino Supervisionada (PES), em Educação Pré-Escolar e no 1º Ciclo do Ensino Básico (CEB). Estas atividades foram implementadas com o intuito de trabalhar conteúdos matemáticos de uma forma recreativa, envolvendo o jogo como recurso principal e trabalhando competências como o desenvolvimento pessoal e a autonomia, o relacionamento interpessoal, o raciocínio e a resolução de problemas, dimensões que o Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória [4] explicita.*

Palavras-chave: matemática recreativa, competências, jogo, educação pré-escolar, 1.º ciclo do ensino básico.

Introdução

De acordo com a Organização das Nações Unidas para Educação, Ciência e Cultura [12], "O mundo está em mudança – a educação também precisa mudar. Em todo o planeta, as sociedades sofrem profundas transformações e isso exige novas formas educacionais que promovam as competências necessárias para sociedades e economias, agora e no futuro" (p. 15). Por essa razão se considera que o pensamento de Pestallozi, citado por Reachers ([11], p. 46) – "O professor deve ser como um jardineiro, providenciar as melhores condições externas para que as plantas sigam seu desenvolvimento natural. Afinal, a semente traz em si o projeto da árvore toda." – tem um significado puro do que deve ser um professor e qual deverá ser a sua tarefa no âmbito da docência.

Esta intervenção surgiu como resultado de observações efetuadas em contexto de estágio (educação pré-escolar e 1.º CEB), ambos concretizados na mesma instituição cooperante. Assim, partindo-se dessa observação e da análise das atividades implementadas e observadas, sentiu-se que existia a necessidade de realizar atividades que ajudassem a desenvolver competências como as que estão descritas em [4] e direcionadas para o domínio da matemática.

Neste enquadramento, surgiu a questão orientadora que norteou todo o trabalho desenvolvido e que foi a seguinte: Que atividades matemáticas realizar para desenvolver nos alunos competências procedimentais e atitudinais? Face à notória necessidade de modificar as práticas letivas neste domínio, relatos de práticas pedagógico-didáticas como as que aqui se expõem podem ajudar os professores a implementarem práticas mais apelativas e mais adequadas e corretas, conducentes a aprendizagens mais significativas.

I – Enquadramento teórico

1.1. O ensino-aprendizagem focalizado no desenvolvimento de competências

Uma das grandes dificuldades dos alunos é conseguir aplicar o que aprendem, ou seja, a teoria na prática. Os conteúdos abordados nas diversas disciplinas, por vezes, não ficam completamente esclarecidos e consolidados, pelo que o ensino deveria ser direcionado para que os alunos consigam adquirir as competências essenciais que englobam as capacidades, as atitudes e os conhecimentos ([13], p. 130). Os mesmos autores defendem ainda que "(...) o conceito de competência pode ser entendido como uma negação dos conteúdos tradicionais" (p.12). Nesta linha de pensamento, Cury (2019) utiliza como exemplo uma comparação com a educação repetitiva, dizendo que: "A memória não é um banco de dados, nem a nossa capacidade de pensar é uma máquina de repetir informações", pelo contrário, "A memória humana é um canteiro de informações e experiências para que cada um de nós produza um fantástico mundo de ideias" (p.71). Corroborando, ainda, em [13]), "ensinar competências implica utilizar formas de ensino consistentes para responder a situações, conflitos e problemas relacionados à vida real, e um complexo processo de construção pessoal que utilize exercícios de progressiva dificuldade e ajuda eventual, respeitando as características de cada aluno" (p. 13).

Como enunciam estes especialistas, as competências e o conhecimento não são conceitos incompatíveis, pelo contrário, é possível e existe uma inter-relação entre eles. Em [2], os autores exemplificam essa relação salientando que "(...) o conhecimento e as competências não estão em desacordo. São antes duas faces de uma mesma moeda e, às vezes, até mais do que isso" (p. 19). Dessa forma, é exequível falar num ensino focalizado no desenvolvimento de competências, tal como, descrevem os autores referindo que "um currículo com base em competências representa a formação em aprendizagens que têm como característica fundamental a capacidade de serem aplicadas em contextos reais. O essencial das competências é seu caráter funcional diante de qualquer situação nova ou conhecida" (p. 12).

No contexto escolar as competências devem ser focalizadas e distanciam-se das aprendizagens "tradicionais". Devem ser utilizados métodos de ensino consistentes de forma a criar estratégias para uma aprendizagem abrangente. A este respeito, em [2], os autores defendem que "(...) o desenvolvimento de competências exige mais conhecimentos e valoriza mais o saber, o trabalho desenvolvido é mais exigente e há um caminho mais difícil a percorrer quando se trabalham conhecimentos e competências de forma interdependente" (p. 52). Deste modo, salienta-se que as competências devem centrar-se nos campos do ser, saber fazer e do saber e para isso "a escola deve formar em todas as competências imprescindíveis para o desenvolvimento pessoal, interpessoal, social e profissional, superando a função propedêutica e seletiva do ensino tradicional" ([13], p. 24). Transpondo as competências para as implicações práticas, no referencial curricular [4] referem que "Trata-se de encontrar a melhor forma e os recursos mais eficazes para todos os alunos aprenderem, isto é, para que se produza uma apropriação efetiva dos conhecimentos, capacidades e atitudes que se trabalharam, em conjunto e individualmente, e que permitem desenvolver as competências previstas no Perfil dos Alunos ao longo da escolaridade obrigatória" (p. 32).

Tal como defendem em [2], "(...) a missão de um professor de matemática não é ensinar matemática, é formar um aluno através da matemática" (p. 10).

1.2. A Matemática Recreativa

Segundo o dicionário online Infopédia (Porto Editora), a palavra recreativo(a) é um adjetivo que significa divertir ou entreter como sendo algo lúdico. O que se pretende com este tópico é realmente isso, frisar a importância de trabalhar conceitos matemáticos de uma forma aprazível e com sentido. Existem diversas estratégias e métodos que se podem utilizar numa abordagem simples, mas com conteúdos matemáticos. Um exemplo é o jogo que favorece e envolve a criança na resolução de problemas, bem como, no desenvolvimento do seu raciocínio. Lopes et al (1990), citado por [8], expõe algumas vantagens que o jogo evidência no ensino da Matemática (p. 84):

- Os jogos podem permitir uma abordagem informal e intuitiva de conceitos matemáticos considerados, em determinado momento, demasiado abstratos;
- Os jogos permitem que o ritmo de cada aluno seja respeitado mais naturalmente;
- Os jogos podem contribuir para que o aluno encare o erro de uma forma mais positiva e natural;

- Os jogos permitem que os alunos sintam que podem ter sucesso;

- Os jogos favorecem naturalmente a interação entre os alunos.

De facto, a parte lúdica representa uma ferramenta/método de ensino que os educadores/professores podem adotar para que os alunos aprendam de uma forma positiva. O professor deverá ser capaz de arranjar estratégias, utilizar jogos que produzam conhecimento para que os alunos sejam estimulados e assim assimilem os conteúdos propostos. As atividades lúdicas vão contribuir para um melhor ambiente em sala, tanto para o professor como para a criança. As aulas tornam-se prazerosas, o que desmitifica a ideia de que a matemática é complicada e difícil de aplicar e de relacionar com o quotidiano.

Sendo os jogos um bom recurso pedagógico, o sentimento de frustração e os pensamentos negativos em relação à matemática serão atenuados porque o brincar com os jogos deixa os alunos livres de preconceitos obtendo o prazer educativo. Existem as seguintes vantagens no jogo pedagógico ([7], p. 37):

- Permite aprendizagem nos domínios cognitivos, afetivos e psicomotores;

- Desenvolvimento de capacidade de argumentação, tomada de decisão, raciocínio e iniciativa;

- Permite partilhar conhecimentos, experiências e vivências;

- Amplia o auto e hétero-conhecimento;

- Possibilita a mudança de comportamentos e atitudes.

Assim sendo, as competências podem ser adquiridas através do jogo matemático em que o aluno consegue simultaneamente trabalhar vários domínios, como o refere o autor, a nível psicomotor, afetivo e cognitivo. Para que se consiga desenvolver competências através do jogo, é necessário definir objetivos previamente, tanto a nível pedagógico e como forma de ir ao encontro do documento [4]. Por vezes, existem competências trabalhadas, mas não é notório para quem realiza o jogo, e dessa forma o autor aconselha a que após o jogo seja feita uma análise em conjunto com os alunos e que se reflita sobre o que aconteceu e, eventualmente, alterar comportamentos/atitudes face ao que foi feito e aprendido ([7], p. 35). Para Piaget, citado por [1], p. 83, o jogo é um recurso "(...) tão poderoso para a aprendizagem das crianças que em todo lugar onde se consegue transformar em jogo a iniciação à leitura, ao cálculo ou à ortografia, observa-se que as crianças se apaixonam por essas ocupações (...)".

Em síntese, saliente-se que o ensino da matemática deve ser valorizado e o educador/professor deve sentir-se confortável na sua abordagem, devendo promover o uso de materiais lúdicos e manipuláveis para promover a experimentação e a aprendizagem. Assim, como enunciado em [9], p. 16), "Os alunos devem ter oportunidades para realizar experiências que lhes permitam explorar, visualizar, desenhar e comparar objetos do dia a dia e outros materiais concretos".

II – Objetivos

Centrado na área da matemática, mais especificamente, no desenvolvimento de competências que constam do [4], tais como o desenvolvimento pessoal e a autonomia, o relacionamento interpessoal, o raciocínio e a resolução de problemas, dimensões que o Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória explicita, este artigo pretende dar a conhecer um conjunto de atividades práticas, realizadas em contexto de estágio, concretamente, em educação pré-escolar e no 1.º CEB, evidenciando o seu contributo no desenvolvimento dessas competências, relevantes no dia-a-dia e na tomada de decisões.

III – Metodologia

Este projeto de intervenção envolveu um grupo de crianças de educação Pré-escolar (sala dos três anos), constituído por 20 crianças e um grupo de alunos do 1.º CEB (1.º ano de escolaridade) constituído por 25 alunos. As atividades planificadas versavam conteúdos programáticos que seriam lecionados com os alunos das turmas de estágio.

Em Educação Pré-escolar o projeto de intervenção foi intitulado de "*Brincar + Aprender + Jogar = Matemática (r)*" onde se exploraram diferentes componentes do Domínio da Matemática. Ainda que tenham sido contabilizadas 16 atividades desenvolvidas com as crianças, neste artigo somente serão apresentadas cinco, dada a limitação em termos de espaço. Em cada uma das atividades é descrita a componente trabalhada, a aprendizagem realizada e as áreas de competências que se pretenderam desenvolver (Tabela 1).

A avaliação do projeto de intervenção foi realizada ao longo das atividades que se foram implementando. Foram construídos materiais apelativos e resistentes que foram propulsionadores de aprendizagens significativas. O grande foco, visto a idade do grupo, foi desde sempre a motivação da criança para a realização das atividades propostas e trabalhar as quatro componentes do domínio da matemática. O que inicialmente foi detetado na observação como um problema, este projeto conseguiu alcançar e trabalhar o domínio de uma forma divertida onde os conteúdos estavam presentes nas atividades.

O projeto de intervenção do 1.º CEB intitulou-se de "A Matemática Recreativa" e com ele promoveram-se aprendizagens que são basilares em todo o percurso estudantil (Tabela 2). Foram implementadas 11 atividades, cinco das quais serão retratadas na seção a seguir.

Durante a implementação do projeto de intervenção, em todas as atividades, no final da sua realização, foi pedido a cada aluno para avaliarem a atividade. Como o estágio foi realizado com uma turma de 1.º ano, essa autoavaliação foi realizada de uma forma livre, podendo os alunos utilizar o desenho ou expressar-se através da escrita, apesar de ainda existir uma dificuldade nesse sentido pela generalidade dos alunos. Tabela 3 apresentam-se três exemplos de atividades avaliadas por parte dos alunos participantes.

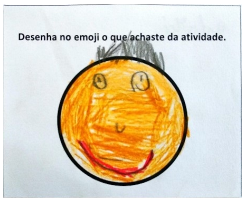
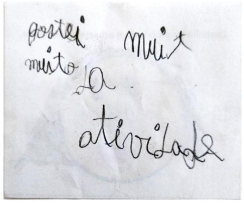
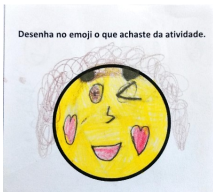
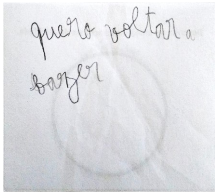
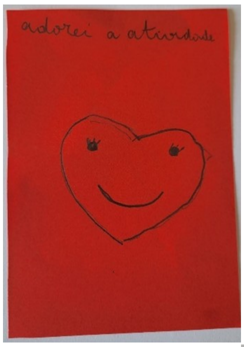
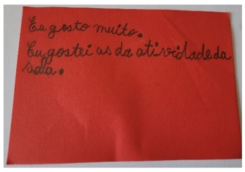
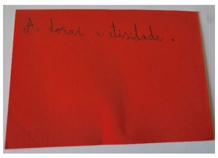
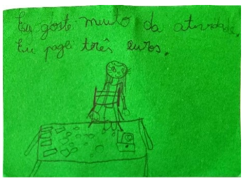
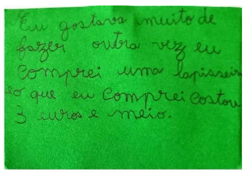
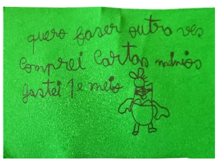
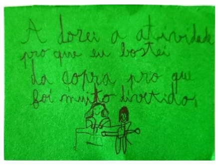
Tabela 1: Atividades implementadas em Educação Pré-escolar.

Atividades	**Conteúdos**	**Aprendizagens**	**Áreas de Competências**
"Semáforo dos Alimentos"	Organização e tratamento de dados	Ordenar conjuntos	Pensamento critico
"Pictograma da alimentação"	Organização e tratamento de dados	Formar conjuntos de acordo com um critério	Informação e comunicação
"Puzzle dos números"	Números Noção de número	Cores	Raciocínio e resolução de problemas
"Blocos lógicos"	Geometria	Formas geométricas planas: círculo; quadrado retângulo; triângulo	Raciocínio e resolução de problemas
"Jogo dos ovos coloridos"	Números	Dimensões: grande/pequeno	Raciocínio e resolução de problemas
História "A melhor forma"	Geometria	Identificar formas geométricas: nova forma hexágono	Linguagens e textos
Expressão plástica "As formas"	Geometria	Identificar formas geométricas	Sensibilidade estética e artística
"Puzzle das formas"	Geometria	Identificar formas geométricas	Raciocínio e resolução de problemas
"Os legos e a Matemática"	Geometria	Orientação espacial	Raciocínio e resolução de problemas
"Pintar a sequência dos legos"	Geometria	Visualização espacial	Sensibilidade estética e artística
"Jogo das posições"	Geometria	Orientação espacial Noções topológicas	Informação e Comunicação
História "Todos no sofá"	Interesse e curiosidade	Noção de número	Linguagens e textos
Atividade de sequências	Geometria	Orientação espacial	Raciocínio e resolução de problemas
Expressão plástica "As sequencias"	Geometria	Visualização espacial	Sensibilidade estética e artística
"A nossa altura"	Medida; Organização e tratamento de dados	Alto/baixo Interpretar dados	Informação e comunicação
"Bingo dos animais e dos números"	Números	Contagem dos objetos Saber o nome dos números	Relacionamento interpessoal

Tabela 2: Atividades implementadas em Educação Pré-escolar.

Atividades	**Conteúdos**	**Aprendizagens**	**Áreas de Competências**
"Mosaicos de adições e subtrações"	Números e operações	Adições e subtrações	Desenvolvimento pessoal e Autonomial
"Gráficos de animais"	Organização e tratamento de dados	Representação e interpretação de dados	Relacionamento interpessoall
"Construção e lançamento dos aviões"	Geometria e medida Org. e tratamento de dados	Unidades de medida	Desenvolvimento pessoal e Autonomial
"Escrita criativa"	Números	Números	Pensamento critico e criativol
"Dramatização"	Números	Números	Pensamento critico e criativol
"Desenhar com números"	Números e operações	Numeração decimal até 100	Desenvolvimento pessoal e Autonomial
"Bingo das dezenas e unidades"	Números e operações	Numeração decimal até 100	Desenvolvimento pessoal e Autonomial
"Iniciação ao tema do dinheiro"	Geometria e medida	Dinheiro	Desenvolvimento pessoal e Autonomial
"Compra e venda"	Geometria e medida	Dinheiro	Desenvolvimento pessoal e Autonomial
"Peddy-Papper"	Números e operações	Numeração decimal até 100	Relacionamento interpessoal
"Kahoot"	Transversal	Transversal	Relacionamento interpessoal

Tabela 3: Opinião dos alunos sobre três das atividades implementadas no projeto.

Atividade	Opiniões dos alunos (alguns exemplos)
“Mosaicos de adições e subtrações”	   
“Construção e o lançamento dos aviões”	   
“Compra e venda”	   

IV – A Intervenção

4.1 *Brincar + Aprender + Jogar = Matemática (r)* (Projeto Educação Pré-escolar)

Atividade 1 – "Semáforo dos Alimentos"

Inicialmente foi construído um semáforo por partes, primeiro as circunferências com as respetivas cores (Verde, Amarelo, Vermelho), depois a parte do poste.

A temática foi iniciada com a pergunta do que achavam que as peças formariam e com o que se parecia. Posteriormente questionei as cores e o que elas representavam, associando nesse momento a atividade a uma tabela com as referidas cores e transpondo assim para os alimentos.

Com as imagens já cortadas e com a tabela já construída, as crianças tinham de colocar os alimentos na coluna correspondente à regularidade em que se pode comer esse alimento, de acordo com o seguinte esquema de cores:

- Vermelho – Parar, cuidado com o que comes
- Amarelo – Prudência, apenas algumas vezes
- Verde – Avança, pode-se comer diariamente

Depois de preenchida a tabela foi afixada na sala (Figura 1) para relembrar a semana da alimentação.

Figura 1: Semáforo da Alimentação.

Atividade 3 – "O Puzzle dos Números"

A atividade consistiu na construção prévia de em um puzzle em tecido, com números e cores associando também formas especificas de encaixes entre as peças (Figura 2).

Para a realização do jogo, inicialmente as peças foram colocadas viradas ao contrário e dessa forma só eram visíveis as cores e as formas do encaixe das peças. Posteriormente uma criança de cada vez teve de encontrar o par correspondente a uma peça que tenha selecionado e tinha que responder a algumas questões: A tua peça é de que cor? Que número está representado na peça?

No final, montaram-se as peças todas e ordenaram-se as peças por ordem crescente.

Figura 2: (a) Jogo do puzzle dos números. (b) Realização do jogo.

Atividade 7 – Expressão Plástica: "As formas"

Num primeiro momento foram mostradas as cartolinas, as formas pré-cortadas e foi dada uma breve explicação do que se ia fazer. As cartolinas tinham desenhadas algumas imagens iguais às que estavam presentes no livro, mas com espaços para eles preencherem.

A atividade foi realizada em pequenos grupos, como se pretendia que eles estivessem à vontade e de forma autónoma a atividade foi desenvolvida no chão, no local onde são realizadas algumas atividades orientadas em grande grupo (Figura 3).

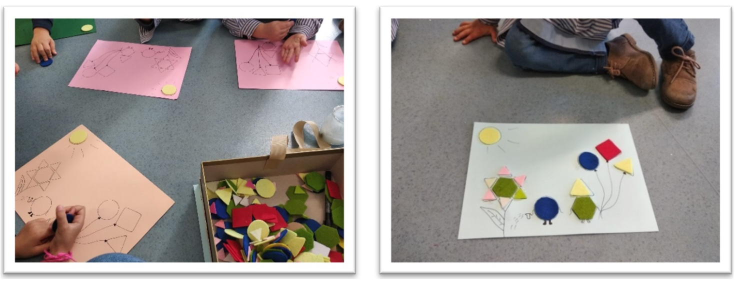


Figura 3: (a) Colagem das formas. (b) Trabalho finalizado.

Atividade 8 – "Puzzle das formas"

Trata-se de um jogo com duas imagens principais, a rena e o pai Natal. Essas imagens são expostas de diferentes formas sendo que a criança deverá ser capaz de identificar a mesma forma na rena e no pai natal e depois juntá-las (Figura 4).

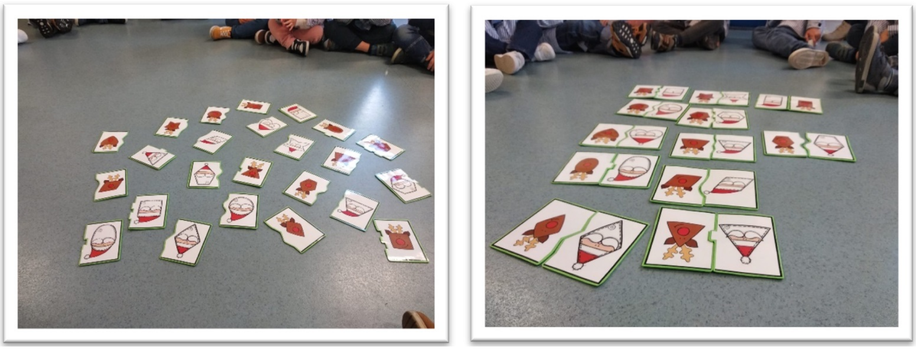


Figura 4: (a) Início do jogo das formas. (b) Jogo completo.

Atividade 11 – "Jogo das posições"

A atividade consistiu num lançamento do dado e em cada face do mesmo continha uma imagem com diferentes posições (dentro; em cima; em baixo; ao lado; atrás; à frente). Cada criança lançou o dado e colocou o peluche na mesma posição da imagem que saiu, em simultâneo teriam de explicar oralmente em que posição se encontrava o peluche (Figura 5).

Figura 5: Jogo das posições.

4.2 *A Matemática Recreativa* (Projeto 1.º Ciclo do Ensino Básico)

Atividade 1 – Mosaicos de Adições e Subtrações

Foi entregue uma folha a cada aluno e o primeiro momento da manhã foi todo ocupado para a realização das contas (Figura 6 (a)), só no final de fazerem todos os cálculos é que se verificava se estavam bem e passavam para a tarefa seguinte, que consistia na pintura de acordo com o resultado das contas (Figura 6 (b)).

Figura 6: (a) Realização dos cálculos. (b) Pintura dos quadrados.

A fase seguinte consistia no recorte da imagem e na colagem da mesma numa folha de papel colorida, tendo de escrever o nome da fruta como título (Figura 7).

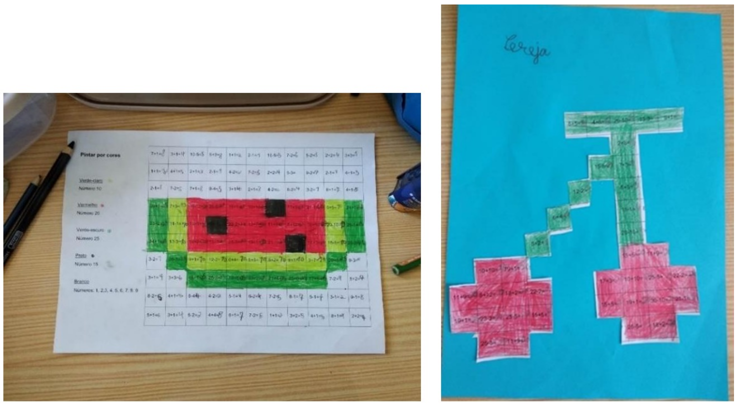


Figura 7: (a) A melancia. (b) As cerejas.

A parte do recorte exigiu algum cuidado, mas na generalidade todos conseguiram terminar antes do almoço, tendo sido necessária a manhã toda para a atividade.

Através da atividade foi possível treinar as somas e as subtrações de forma horizontal como menciona nas Aprendizagens Essenciais e como os alunos aprenderam. Foi notória a dificuldade que alguns alunos sentiram, por vezes recorreram à reta numérica para fazer as contas. Foi um bom exercício para treinarem e aperfeiçoarem essas operações.

Atividade 3 – Construção de aviões de papel e lançamento

Inicialmente fez-se em conjunto a construção dos aviões de papel como se verifica na Figura 8.

Figura 8: (a) Dobragem do Avião. (b) Aviões terminados.

Posteriormente realizou-se uma conversa e exploração de vários instrumentos de medida, que foram recolhidos na escola. Puderam ver uma régua de um metro, comparou-se com a régua de centímetros que eles tinham na caixa de material. Ficaram ainda a conhecer o metro articulado, uma fita extensível e uma fita de costureira, falou-se um pouco de cada um e em que diferentes situações podem ser utilizadas.

Seguiu-se o momento tão esperado, o lançamento dos aviões de papel (Fig. 15). Esse lançamento foi realizado com três alunos de cada vez e depois tinham que escolher um dos instrumentos de medida e fazer a medição da varanda até onde caiu o avião (Figura 9).

No momento da medida foi necessário ajudar individualmente cada aluno, sendo que, no final eles tinham de escrever a medida numa tabela.

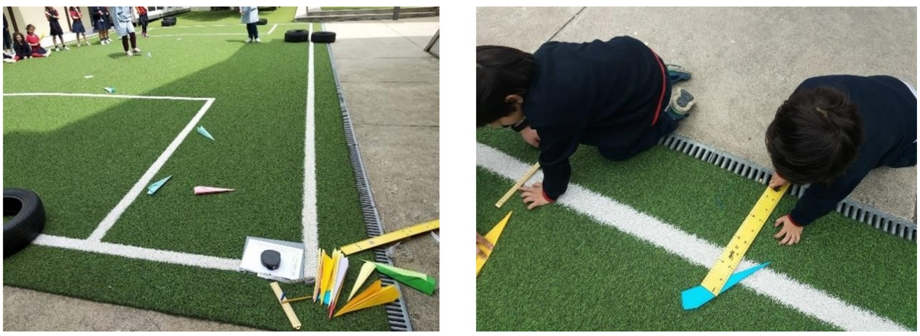


Figura 9: (a) Lançamento dos aviões. (b) Medição das distâncias.

No final, todos juntos fizeram um lançamento e elegeram-se três vencedores para os aviões que conseguiram alcançar a maior distância. Numa apreciação geral os alunos divertiram-se e gostaram da atividade.

Foi uma forma de aperfeiçoarem e aplicarem de uma forma prática os conhecimentos que já tinham aprendido sobre as medidas, e assim trabalharam em simultâneo o desenvolvimento pessoal e a autonomia, uma das competências presentes no PA.

Atividade 7 – Bingo das Dezenas e Unidades

Foi realizada uma conversa inicial sobre o jogo, fez-se a descrição das regras do jogo e em que moldes ia ser jogado. Esta atividade foi pensada para colmatar uma das dificuldades sentidas pelos alunos na identificação num número da dezena e da unidade e dessa forma este jogo será realizado pensando nessa problemática.

Os cartões foram entregues a cada um dos alunos, cada cartão tinha oito números, e para assinalar que o número saiu será entregue no momento um botão para os alunos colocarem em cima do cartão nesse respetivo lugar como se verifica na Figura 10.

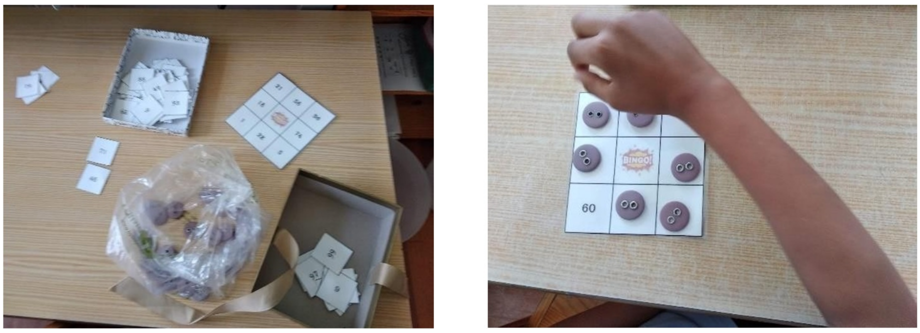


Figura 10: (a) Material do Bingo. (b) Botões a assinalar os números.

Quando era retirado um número ele era lido da seguinte forma, por exemplo: uma dezena e duas unidades eles teriam de identificar o número que era 12 e verificar se o tinham no cartão. Por vezes, alguns alunos trocavam a dezena com a unidade e quando se ia entregar o botão percebia-se o erro.

Atividade 8 – Iniciação ao tema do dinheiro

Os alunos tiveram de selecionar, recortar e colar alguns produtos, mas só podiam gastar dez euros como se pode observar na Figura 11. Três dos alunos colocaram mais produtos do que o dinheiro que tinham, sentiram alguma dificuldade nos produtos que tinham o valor de 0.50 cêntimos.

Figura 11: (a) Recorte dos produtos. (b) Compra final com 10 euros.

Manusearam durante mais algum tempo o dinheiro, estiveram a contar as notas que tinham e deu-se como terminada a primeira abordagem ao tema do dinheiro, posteriormente, foi dinamizada outra atividade para a mesma temática.

Atividade 9 – Compra e venda

Inicialmente foi realizada uma conversa com os alunos sobre a atividade que se ia realizar. Foi colocada uma mesa (Figura 12 (a)), com vários objetos etiquetados com um determinado preço, para os alunos comprarem e venderem. Cada aluno tinha um porta-moedas (Figura 12 (b)), bem como réplicas de várias moedas, material que vinha de apoio com o manual escolar adotado.

Durante a realização da atividade, foi necessário dar algum apoio/orientação no momento do pagamento e no troco, apesar de grande parte dos alunos pagarem o valor do produto com dinheiro certo.

Figura 12: (a) Mesa dos produtos. (b) Carteira com o dinheiro.

Os alunos ao longo da atividade foram fazendo o registo do dinheiro recebido e do troco dado numa tabela.

V – Considerações Finais

A sociedade está em constante mudança e deve acompanhar-se essas alterações para melhor desempenhar e aperfeiçoar a profissão; no que respeita à Educação já se estão a dar alguns passos de melhoria, mas ainda existe um grande percurso para o sucesso integral das escolas. As escolas também têm acompanhado as mudanças. Contudo, verifica-se que tem sido de uma forma gradual, ainda é necessário centrar as metodologias de acordo com os documentos do Ministério da Educação (referenciais curriculares) que se encontram em vigor [4, 5, 6].

Um profissional de educação deverá estar em constante aprendizagem, deverá aperfeiçoar as suas técnicas e metodologias. "O professor deve ser um guia que permite aos alunos, desde a infância e ao longo de suas trajetórias de aprendizagem, se desenvolver e avançar através do labirinto de conhecimentos em constante expansão" ([12], p.94). De facto, "(...) o desenvolvimento de competências exige mais conhecimento e valoriza mais o saber, o trabalho desenvolvido é mais exigente e há um caminho mais difícil a percorrer quando se trabalham conhecimentos e competências de forma interdependente" ([2], p.52).

No caso da matemática, exigindo a sociedade atual, por parte dos cidadãos, vários conhecimentos matemáticos nas mais diferenciadas situações do quotidiano, melhorar e promover a literacia matemática são objetivos pertinentes, de modo a preparar as novas gerações para uma cidadania informada e uma partição ativa na comunidade. O raciocínio lógico-dedutivo (saber pensar, prever a solução, aplicar a imaginação e a criatividade a novas situações, ...) é uma competência importante, não só para quem estuda matemática em ambiente escolar, mas também para a futura vida adulta dos participantes. Não será de mais recordar que conceitos matemáticos estão atualmente, direta ou indiretamente, inseridos no trabalho diário de praticamente todos os profissionais, pelo que a literacia matemática é um dos pilares essenciais para uma inclusão plena na sociedade atual.

Agradecimento

Este trabalho foi financiado pela RECI pelo CIDMA-Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações e pela FCT-Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito dos projectos UIDB/04106/2020 e UIDP/04106/2020.

Referências

[1] Aguiar, J. "O jogo no ensino de conceitos a pessoas com problemas de aprendizagem: Uma proposta metodológica de ensino", *Revista Brasileira de Educação Especial*, 9, 1, 79–108, 2003.

[2] Costa, J., Couvaneiro, J. *Conhecimentos vs. Competências*, Guerra & Paz, 2019.

[3] Cury, A. *Pais brilhantes, professores fascinantes*, Edições Pergaminho, 2019.

[4] Direção-Geral da Educação. Perfil dos Alunos à saída da Escolaridade Obrigatória, Ministério da Educação, 2017.

[5] Direção Geral da Educação. Aprendizagens Essenciais, Ministério da Educação, 2017.

[6] Direção Geral da Educação. Estratégia Nacional de Educação para a Cidadania, Ministério da Educação, 2017.

[7] Ferro, A. *Métodos e Técnicas Pedagógicas*, Editora Nova Etapa, 2003.

[8] Moreira, D., Oliveira, I. *O Jogo e a Matemática*, Universidade Aberta, 2004.

[9] Ponte, J. P. , Serrazina, M. *Didática da Matemática do 1.º Ciclo*, Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

[10] Porto Editora – recreativo no Dicionário infopédia da Língua Portuguesa, Porto: Porto Editora. [consult. 2023-02-21 19:32:04] Disponível em `https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/recreativo`.

[11] Reachers, S. *500 Frases sobre a Educação*, Edição Sammis Reachers, 2019.

[12] Unesco. *Repensar a Educação – Rumo a um bem comum mundial?*, Brasília: Unesco, 2016.

[13] Zabala, A., Arnau, L. *Como aprender e ensinar competências*, Editora Artmed, 2014.